Astr: P. 88 ^l^ Melde

Dr. Franz Melde,

Astronomische Zeitbestimmung.

270 D

THEORIE UND PRAXIS

DER

ASTRONOMISCHEN ZEITBESTIMMUNG

MIT ZUGRUNDLEGUNG VORBEREITENDER LEHREN UND
UNTER BERÜCKSICHTIGUNG EINFACHER HILFSMITTEL

DARGESTELLT

VON

DR. FRANZ MELDE,
ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MARBURG,
DIRECTOR DES MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN INSTITUTS DASELBST.

MIT 93 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN
UND EINER REIHE VON HILFSTAFELN.

TÜBINGEN.
VERLAG DER H. LAUPP'SCHEN BUCHHANDLUNG.
1876.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Das Recht der Uebersetzung ist vorbehalten.

Druck von Heinrich Laupp.

Vorwort und Einleitung.

Das vorliegende Buch verdankt seine Entstehung zunächst der Wahrnehmung, dass Studirende der Mathematik und Naturwissenschaft, die ihre Kenntnisse auch auf dem Gebiete des astronomischen Wissens, soweit es für ihre gesammte Ausbildung wünschenswerth ist, erweitern wollen, in der vorhandenen Literatur nur wenige Darstellungen finden, welche einerseits ihren Ansprüchen genügen und andererseits über das Maass dieser Ansprüche nicht wesentlich hinausgehen. Die rein populären Schriften nämlich müssen ihrem Zwecke entsprechend von einer strengeren mathematischen Entwickelung absehen: ein Umstand, welcher einem grossen Theile Studirender nicht gerade zusagt; die eigentlich astronomischen Schriften aber, welche der Astronom von Fach zur Hand nimmt, sind vielfach mit einer so ausführlichen Darstellung von Einzelheiten und Feinheiten beschäftigt, dass diejenigen Studirenden, für welche das vorliegende Werk zunächst bestimmt ist, nicht wohl im Stande sein dürften, das für sie Nöthige abzuscheiden und daher auch von vornherein wohl nicht den Muth behalten, das Studium solcher Schriften ernstlich weiter zu betreiben.

Da ich öfters an hiesiger Universität eine Vorlesung über astronomische Zeitbestimmung gehalten habe, so konnte ich mich bei diesem speciellen Zweige der praktischen und theoretischen Astronomie überzeugen, dass er besonders geeignet ist, einmal eine ausgedehnte Anwendung der Lehren der sphärischen Trigonometrie zu verlangen, dass er ferner wegen der fortwährend nothwendigen Benutzung astronomischer Ephemeriden und Tabellen die Studirenden mit einem grossen

Theile dieser wichtigen Hilfsmittel gründlich vertraut macht, wie er endlich eine praktische Uebung im Beobachten mittelst des Auges und Ohrs erheischt und hierdurch eine Fertigkeit verleiht, die für den späteren Beruf in verschiedenen Lagen des Lebens von nicht zu unterschätzender Bedeutung wird. Aber auch dieser Gegenstand dürfte ein solcher sein, den der Anfänger nicht wohl im genügenden Zusammenhang und namentlich nicht mit der nöthigen Vorbereitung und praktischen Unterweisung in der vorhandenen Literatur bearbeitet vorfindet, und wenn ich von dieser Ansicht durchdrungen, mir vornahm, diesen besonderen Zweig des astronomischen Wissens in dem vorliegenden Werke darzustellen, so leitete mich die Hoffnung, dass zunächst die strebsamen Studirenden der Mathematik und Naturwissenschaft manchen Nutzen von dem Studium desselben haben würden. Aber sofort muss ich bemerken, dass ich dieses Buch nicht für den Kreis solcher Studirenden allein abgefasst habe: vielmehr bin ich der Ansicht, dass auch der reisende Geograph, der praktische Geometer, der Meteorologe, der Physiker wie überhaupt jeder mathematisch gebildete Freund der Astronomie dasselbe mit Nutzen gebrauchen könne, und wünsche ich ihm mit Rücksicht hierauf eine allgemeinere Verbreitung, ja, wenn ich mir einbilde, dass selbst der Astronom von Fach manche Auffassungen und Entwickelungen in diesem Buche entdecken kann, die vielleicht seinen Beifall erhalten können, so leitet mich hierbei die Ueberzeugung, dass ich mich bemüht habe, durchgängig der Rücksichtnahme auf ein allgemeineres Verständniss nicht die Gründlichkeit in der Darstellung zum Opfer zu bringen.

Diese Gründlichkeit im Auge behaltend, musste ich für das Studium der hier behandelten Lehren die Kenntniss der niederen Mathematik, der sphärischen Trigonometrie, der analytischen Geometrie der Ebene (und des Raumes) voraussetzen. An einzelnen Stellen wird man der Anwendung der Differential- und Integralrechnung begegnen, doch braucht Jemand, dem diese Disciplinen etwa ganz unbekannt sind, das Buch desshalb nicht bei Seite zu legen.

Eine rasche Durchsicht des Werkes wird zur Ueberzeugung führen, dass eine grössere Anzahl Figuren darin vorkommt, als sonst wohl in astronomischen Schriften üblich ist; aber diese grössere Zahl war aus einem doppelten Grunde nothwendig: zunächst nämlich betrachte ich für

Einen, der zum erstenmale mit Gründlichkeit an das Studium dieser Lehren herantritt, die blosse Entwickelung nach Formeln und Gleichungen zu trocken und geradezu auch vielfach für unzureichend, da man mit einer Formel und einer Gleichung noch nicht ein lebendiges Bild von dem Vorgange von Bewegungen oder dem Wesen einer bestimmten Constellation erlangt; sodann aber musste ich aus folgenden Gründen der Figur ein besonderes Recht einräumen. Man hat sich in der Theorie und Praxis der astronomischen Wissenschaft auf Seiten der Fachgelehrten wie der Laien daran gewöhnt, die Scheinbewegungen der Gestirne als das anzusehen, woran zunächst die wissenschaftlichen Betrachtungen anzuknüpfen sind; die ganze astronomische Sprachweise hat sich demgemäss ausgebildet: nach ihr „bewegt sich die Sonne", „die Fixsterne beschreiben Kreise", „die Gestirne gehen auf und unter", „sie culminiren oben und unten" u. s. w. Wenn nun auch der Astronom und wer sonst den Charakter dieser Bewegungen näher verfolgt hat, beim Gebrauche solcher Ausdrücke sofort im Stande ist, im Hintergrunde das zu substituiren, was die eigentliche Wirklichkeit verlangt, so wird dieses Substituiren bei einem Anfänger, selbst wenn er schon eine gewisse mathematische Durchbildung beansprucht, nicht immer leicht und mit Sicherheit vorgenommen werden können. Wie sehr diese meine Behauptung wahr ist, wird jeder Lehrer auf diesem Gebiete erfahren können, und braucht man sich nur einmal vorzunehmen, von einer jede Halbheit ausschliessenden Vorstellung, z. B. von dem Vorgange der unteren Culmination im Gegensatze zur obern bei dem Schüler Kenntniss zu bekommen, und man wird sehr oft finden, dass er vielleicht über die Lage des Horizonts im Weltraum etc. ganz anders denkt, als man erwartete. Das eigentlich Wirkliche vorzutragen und zu erläutern ist aber meines Erachtens besonders da Pflicht eines Lehrers, wo er strebsamen Anfängern gegenüber tritt, und mit Rücksicht hierauf habe ich mich bei der Abfassung der vorliegenden Schrift bemüht, die einzelnen Erscheinungen und ihren Verlauf lediglich als von der Bewegung der Erde abhängig darzustellen, demgemäss eine geometrische Anschauung und Auffassung auszubilden und die Entwickelung der Gleichungen nicht an sonst beliebte sondern an solche Figuren anzuknüpfen, welche im Stande sind, auch gerade die Auffassung der wahren Bewegungen zu erleichtern. Wenn ich

aber an verschiedenen Stellen von diesem Grundsatze abgewichen bin und mich der gewohnten Sprachweise bediente, so geschah dies in der Ueberzeugung, dass Derjenige, der meine Darstellung bis zu solchen Stellen hin genau verfolgt hat, im Stande sein müsse, selbstständig und richtig an die Stelle der Auffassung des Scheins die der Wahrheit treten zu lassen. Jedenfalls aber dürfte auch aus dem Bestreben, diesem von mir eben bezeichneten Grundsatze ohne Pedanterie treu zu bleiben, erkannt werden können, dass es in meiner Absicht lag, nicht überall gewohnte Darstellungen einfach wiederzugeben, sondern zu zeigen, wie man eigentlich auf einem anderen Wege weiter ziehen müsse, um eine erweiterte Aussicht zu gewinnen.

Die instrumentalen Hilfsmittel, die ich voraussetzte, sollten verhältnissmässig einfache sein und berücksichtigte ich insbesondere den Apparat, den unser Marburger Observatorium besitzt und der ja wohl noch manchem von den lebenden Astronomen in Erinnerung sein wird. Dieser Apparat, soweit er hier in Betracht kommt, besteht aus einem Ertel'schen tragbaren Passageinstrument, einem Breithaupt'schen Theodolithen, einigen Fernröhren, Spiegelsextanten, dem Eble'schen Zeitbestimmungsapparat, einer guten Pendeluhr nach Sternzeit gehend und einem vorzüglichen Chronometer von Kessels nach mittlerer Sonnenzeit regulirt. Von diesen Instrumenten wird wohl Mancher im Stande sein, sich einen Sextanten, ein brauchbares Fernrohr mit Fadenkreuz, eine möglichst gute Pendeluhr, sowie das Eble'sche Zeitbestimmungswerk anzuschaffen, oder wenigstens das Glück haben, dieselben einzeln oder zusammen in den Händen von Privaten oder im Besitze von Lehrinstituten zu finden. Ich nehme desshalb an, dass wenn Jemand das folgende Buch studirt und danach auch praktisch arbeiten will, die Schwierigkeiten, welche vielleicht anfangs im Beschaffen der nöthigen Instrumente hervortreten, überwinden kann, denn in der That muss selbst der gesammte Apparat, wie wir ihn hier in Marburg besitzen, gegenüber der Ausrüstung einer grossen Sternwarte nur ein sehr mässiger genannt werden.

Die literarischen Hilfsmittel, welche ich für das Studium des vorliegenden Lehrbuchs nebenbei noch voraussetze, sind ebenfalls nur wenige. Vor allem unerlässlich ist der Besitz eines astronomischen Jahrbuchs und da bei der Wahl der Beispiele und der Lösung von

Aufgaben das Greenwicher astronomische Jahrbuch (Nautical Almanac) zu Grund gelegt worden ist, so wird Jeder im Vortheil sein, der sich einen Jahrgang dieses Werkes anschafft, welche Anschaffung der Kosten halber wohl allgemein keine Schwierigkeiten machen kann, weil ein solcher Band nur zwei und eine halbe Mark kostet. Da ich ferner bei den Aufgaben, Beispielen und Erläuterungen hauptsächlich den Jahrgang 1870 im Auge hatte, so wird beim Vergleichen gerade dieser Jahrgang eine sehr grosse Erleichterung bieten; sollte er aber nicht zu beschaffen sein, so kann ein anderer Jahrgang immer ebenso benutzt werden, wenn man nur beachtet, dass die direct aus dem Jahrgang 1870 entnommenen Zahlen etc. in späteren oder früheren Jahrgängen vielfach andere sein müssen. Weitere literarische Hilfsmittel erfordert das Studium des vorliegenden Buches nun eigentlich nicht, insofern die nöthigsten Tabellen demselben beigegeben sind. Da ich mir aber vorstellte, dass es Manchen gäbe, der eine umfassendere Kenntniss erlangen möchte und dem die Angabe von weiterer Literatur nicht unerwünscht komme, so habe ich überall, wo vorhandene Originalarbeiten, Lehrbücher, Atlanten etc. bei meiner Darstellung benutzt wurden, diese im Texte selbst oder in Anmerkungen angeführt und möglichst genau bezeichnet; ausserdem aber habe ich meistens am Schlusse eines Kapitels noch diejenige Literatur angeführt, deren Benutzung oder Kenntnissnahme von Vortheil sein kann.

Ueber die Eintheilung des Stoffes mich hier näher auszusprechen halte ich nicht für nöthig, da eine einfache Einsicht in das Inhaltsverzeichniss den Plan erkennen lässt. Aus ihm ist sofort ersichtlich, dass der ganze erste Theil die besondere Bestimmung hat, vorzubereiten und eine Basis zu schaffen, auf welcher man erst sicher stehen muss, wenn eine praktische Anwendung der Lehren des zweiten Theils nicht Gefahr laufen soll, für nicht viel mehr als eine blosse Abrichtung angesehen zu werden. Befindet sich desshalb im ersten Theile vielleicht auch Manches, wovon eine Verwendung im zweiten Theile wenig oder gar nicht gemerkt wird, so wird dies scheinbar Ueberflüssige dennoch bei näherer Betrachtung dazu beigetragen haben, möglichst alle Factoren zu übersehen, welche bei einer vollständigen und genauen Zeitbestimmung mitzureden haben. Bezüglich der im zweiten Theile dargestellten Methoden der Zeitbestimmung muss ich

aber noch ein Wort sagen. Mancher nämlich, welcher den Titel des Buches liest, wird erwarten, dass dasselbe alle bekannten Methoden die Zeit zu bestimmen dargestellt enthalte. Diese Auffassung theilte ich von vorn herein bei der Abfassung dieser Schrift nicht, denn ich wollte ein Lehrbuch schreiben, welches zunächst, wie schon erwähnt, die nöthigen Vorbereitungen enthielt und dann von den zahlreichen und verschiedenen Methoden der Zeitbestimmung nur einzelne Hauptrepräsentanten so genau berücksichtigte, dass sich mit Sicherheit erwarten liess, es werde Jeder, dem diese beschränkte Zahl der Zeitbestimmungsmethoden hinreichend genau bekannt geworden ist, der eine im vorliegenden Buche gegebene Vorbereitung erlangt hat und dann auch noch andere Zeitbestimmungsmethoden theoretisch und praktisch erlernen will, im Stande sein, auch deren Wesen selbstständig und ohne Schwierigkeit zu erfassen.

Bezüglich der Entwickelung oder der directen Mittheilung von Gleichungen und Formeln sei bemerkt, dass diese möglichst vollständig geschehen ist und dass von sogenannten Näherungsformeln zunächst abgesehen wurde, da es meistens leicht ist, diese aus den vollständigeren Formeln abzuleiten, umgekehrt aber oft unmöglich wird, z. B. aus einer Figur, die nur mit Rücksicht auf die Ableitung von Näherungswerthen gezeichnet wurde, das herauszulesen, was eine der Wirklichkeit genau entsprechende Auffassung verlangt. Bei der Berechnung der Beispiele ist es ferner Grundsatz gewesen, von etwaigen Kunstgriffen im Rechnen abzusehen und sind die Rechensätze in der Reihenfolge mitgetheilt, wie sie dem logischen Gange nach ausgeführt werden müssen. Dass aber bei den umfangreichen Rechnungen im zweiten Theil Derjenige, welcher schon einigemal nach dem im Buche eingehaltenen Gange Beispiele berechnet hat, im Stande sein wird, sich viele Erleichterungen und Vereinfachungen im Anordnen und Untereinanderschreiben von Rechensätzen, Logarithmen etc. zu verschaffen, kann erwartet werden.

Die Aufgaben des ersten Theils sind durchgängig selbstständig gewählt und nicht anderen Büchern nachgedruckt. Insbesondere sind die Aufgaben: die verschiedenen Zeiten in einander umzuwandeln, vielleicht gründlicher als in irgend einem andern Lehrbuche behandelt worden. Denn ich betrachtete gerade dieses Kapitel als ein solches,

wo man die bereits erworbenen Kenntnisse von dem Zusammenhang der Zeitarten, von der Vorstellung gewisser Constellationen mit aller Ueberlegung und Vorsicht verwerthen muss und ist in ihm auch auf gewisse Besonderheiten eine Rücksicht genommen worden, welche bei näherer Betrachtung sich als eine nützliche erweisen dürfte.

Die Beispiele des zweiten Theils habe ich mit sehr wenigen Ausnahmen nach eigener Wahl und nach der von mir oder von einem meiner Herrn Assistenten vorgenommenen Beobachtung mitgetheilt und wurde auch hier davon abgesehen, Beispiele und Berechnungen aus andern Lehrbüchern einfach abzudrucken. Denn es kann nicht geläugnet werden, dass die eigene Beobachtung Gelegenheit bietet, auf gewisse Dinge aufmerksam zu machen, welche einem bei der blossen Wiedergabe der Zahlenmassen aus den Beobachtungen Anderer entgehen können. Auch muss ich bemerken, dass es mir nöthig schien, ein Beobachtungsmaterial vorzuführen, welches gerade mit Hilfe eines mässig vollendeten Apparates gewonnen wurde, damit Jemand, dem auch nur solche oder vielleicht noch weniger vollendete Apparate zu Gebote stehen, einige Erfahrung erlangt und nicht von vornherein etwa abgeschreckt wird, wenn seine Beobachtungen von solchen, die in verschiedenen Lehrbüchern als Musterbeobachtungen fortwährend aufgenommen und berechnet sich vorfinden, vielleicht nicht unerheblich abweichen.

Die Schwierigkeit der Controlirung der Rechnungen wurde wesentlich verringert dadurch, dass zwei frühere Assistenten an dem hiesigen mathematisch-physikalischen Institute, die Herrn: Gymnasiallehrer H. Kramm und Stud. F. Uth sowie mein jetziger Assistent Herr Stud. Müller mich in sehr dankenswerther Weise unterstützten. Dass trotzdem noch manche Zahlenfehler stehen geblieben und einige bedeutunglose Ungenauigkeiten in den Zahlen zu entdecken sind, wird entschuldigt werden können.

Eine sehr grosse Menge von Arbeiten und Schwierigkeiten war zu überwinden, weil es mir nicht vergönnt war, am Druckorte persönlich anwesend zu sein, um durch eine einfache mündliche Unterweisung Dinge klar zu machen, welche brieflich kaum genügend bezeichnet werden können. Zweierlei wirkte aber hier zusammen, um diese vielfachen Hindernisse zu überwinden, nämlich einmal die reiche Er-

fahrung auf dem Gebiete der Buchdruckerei, welche mir durch Herrn Redacteur J. A. Koch in Marburg in so ausgedehntem Maasse zu Gute kam, dass ich mich genanntem Herrn gegenüber zu besonderem Danke verpflichtet fühle, sodann aber hatte ich es in dem Herrn Verleger mit einem Manne zu thun, der mit der grössten Bereitwilligkeit auf meine zahlreichen Anforderungen eingieng und es verstand, dem Werke eine solche Ausstattung zu verschaffen, welche wohl ihre allseitige Anerkennung finden dürfte.

Marburg im August 1875.

F. Melde.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Vorbereitende Lehren.

Seite

Kapitel I.

Die Uhren und ihre Vergleichung 3

Kapitel II.

Die verschiedenen Zeitarten 56

Kapitel III.

Die praktische Anwendung der vorausgehenden Lehren insbesondere unter Beihilfe astronomischer Ephemeriden 101

Kapitel IV.

Ueber die Abhängigkeit der scheinbaren Lage eines Gestirns, insbesondere herrührend von der Natur des Lichtes 146

Kapitel V.

Ueber die Abhängigkeit der scheinbaren Lage eines Gestirns vom Standpunkte des Beobachters; über die Bedeutung des scheinbaren Durchmessers der Gestirne, sowie über die durch bestimmte Himmelskörper veranlasste Veränderung der Coordinatensysteme 182

Zweiter Theil.

Die Methoden der Zeitbestimmung.

Kapitel VI.

Einrichtung und Theorie der Libelle 239

Kapitel VII.

Das Passageinstrument, seine Einrichtung, Aufstellung und Fehler . . . 270

Seite

Kapitel VIII.

Das Passageinstrument und dessen specieller Gebrauch zur Zeitbestimmung . 322

Kapitel IX.

Bestimmung der Zeit aus der Beobachtung correspondirender Sonnen- oder Sternhöhen 366

Kapitel X.

Die Zeitbestimmung durch Messen einer absoluten Höhe; die Eble'sche Zeitbestimmungsmethode 416

Kapitel XI.

Zeitbestimmung mit Hilfe von Fixsternverschwindungen 454

Hilfstafeln 481

Weitere Zusätze und Berichtigungen 508

Sachregister 510

Verbesserungen.

Bemerkung. Ziffern- und Buchstabenfehler, welche sich sofort als einfache Druckfehler ohne Bedeutung erkennen lassen, sind hier nicht aufgeführt worden; ebenso werden hier einzelne Ungenauigkeiten in den Rechnungen, welche schliesslich auf das Endresultat einen kaum bemerkbaren Einfluss ausüben, nicht berücksichtigt. Die Seitenzahl ist durch eine Ziffer, die Zahl der Zeilen ist: von oben gezählt durch eine in runde Klammern, von unten gezählt durch eine in eckige Klammern eingeschlossene zweite Ziffer bezeichnet, so dass z. B. 135 (7) heisst: Seite 135 Zeile 7 v. o. Die verbesserten Ziffern sind fetter gedruckt.

14 (14) lies 35,**0**; 14 [13] l. 21^s,**0**; 17 [10] l. *C,P,* st. *C,P* ebenso 17 [9] u. 17 [7]; 19 [7] l. $\frac{36\mathbf{0}}{36\mathbf{6}}$; 20 [16 u. 9] l. $(2n-1)$ st. (n^2-1); 50 (11) l. 254 Secunden oder $4\frac{1}{4}$ Minuten; 50 (12 u. 15) l. $4\frac{1}{4}$; 50 [8] l. $8\frac{1}{2}$; 51 (2) l. 1,002**7**; 52 [23] l. 1,002**7**; 52 [21] l. I (B); 64 [1] l. zum zweitenmal *DP,C*; 71 (20) l. 7**6**; 87 (1) l. λ_1 st. L_1; 93 (15) l. *sin* **2** L_1; 99 [14] l. 3^m 55^s,909; 100 (13) l. 0,00273**04362**; 104 [4 u. 3] l. **43**″,**7**; 105 (1 u. 2) l. **16**″,**3** bzw. 33^s,**09**; 106 [17] l. **14**′; 112 [2] l. 2280,**5**; 113 [8] l. 49^s,**11** u. 8^s,54**7**; 113 [7] l. 0^s,01**0**; 118 [17] l. nach d. zweiten Gleichheitszeichen **5**^{h} **8**^{m} **28**^{s},**76**; 126 (7 u. 9) l. **59**^{s},48; 133 [17] l. **14**^{s},50; 143 (16, 18, 19, 20) l. bzw. 2^s,**155**, **2**^{s} … 0^s,0**05**, 0^s,3**33**, **1**^{s},**422**; 161 (3) l. $\sin(PZs)$; 171 (11) l. $\cos b$; 177 [10] l. sMt'; 185 [18, 17] l. e_0 st. c_0'; 191 [3 u. 1] l. a st. α; 195 [1] l. π_0 st. p; 196 [12] l. $(t-\alpha)$ st. $(\alpha-t)$; 204 [16u. 9] l. $(\delta'-\nu)$ st. $(\delta-\nu')$: 207 [1] l. 1^m 10^s,**85**; 208 (10) l. Erd**axe**; 230 (18 u. 21) fehlt hinter $\cos(\Omega+B-\alpha)$ ebenso 230 [8 u. 6] hinter $\cos(2\odot+F-\alpha)$ der Factor $\tan\delta$; 234 [20] l. 8^s,385; 246 (5) l. **6**9; 251 (8) l. 5,0 st. 15,0; 264 [11 u. 8] l. 0,199**24**; [8] l. 0,08**3**00; [7] l. 0,0048**7**; 329 (20) l. Δt_e st. Δt; 333 (14) l. v_4 st. a_4; 336 (14) l. $1^0\,9'\,9''$,**1**; 342 (2) l. 15^0 **36**′ **1**″ = 1^h **2**^{m} **24**^{s}; 345 [18] l. 44^s,9**3** und 14,**54**; [17] l. 29^s,88 u. 29^s,8**6**; [16] l. 14^s,**78** u. 44^s,49; 354 (1) l. $\sin f_5$ st. $\sin f_6$; 368 [11]

l. $\delta > 90^0 - \varphi$; 386 (15) l. $x,$; 388 [21 u. 19] l. $\overset{*}{AR}\bigcirc$ st. $\overset{+}{AR}\bigcirc$; 389 (5) l. T_2 st. T_3; (10) T_2'' st. T_2'; 394 (13) l. $(\delta_u + \Delta\delta_u)$; 401 [17] l. Gl. (**39**); [13] l. S_1; 402 (10) l. T_1''' etc. st. T_1 etc.; [15] l. s_1 st. s; [1] l. T_2'' st. T_2'; 403 [12] muss der Nenner $24^h + 3^m\ 41^s,38$ und nach dem zweiten Gleichheitszeichen 86621,38 heissen; 404 [8] l. den Nenner nach dem zweiten Gleichheitszeichen 86621,38; 406 [1] l. Werth st. Weg; 431 (8) l. nach d. zweiten Gleichheitszeichen ein —; 439 [4] l. im Nenner *cos* (37° 0′); 441 (3) l. $4^h\ 0^m\ 0^s,9$; [14] l. $56^s,95$.

Erster Theil.

Vorbereitende Lehren.

Kapitel I.

Die Uhren und ihre Vergleichung.

§. 1. Um den Lauf der Zeit in grössere oder kleinere Abschnitte zu zerlegen, beziehungsweise nach diesen Abschnitten eine gegebene Zeitdauer zu messen, d. h. durch eine Zahl auszudrücken, ist man genöthigt, zu Mechanismen zu greifen, die im Allgemeinen mit dem Namen „Uhren“ bezeichnet werden. Je nach dem Grad der Genauigkeit, den man hierbei zu erzielen beabsichtigt, richtet sich dann auch die Wahl der einen oder anderen Art von Uhren, und es sei sogleich bemerkt, dass für unsere Zwecke hauptsächlich nur zwei in Betracht kommen können: nämlich die „Pendeluhren“ und die „Federuhren“, zu welchen letzteren insbesondere die „Chronometer“ zu rechnen sind. Wiewohl wir also auch eigentlich nur auf diese Rücksicht zu nehmen hätten, so mögen doch auch einige andere hier Beachtung finden.

Da die Zeit *), als Anschauungsform unserer Seele, zu ihrem Zustandekommen Veränderung, d. h. Bewegung voraussetzt, so versteht es sich, dass eine Abgrenzung von Zeittheilen und hiernach eine Messung der Zeit zunächst nur auch wieder durch eine Bewegung möglich wird, deren einzelne Momente in markirter Weise dem beobachtenden Geiste sich kundgeben. Es kann dies nun z. B. dadurch geschehen, dass man eine aus einer Oeffnung ausfliessende Flüssigkeitsmasse benutzt, ihre auf die Zeit zwischen zwei Momenten kommende Quantität dem Volum oder dem Gewichte nach bestimmt und so schliesslich zu einer abstracten Zahl als Symbol der Zeitgrösse gelangt.

So hat man sich schon im hohen Alterthume einer Reihe von Einrichtungen bedient, die man mit dem Namen „Wasseruhren“ zu

---

*) Zu empfehlen ist hier das Lesen eines Aufsatzes von Prof. Dr. Förster, Director der Sternwarte in Berlin: „Ueber Zeitmaasse und ihre Verwaltung durch die Astronomie.“ Berlin 1866. C. G. Lüderitz'sche Verlagsbuchhandlung, A. Charisius.

bezeichnen pflegt und deren Einführung nach Griechenland hin Plato zugeschrieben wird. Um in einem gegebenen Falle die Sache beurtheilen zu können, wurde ein Glaskölbchen in eine Spitze mit einem Ausflusslöchelchen ausgezogen und diesem gegenüber in der Glaswand eine Oeffnung angebracht, so, dass wenn das Gefäss mit Wasser angefüllt und mit der Spitze nach unten befestigt war, das Wasser in einem feinen Strahle ausfliessen konnte. Letzteres wurde mit einer in Millimeter getheilten Eudiometerröhre aufgefangen und die Zeit nach einem danebenstehenden Chronometer notirt im Momente, wo die im Eudiometerrohr emporsteigende Wassersäule die Scalenpunkte 100, 200, 300, 400 und 500 erreichte. In letzterem Momente wurde die Eudiometerröhre weggenommen, entleert und zum zweiten Mal unter die Ausflussmündung gebracht, so dass bei der nun folgenden zweiten Füllung derselben das Wasser unter einem geringeren Druck wie bei der ersten ausfliessen musste. War dies geschehen, so wurde das Kölbchen wieder voll gegossen, die Operation wiederholt und so zum dritten Male.

Die gewonnenen Zahlenwerthe waren folgende:

Erster Versuch, erste Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	1^h	19^m	0,^{s}0		
Zeit bei 100^{mm}	»		20	32, 3	92,^{s}3	
» 200	»		22	8, 9	96, 6	
» 300	»		23	49, 1	100, 2	504,^{s}2
» 400	»		25	33, 8	104, 7	
» 500	»		27	24, 2	110, 4	

Zweite Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	1^h	29^m	1,^{s}0		
		»	30	46, 3	105,^{s}3	
		»	32	35, 8	109, 5	
		»	34	29, 7	113, 9	576,^{s}1
		»	36	29, 4	119, 7	
		»	38	37, 1	127, 7	

Zweiter Versuch, erste Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	1^h	42^m	1,^{s}0		
		»	43	30, 2	89,^{s}2	
		»	45	7, 6	97, 4	
		»	46	48, 0	100, 4	502,^{s}4
		»	48	32, 0	104, 0	
		»	50	23, 4	111, 4	

Zweite Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	1^h 52^m 0,^{s}0		
		» 53 45, 1	105,^{s}1	
		» 55 34, 2	109, 1	
		» 57 27, 7	113, 5	575,^{s}1
		» 59 27, 2	119, 5	
		2^h 1 35, 1	127, 9	

Dritter Versuch, erste Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	2^h 5^m 4,^{s}0		
		» 6 36, 0	92,^{s}0	
		» 8 12, 1	96, 1	
		» 9 52, 4	100, 3	503,^{s}2
		» 11 36, 6	104, 2	
		» 13 27, 2	110, 6	

Zweite Füllung der Röhre.

Anfangszeit	=	2^h 15^m 0,^{s}0		
		» 16 45, 4	105,^{s}4	
		» 18 34, 2	108, 8	
		» 20 28, 1	113, 9	575,^{s}2
		» 22 27, 5	119, 4	
		» 24 35, 2	127, 7	

Die fünf Zahlen hinter den Beobachtungszeiten bedeuten in Sekunden die Zeit, welche die in der Eudiometerröhre aufsteigende Wassersäule von 100 zu 100 Millimeter gebrauchte. Man sieht, diese Zeiten wachsen in jeder Reihe mit dem im Kölbchen abnehmenden Drucke und sind bei der zweiten Füllung der Maassröhre aus demselben Grunde alle grösser als bei der ersten. Wiewohl nun der Druck inconstant und auch noch desshalb eine Ungleichheit der Zeiten zu erwarten war, weil die aus dem Kölbchen fliessende Wassermasse an der Röhrenwand herablief und so eine verschiedene Zeit gebrauchte, um bis zum Wasserniveau der steigenden Flüssigkeitssäule zu gelangen, so zeigen die Versuche doch gewisse Regelmässigkeiten. So z. B. betragen in den ersten Füllungen der Röhre die Summen aller fünf Zeiten

$$\left.\begin{array}{r} 504,^s2 \\ 502,4 \\ 503,2 \end{array}\right\} \text{ also im Mittel } 503,^s26,$$

d. h. ein Zeitraum, der auf diese Weise gemessen würde, dessen Anfang auf den Beginn des Ausflusses, dessen Ende auf den Moment fiele, in welchem die Wassersäule den Theilstrich 500 erreicht, würde immerhin

mit einer verhältnissmässig grossen Genauigkeit bestimmt werden. Denn die drei Werthe weichen vom Endmittel nur um + 0,^{s}94, — 0,^{s}86 und — 0,^{s}06 ab.

Es ist möglich, den Ausfluss des Wassers unter constantem Drucke vor sich gehend zu machen und sich auch vom andern Fehler, der in dem Zeitverbrauche des an der Röhrenwand herablaufenden Wassers liegt, zu befreien. Man braucht nämlich nur zur Vermeidung des letzteren Fehlers das ausgeflossene Wasser anstatt sein Niveau zu bestimmen, zu wiegen. Unter dieser Voraussetzung und unter Berücksichtigung eines constanten Druckes im Kölbchen, wurde eine neue Reihe von Versuchen angestellt, die wir mittheilen wollen, um verschiedene Einflüsse beurtheilen zu können. Floss das Wasser allemal eine Minute lang aus, so wog es in fünf Fällen:

17,525 Gramm	im Mittel also 17,4670 Gramm;
17,470 »	
17,400 »	
17,490 »	
17,450 »	
2,335 Gramm	

in einer Sekunde flossen mithin $\frac{14,4670}{60}$, d. h.

0,2911 Gramm

aus, welche Zahl wir den Ausflusscoefficient nennen wollen.

Nun wurde in einem beliebigen Anfangsmoment das Auffanggefäss untergehalten und in einem bestimmten zweiten, vom Chronometer angegebenen Momente das Auffangen sistirt. Es ergab sich hierbei bei drei Versuchen Folgendes:

Anfangszeit =	10^h	5^m	30,^{s}0	Zwischenzeit = 34,^{s}5;
Endzeit =	10	6	4, 5	Gewicht = 10,02 Gramm.
Anfangszeit =	10	12	15, 0	Zwischenzeit = 124,^{s}0;
Endzeit =	10	14	19, 0	Gewicht = 36,05 Gramm.
Anfangszeit =	10	29	15, 0	Zwischenzeit = 72,^{s}0;
Endzeit =	10	30	27, 0	Gewicht = 21,21 Gramm.

Wird mit dem Ausflusscoefficient in die Gewichte dividirt, so erhält man die drei Zeitwerthe:

34,^{s}42
123, 80
72, 86

welche von den am Chronometer beobachteten, um + 0,08; + 0,20; — 0,86 Sekunden abweichen. Am andern Tage wurde mit demselben Wasser, das die Nacht hindurch in den Gefässen stehen geblieben war,

eine neue Versuchsreihe angestellt. Sie ergab als Ausflussmengen in einer Minute

17,60 Gramm
17,63 »
17,57 »

im Mittel 17,60, d. h. den Ausflusscoefficienten gleich

0,2933.

In vier Versuchen hiernach ward nun

Anfangszeit = 38^{m} 15,^{s}0	Zwischenzeit = 205,^{s}0;	
Endzeit = 41 40, 0	Gewicht = 60,06 Gramm.	
Anfangszeit = 48 15, 0	Zwischenzeit = 31,^{s}0;	
Endzeit = 48 46, 0	Gewicht = 9,07 Gramm.	
Anfangszeit = 55 15, 0	Zwischenzeit = 21,^{s}5;	
Endzeit = 55 36, 5	Gewicht = 6,29 Gramm.	
Anfangszeit = 18 10,^{s}0	Zwischenzeit = 352,5;	
Endzeit = 24 2, 5	Gewicht = 103,06 Gramm.	

Dividiren wir wieder mit dem Ausflusscoefficienten 0,2933 in die Gewichtszahlen, so erhalten wir

204,^{s}75
30, 92
21, 44
351, 40

von welchen Werthen die Chronometerzeiten um

+ 0,^{s}22
+ 0, 08
+ 0, 06
+ 1, 10

Sekunden abweichen. Man sieht aus diesen Versuchen, dass der Ausflusscoefficient veränderlich sein kann, und dass desshalb auf längere Zwischenräume hin, ja, wie hier schon, von einem Tage zum andern, eine Zeitabmessung nach dieser Methode, falls man nicht unmittelbar vorher den Ausflusscoefficient wieder bestimmt hat, sehr zweifelhaft ist. Geschieht dies aber, so wird die Methode, in der einen oder andern Form zur Anwendung gebracht, immerhin zur Abgrenzung und Messung von Zeitintervallen dienen können, und selbst in Fällen, die eine astronomische Genauigkeit erfordern, wie z. B. die Bestimmung der Zeit, die ein Stern gebraucht, um die Intervalle zwischen den Fäden eines Fernrohrs zu durchlaufen, Anwendung finden dürfen. Im gewöhnlichen Leben sind ja auch die Wasseruhren bis in's 17. Jahrhundert gebraucht worden.

§. 2. Weniger noch wie die Wasseruhren dürften die „Sanduhren“ als Zeitmesser zu gebrauchen sein, deren Einrichtung einfach darin besteht, dass ein feiner, möglichst trockener Sand eine Oeffnung in einem Behälter durchfällt und die zwischen Anfang und Ende dieses Durchfallens liegende Zeit als Maass für grössere Zeitstrecken benutzt wird. Bei einem kleinen Exemplare dieser Art von der bekannten Doppelkegelform, wurden sechs Beobachtungen neben den Anzeigen eines Chronometers gemacht und ergaben zwischen dem Chronometerstand:

42^m	$10,^s0$	und	47^m	$18,^s5$	die Ausflusszeit	=	5^m	$8,^s5$
48	0, 0	»	53	37, 0	» »	=	5	37, 0
54	30, 0	»	59	39, 5	» »	=	5	9, 5
0	0, 0	»	5	47, 5	» »	=	5	47, 5
6	10, 0	»	11	22, 5	» »	=	5	12, 5
11	50, 0	»	17	20, 0	» »	=	5	30, 0

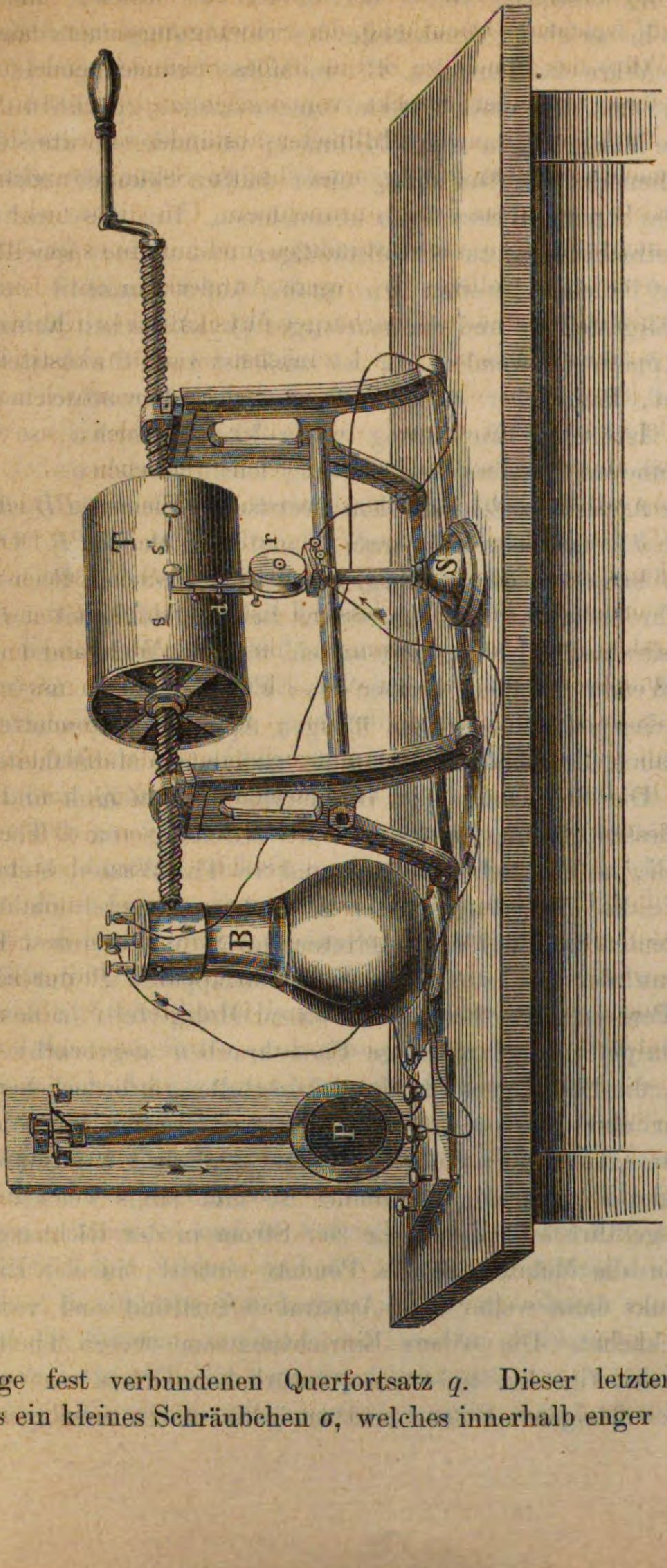
Diese Zahlen beweisen, dass die Zeit des Ausflusses von einem Ende her eine kürzerere ist wie vom andern, wenn das Apparatchen umgestülpt wird, und ausserdem, dass selbst bei den offenbar zusammengehörigen Werthen so bedeutende Abweichungen vorkommen, dass eine Benutzung dieser Uhren zu astronomischen Zwecken nicht statthaft ist.

§. 3. Einer dritten Einrichtung wollen wir hier gedenken, da dieselbe mit der grössten Schärfe sowohl grössere wie auch die kleinsten Zeitintervalle abzumessen gestattet und in der Physiologie, der Akustik und Astronomie seit einer Reihe von Jahren die vortheilhafteste Anwendung gefunden hat. Diese Einrichtung, die an und für sich, je nachdem es die Umstände eben erfordern, sehr verschiedenartig sein kann, beruht im Wesentlichen auf der Anwendung des electrischen Stroms, der einen Stift in Bewegung setzt und ihn auf einem rotirenden berussten Cylinder, solange der Stromschluss dauert, einen Eindruck machen lässt. Das Tempo des Oeffnens und Schliessens des Stroms wird durch ein Pendel bestimmt so, dass zwischen je zwei gleichen Stellen des vom Stifte gemachten Eindrucks eine Strecke liegt, die als Maass der Schwingungsdauer des Pendels angesehen werden muss. Wären die Eindrücke zur Basis des Cylinders parallel gelegene Geraden, falls man diesen aufgerollt denkt, und a der Anfang einer solchen Geraden beim Schliessen des Stroms, b das Ende derselben beim Oeffnen, ebenso a' und b' Anfang und Ende der folgenden Geraden beim nächsten Schluss und der nächsten Oeffnung des Stroms, so wäre ohne Zweifel die Strecke von a nach a', ebenso von b nach b' das, was die Schwingungsdauer des Pendels versinnlicht. Gesetzt nun weiter, es trete zwischen zwei Pendelschlägen eine andere Erscheinung ein, deren Eintrittsmoment man auch auf dem Cylinder markirte,

so würde diese Marke im Allgemeinen zwischen solche Punkte a und a', b und b' etc. fallen, und man hätte nur nöthig mit einem Cirkel die Entfernung derselben von a oder a' etc. zu messen, um sofort zu wissen, in welchem Bruchtheile der Schwingungsdauer das Ereigniss eintrat. Wäre das Pendel z. B. ein halbes Sekundenpendel und zeigte es sich, dass bei einer Strecke von a nach a' gleich 40 Millimeter lang, die Marke von a um 7 Millimeter abstände, so wäre der Eintritt dieses Moments offenbar zu $\frac{7}{40}$ einer halben Sekunde nach dem Momente des Stromschlusses bei a anzunehmen. Um diese mehr allgemeineren Betrachtungen zu vervollständigen und auf eine specielle Einrichtung zu beziehen, wollen wir unsere Aufmerksamkeit dem, in der Fig. 1 dargestellten und im marburger physikalischen Kabinete befindlichen Apparate zuwenden. Er ist zunächst zwar für akustische Zwecke bestimmt, kann aber ohne Weiteres auch astronomischen Zwecken dienen. Ist seine Einrichtung völlig klar geworden, so wird man irgend eine andere derselben Gattung leicht verstehen.

Der Apparat besteht aus dem electrischen Elemente B, der Schreibtrommel T, dem Schreibapparate S und dem Pendel P. Der Electromotor B kann aus einem einzigen guten Bunsen'schen Becher oder auch einem Chromelement bestehen, dessen Leistungsfähigkeit der Länge des Leitungsdrahts und dem gesammten übrigen Widerstand entsprechen muss. Wendet man ein Bunsen'sches Element an, so muss man Sorge tragen, dass es in einem vom übrigen Apparate abgesonderten Raume steht, damit die schädlichen Dämpfe vorhandene Metalltheile nicht verderben. Die Benutzung eines Chromelements, aus Zink und Kohle gebildet, dessen Füllung ferner in einer Mischung von 3 Th. chromsaurem Kali, 4 Th. Schwefelsäure und 18 Th. Wasser bestehen kann, verlangt die Beachtung dieser Vorsichtsmaassregel nicht. In der Figur deutet ein Pfeil das Austreten des Stroms aus dem Elemente B an, wenn derselbe zunächst den Pendelapparat P durchlaufen soll. Dieser Pendelapparat besteht aus einem Holzgestell, in dessen unterer Horizontalplatte drei messinge Fussschrauben angebracht sind, dazu dienend, die Platte genau horizontal zu stellen, erforderlichen Falls aber auch ihr eine hiervon innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Lage zu geben. Auf dieser Holzplatte steht senkrecht eine zweite, welche das Pendel P zu tragen bestimmt ist und längs welcher die Drahtleitung geführt ist, durch die der Strom in der Richtung des Pfeils rechts in die Metalltheile des Pendels eintritt, in der Richtung des Pfeils links dann weiter dem Apparat S zuströmt und von hier nach B zurückkehrt. Die nähere Einrichtung am oberen Theile des Pendels ist in Fig. 1, a in etwa $\frac{1}{2}$ natürlicher Grösse zu sehen. Der vertical aufsteigende Strom tritt zunächst in ein messingenes Ansatz-

stück *a*, und lauft von hier durch die beiden Metallfedern *ff*, an welchen die Pendelstange *p* hängt, auf den, mit dem oberen Ende der

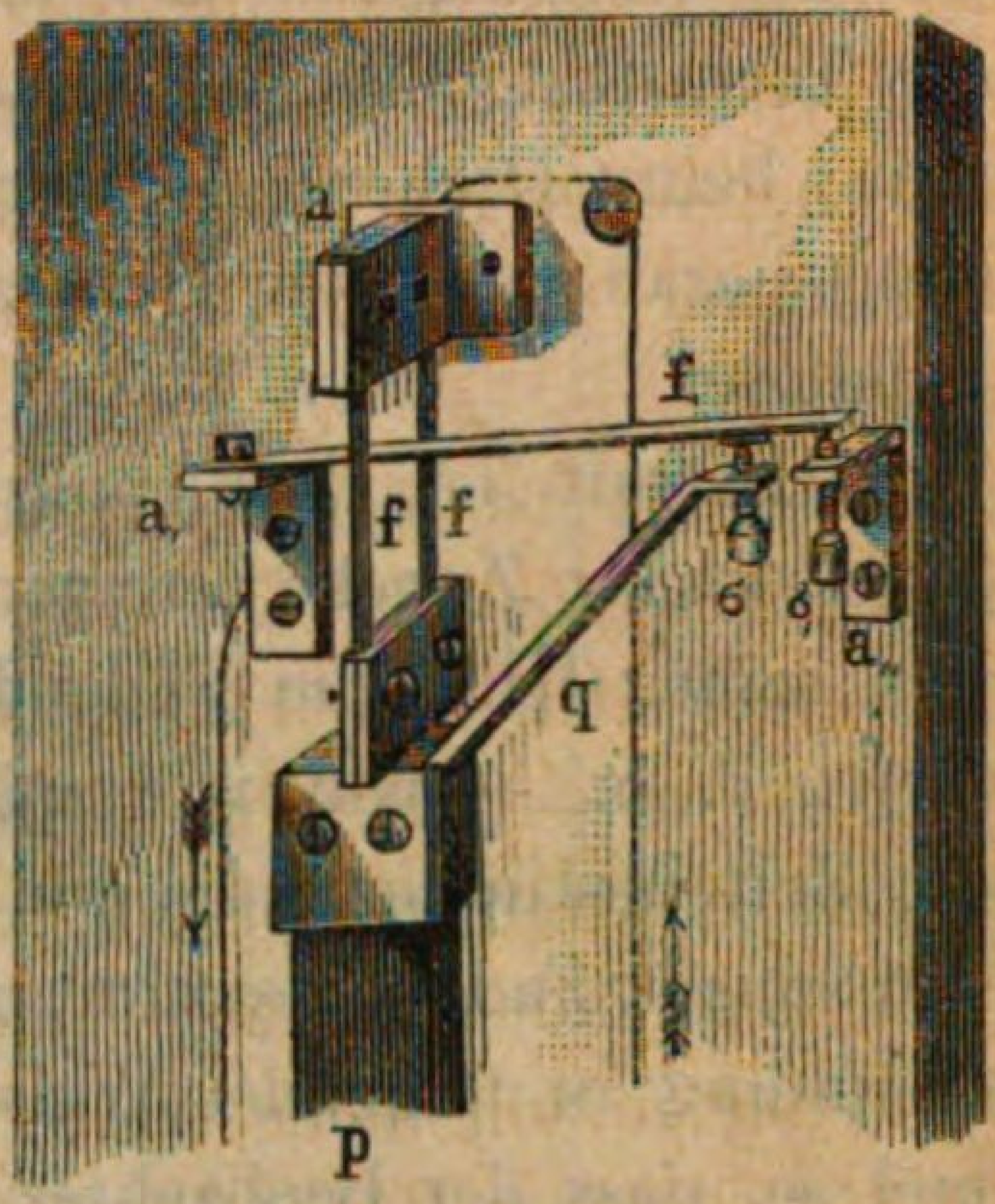


Figur 1.

Pendelstange fest verbundenen Querfortsatz *q*. Dieser letztere trägt nach rechts ein kleines Schräubchen *σ*, welches innerhalb enger Grenzen

auf und nieder geschraubt werden kann. Bei dieser Verstellung wird das Schräubchen σ in eine Lage kommen können, in der es bei ruhendem Pendel die Feder $f_{,}$, welche von einem zweiten Ansatz $a_{,}$ nach rechts sich erstreckt, unten berührt. Bei dieser Stellung wird der Strom von der Spitze von σ auf $f_{,}$, von hier nach $a_{,}$, sodann in der Richtung des abwärts zeigenden Pfeils weiter gehen und so überhaupt erst geschlossen sein. Um nun noch die Feder $f_{,}$ innerhalb bestimmter Grenzen verstellen zu können, ist in $a_{,,}$ ein dritter Ansatz an dem Verticalbret angebracht und mit einem Schräubchen $\sigma_{,}$ versehen, durch dessen Auf- und Niederschrauben die Feder $f_{,}$ sich hebt und senkt, so dass auch auf diesem Wege die Dauer der Berührung mit der Spitze von σ regulirt werden kann. Es ist nun klar, dass wenn diese Berührung von σ mit $f_{,}$ bei ruhendem Pendel eben gerade stattfindet, der Strom so lange geschlossen bleibt als das Pendel von der Ruhelage aus sich nach rechts bewegt und umgekehrt, so lange unterbrochen wird als dasselbe von der Ruhelage aus nach links schwingt. Die erstere Zeit wird man verkürzen, wenn man die Berührung von σ mit $f_{,}$ in einer Phase eintreten lässt, die mehr nach der rechten Elongationsgrenze zuliegt und ebenso umgekehrt. Es kann dies aber offenbar durch die Fussschrauben des Horizontalbrets und die Schräubchen σ und $\sigma_{,}$ erreicht werden.

Figur 1, a.



Beim Beginne des Stromschlusses bewegt sich nun die Spitze *s* vom Apparat *S* nach der Schreibtrommel *T* hin und wird bei passender Stellung von *S* zu *T* mit letzterem leise in Berührung kommen, eine Bewegung, die dadurch ermöglicht wird, dass um *r* herum in verschiedenen Windungen der Strom circulirt und in die Höhlung von *r* im Momente des Stromschlusses ein Eisenkern hineingezogen wird, welcher mit *s* an einem verticalen und um zwei Spitzen bei *d* sich drehenden Messingärmchen sitzt. Um beim Oeffnen des Stroms den Rückgang von *s* zu erleichtern und zu präcisiren ist unterhalb *d* eine Feder angebracht, deren Wirkung ohne Weiteres klar ist.

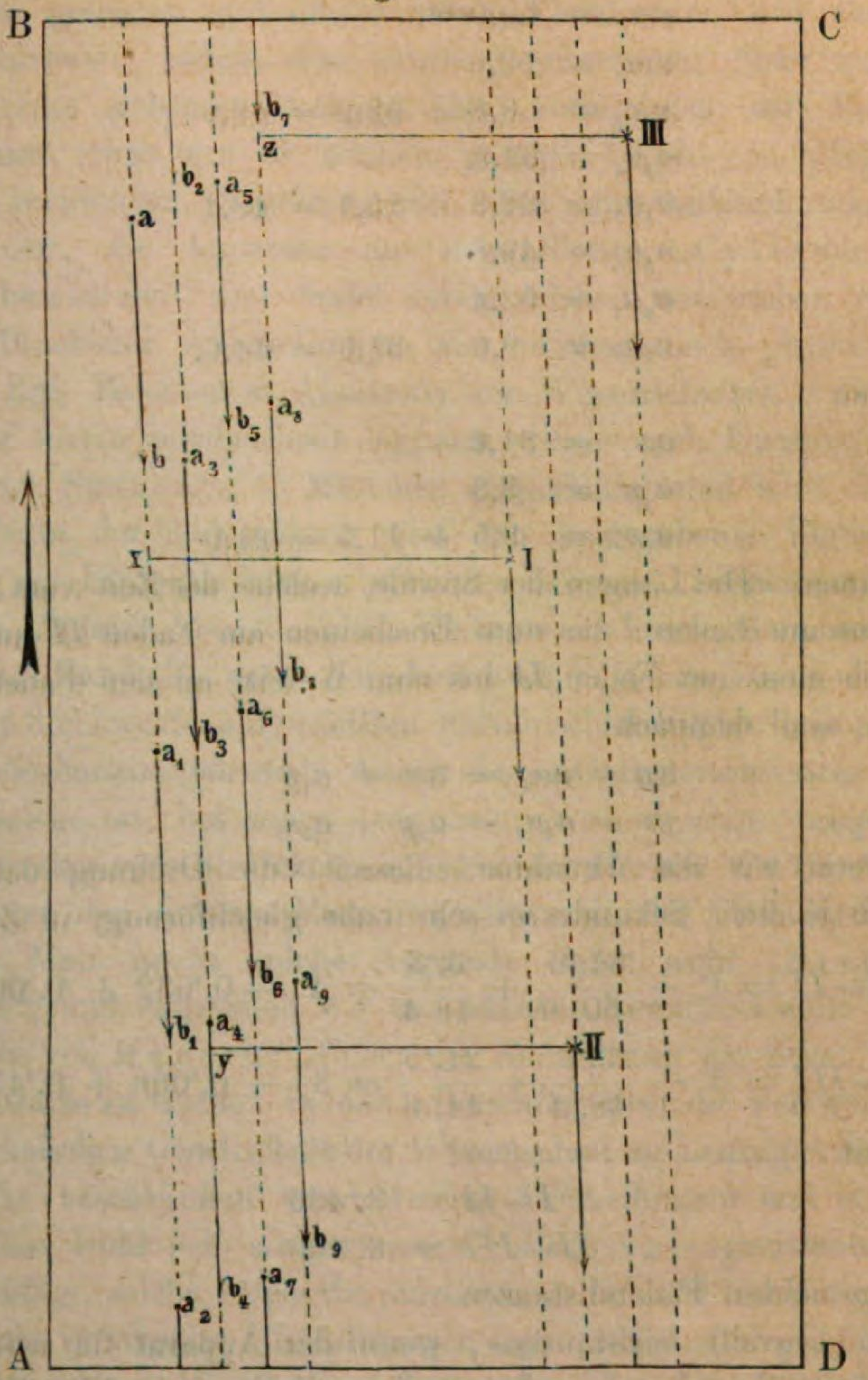
Vor dem Spiel des Apparats, soweit wir es bisher kennen gelernt haben, muss nun die Messingtrommel *T* falls die Eindrücke auf ihr benutzt werden sollen, mit berusstem Papier überzogen werden. Es geschieht dies in der Weise, dass man einen feinen Zeichenbogen nimmt und ihn auf reiner ebener Unterlage mit reinem Wasser so lange an-

feuchtet, bis er sich gleichmässig und ohne Falten um T herumlegen lässt, namentlich so, dass zwischen dem Messing und dem Papier keine Luftblasen sich einnisten. Ist dies geschehen, so wird das eine Ende des Papiers auf der unteren Seite mit starkem Leim bestrichen und über das andere Ende gelegt, worauf das Ganze dann mehr und mehr trocknet und hierbei eine völlig glatte Oberfläche erhält. Bevor das Trockenwerden aber vollständig erfolgt ist, nimmt man die Berussung vor, indem man in ein kleines Schälchen etwas Baumwolle legt, diese mit Terpentinöl tränkt und unter der Trommel anzündet. Da die Drehungsaxe der letzteren eine Schraubenspindel ist, so kann das Terpentingefäss auf seiner Unterlage ruhig stehen bleiben; es kommen beim Drehen der Trommel immer andere Stellen zur Berussung heran und der Ueberzug wird sehr rasch ein vollständiger und tadelloser.

Hiermit ist der Apparat zur Benutzung fertig und fragt es sich, zu welchem Zwecke er verwandt werden soll. Gesetzt, man wollte mit seiner Hilfe die Fädendistanzen eines Passageinstrumentes bestimmen, d. h. — wie wir später noch näher kennen lernen werden — die Zeit bestimmen, die ein, vorerst beliebiger, Fixstern gebraucht, um von einem Faden bis zum nächsten zu kommen, so liesse sich die Bestimmung in folgender Weise machen. Zunächst stellt man die Trommel so, dass der Beobachter des Sterndurchgangs einen zweiten Stift s', dessen Spitze mit s in gleicher Höhe liegt und der auf die mannigfachste Weise sich anbringen lässt, bequem mit dem Finger im Moment an die Trommel andrücken kann, in welchem der Fixstern die einzelnen Fäden zu passiren scheint. Dreht nun während der Beobachtung ein Gehilfe die Trommel um, so wird offenbar jeder Anfang der Schrift von s' einem Momente der Schrift von s entsprechen, der gefunden wird, wenn man von dem Anfangspunkt der ersteren Schrift aus in den Russ, parallel zur Erzeugungslinie des Cylinders eine Gerade eingräbt, und diese bis zum Durchschnitt mit einer der von s beschriebenen Linien ab, a_1b_1 .... oder einer zwischen zwei solche Linien fallenden Strecke ba_1, b_1a_2 .... verlängert. Beschränken wir uns auf drei Fäden, so wird die ganze Notirung schliesslich etwa so wie bei der Fig. 2 ausfallen. Es stellt in ihr $ABCD$ den von der Trommel abgelösten, berussten Zeichenbogen vor, wenn AB die Basis und AD vorher eine Erzeugungslinie der Cylindertrommel bildete. Da letztere bei der Drehung sich progressiv fortbewegte, so müssen die Linien, welche der Stift s oder s' in Fig. 1 eingrub, Stücke von Schraubenlinien sein, die in unserer Fig. 2 als ab, a_1b_1 ...... a_9b_9 und andererseits in den von *I, II, III* ausgehenden und vom Schreibstift s' markirten Linien zu sehen sind. Das Pausiren des Stroms, beziehungs-

weise das Aufhören der Andrückung von s' durch die Hand des Beobachters ist durch punktirte Linien hervorgehoben. Gemäss der, auf dem Felde der Figur an den Linien ab, a_1b_1 etc. angenommenen Pfeilrichtung, muss die Trommel selbst im Sinne des ausserhalb der Figur gezeichneten Pfeils rotirt haben.

Figur 2.



Die Marken $*I$, $*II$, $*III$ bezeichnen die Momente, in welchen der betreffende Stern am Faden I, II und III erschien, und um die hierzu gehörigen Marken auf den, vom Stifte s gezeichneten, Spiralen zu erhalten, sind die Linien Ix, IIy, $IIIz$ parallel zu AD gezogen, so, dass also die Durchschnittspunkte x, y, z die gesuchten Marken sind. Da das Pendel zu einem Hin- und Hergang zusammengenommen eine

Sekunde gebrauchen soll, so folgt, dass die Strecken aa_1, a_1a_2...... den Zeitraum einer Sekunde repräsentiren. Diesem Zeitraume würden ganz gleiche Strecken aa_1, a_1a_2..... angehören, wenn die Drehung durch die Hand des Gehilfen vollkommen gleichmässig sich erzielen liesse; da letzteres aber nicht der Fall, werden auch diese Längen etwas von einander abweichen. In unserem Beispiele ist:

$$\begin{aligned}
aa_1 &= 50{,}0^{mm}\\
a_1a_2 &= 52{,}6\\
a_2a_3 &= 6{,}8 + 42{,}2 = 49{,}0\\
a_3a_4 &= 51{,}9\\
a_4a_5 &= 33{,}3 + 15{,}1 = 48{,}4\\
a_5a_6 &= 49{,}8\\
a_6a_7 &= 52{,}4\\
a_7a_8 &= 9{,}6 + 35{,}6 = 44{,}6,
\end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned}
ax &= 31{,}6\\
a_4y &= 3{,}3\\
a_7z &= 9{,}5 + 11{,}5 = 21{,}0
\end{aligned}$$

angenommen. Die Längen der Spirale, welche der Zeit vom Erscheinen des Sterns am Faden *I* bis zum Erscheinen am Faden *II* und der Zeit des Erscheinens am Faden *II* bis zum Antritt an den Faden *III* entsprechen, sind demnach:

$$\begin{aligned}
xy &= aa_4 - ax + a_4y\\
yz &= a_4a_7 - a_4y + a_7z,
\end{aligned}$$

d. h., wenn wir die Annahme zulassen, die Drehung der Trommel innerhalb je einer Sekunde sei sehr nahe gleichförmig, in Zeit:

$$I\text{—}II = 4^s - \frac{31{,}^s6}{50{,}0} + \frac{3{,}^s3}{48\,4} = 4^s - 0{,}^s632 + 0{,}^s068$$

$$II\text{—}III = 3^s - \frac{3{,}^s3}{48{,}4} + \frac{21{,}^s5}{44{,}6} = 3 - 0{,}^s068 + 0{,}^s471$$

und somit

$$\begin{aligned}
I\text{—}II &= 3{,}^s436\\
II\text{—}III &= 3{,}403
\end{aligned}$$

als die gesuchten Fädendistanzen.

Man begreift leicht, dass, wenn der Apparat für astronomische Zwecke fortwährend gebraucht werden soll, er jedenfalls dem entsprechender eingerichtet werden kann und muss. Zu dem Ende lässt sich zunächst die Umdrehung der Trommel durch ein Uhrwerk bewerkstelligen, während wir dieselbe durch einen Gehilfen besorgen liessen. Diese Umdrehung wird dadurch eine gleichmässige werden, während bei uns dies nur annähernd richtig war. Sodann leuchtet ein, dass unser Pendel bei eigentlich astronomischen Beobachtungen durch ein

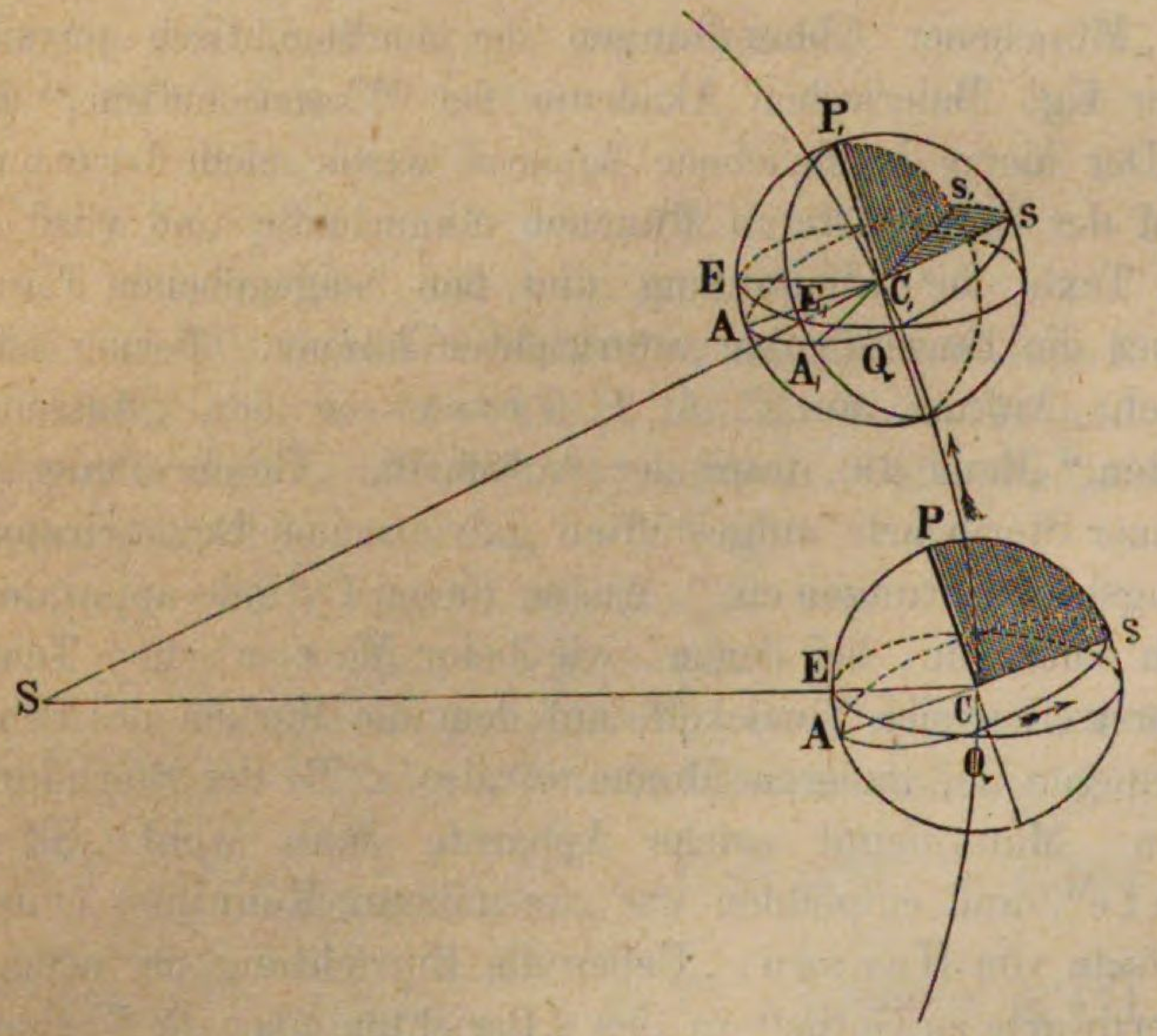
genaues Sekundenpendel ersetzt und der Mechanismus der Stromöffnung und Stromschliessung ein anderer werden muss. Denn jedenfalls wird die Feder f_1 einen nicht geringen und auch störenden Einfluss auf die einzelnen Schwingungen von P bei unserer Methode ausüben.

Die Anwendung dieser electrischen Uhren in Verbindung mit einem Schreibapparate hat der Astronomie schon höchst bedeutungsvolle Dienste geleistet und dürfte es am Platze sein, hier auf einige Stellen hinzuweisen, welche eine nähere Beschreibung dieser merkwürdigen Apparate geben. Geschieht das Aufzeichnen der Eindrücke in der Weise, wie wir es kennen gelernt haben, so pflegt man wegen des rotirenden Cylinders, auf dem die Aufzeichnungen gemacht werden, die Apparate mit dem Namen „Cylinderapparate“ zu bezeichnen, und findet einen solchen beschrieben von Lamont: „Münchener Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Kgl. Baierischen Akademie der Wissenschaften,“ Band VI. S. 414. Der hierin beschriebene Apparat wurde nach Lamont's Angaben auf der Sternwarte in München eingerichtet und wird der Leser aus dem Texte der Abhandlung und den beigegebenen Figuren sich genau über die Einzelnheiten unterrichten können. Ferner ist hier zu nennen ein Aufsatz von C. A. F. Peters in den „Astronomischen Nachrichten,“ Band 49, unter der Aufschrift: „Beschreibung eines auf der Altonaer Sternwarte aufgestellten galvanischen Registrirapparats für Durchgangsbeobachtungen etc.“ Ausser diesen Cylinderapparaten wendet man auch solche an, bei denen, wie beim Morse'schen Telepraphen, ein Papierstreifen sich abwickelt, auf dem die Marken des Pendels und die Notirungen der anderen Momente, also z. B. der Sterndurchgänge, stattfinden. Man nennt solche Apparate dann wohl „Streifenapparate“, und empfehlen wir zur näheren Kenntniss eines solchen einen Aufsatz von Hansen: „Ueber die Einrichtung der neuen herzoglichen Sternwarte zu Gotha“ in den „Berichten über die Verhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig,“ Band XI. S. 241. Wir beschränken uns auf diese Mittheilungen und erwähnen nur noch, dass wohl jede einigermassen vollständig eingerichtete Sternwarte heutzutage solche Apparate aufzuweisen hat und dieselben keineswegs etwa als vereinzelte Einrichtungen anzutreffen sind.

§. 4. Aus dem Alterthume ist uns eine Einrichtung bekannt geworden, die ebenfalls bis zu einem gewissen, im gewöhnlichen Leben oft genügenden Grade gestattet, die Zeit zu erfahren: nämlich die Sonnenuhr. Es hat dieser Apparat von der Vorzeit an bis in unsere Tage Interesse erregt und fortwährend dem Praktiker und Theoretiker Stoff zum Nachdenken geliefert, so dass auch wir ihn nicht übergehen dürfen. Da insbesondere die Sonne die Zeitverhältnisse des Lebens

regelt, so ist klar, dass man schon sehr frühe Mittel ersann, um zu erfahren, wie weit mit ihr der Tag vorgeschritten sei. Man wusste recht wohl, dass sie vom Aufgang an höher und höher über den Horizont steigt, dass sie einen höchsten Stand erreicht und von hier ab sich allmählich wieder dem Horizonte zuneigt. Diesen Zeitraum des natürlichen Tages in Unterabtheilungen zu zerlegen, und zwar mit Hilfe der Sonne selbst, war ein Gedanke, der, soweit bis jetzt die Forschungen anzunehmen erlauben, zuerst von dem Chaldäer Berosus, 640 Jahre v. Chr., gefasst und praktisch zur Ausführung gebracht wurde. Es kommt uns nun darauf an, den Weg zu bezeichnen, den die Theorie und Praxis einschlagen könnte, wenn sie das Problem: durch einen

Figur 3.



Mechanismus den Tag in eine Anzahl gleicher Theile — Stunden — mit Hilfe von der Sonne gemachten Zeichen, zu theilen, lösen wollte. Hierbei beschränken wir uns auf Schattenerscheinungen, gegenüber den Lichtanzeigen, die etwa von einem der Sonne ausgesetzten Spiegel gemacht werden könnten, und nehmen vorläufig an, die Erdaxe selbst sei der schattenwerfende Körper, die Ebene des Aequators aber die Projectionsfläche, auf welche der Schatten falle. Um die Verhältnisse direct so, wie sie die eigentliche Bewegung der Erde der Sonne gegenüber verlangt, beurtheilen zu können, wollen wir die Fig. 3 betrachten. In ihr bedeutet S die Sonne, der durch C und $C,$ laufende Curvenbogen die Erdbahn. Zur Zeit des Sommersolstitiums steht die Erde am

weitesten von der Sonne ab *) und sendet ausserdem diese letztere ihre Strahlen senkrecht auf die Bewohner des nördlichen Wendekreises der Erde. In der angeführten Figur ist diese Stellung der Erde mit ihrem Mittelpunkte in C angenommen, so dass, wenn wir die Ebene des Papiers als die Ekliptikebene ansehen, der als Ellipse in der Figur gezeichnete und durch E laufende Kreis EQ den Durchschnitt der Ekliptikebene mit der Erdkugel vorstellt. Der angenommenen Zeit gemäss muss nun die Erdaxe CP eine nach der Sonne zu geneigte Lage haben und in einer, auf der Ekliptik und zugleich durch S gelegten, Ebene SPC so liegen, dass der Winkel $SCP = ECP = 66\frac{1}{2}^0$ wird. Der zweite um C als Ellipse gezeichnete Kreis AQ, senkrecht auf CP stehend, ist demnach der Aequator, und beträgt der Winkel ACE $23\frac{1}{2}^0$.

Offenbar culminirt nun die Sonne einem Erdbewohner zur Zeit, wo bei der Umdrehung der Erde um ihre Axe — wenn wir vorläufig von der Progressivbewegung des Punktes C absehen — sein Meridian in die Lage PCS gelangt, und der Schatten, den die Erdaxe auf den Aequator wirft, dann mit der Linie Cs zusammenfällt. Halten wir die Axe CP einen Tag lang so fest, und lassen um sie die Erde in der Richtung des kleinen Pfeils gleichmässig rotiren, so ist klar, dass auch der Schatten auf dem Aequator wie auf einem Zifferblatte dem Pfeil entgegengesetzt gleichförmig fortrückt, um so in jeder Stunde einen Winkel von 15^0 zu beschreiben. Setzten wir in dieser Richtung auf den Aequator von je 15^0 zu 15^0 die 24 Stundenzahlen, so wäre eine Sonnenuhr in grösstem Maassstabe fertig.

Aber wir wissen, dass die Erde nicht still steht, sondern in derselben Richtung, wie sie sich um ihre Axe dreht, in der Ekliptik fortschreitet, und zwar so, dass hierbei die Axe stets sich selbst parallel bleibt. Nach einiger Zeit gelangt also die Erde nach $C_,$ und ist in dieser neuen Stellung $C_,P$ parallel CP, und somit auch der Aequator wieder parallel dem bei der Stellung C. Eine Ebene durch S und $C_,P$ gelegt, wird zwar nicht mehr senkrecht auf der Ekliptik, aber ohne Zweifel senkrecht auf dem Aequator stehen, und stellt $SC_,P$ diese Ebene vor, so wird für irgend einen Erdbewohner die Sonne wieder culminiren, wenn sein Meridian mit dieser Ebene coincidirt, d. h. die Stellung $A_,C_,P_,$ einnimmt. Denn die Verbindungslinie $C_,S$ schneidet die Ekliptik EQ in einem Punkte $E_,$ durch; eine Ebene durch $C_,P$ und $E_,$ gelegt, trifft demnach auf die Sonne und durchschneidet den Aequator $C_,AQ$ in einem Punkte $A_,$; mithin liegt auch der letztere Punkt

*) Später werden wir die Stellung der Erde gegen die Sonne zur Zeit des Sommersolstitiums genauer kennen lernen; für jetzt halten wir uns an das Gesagte.

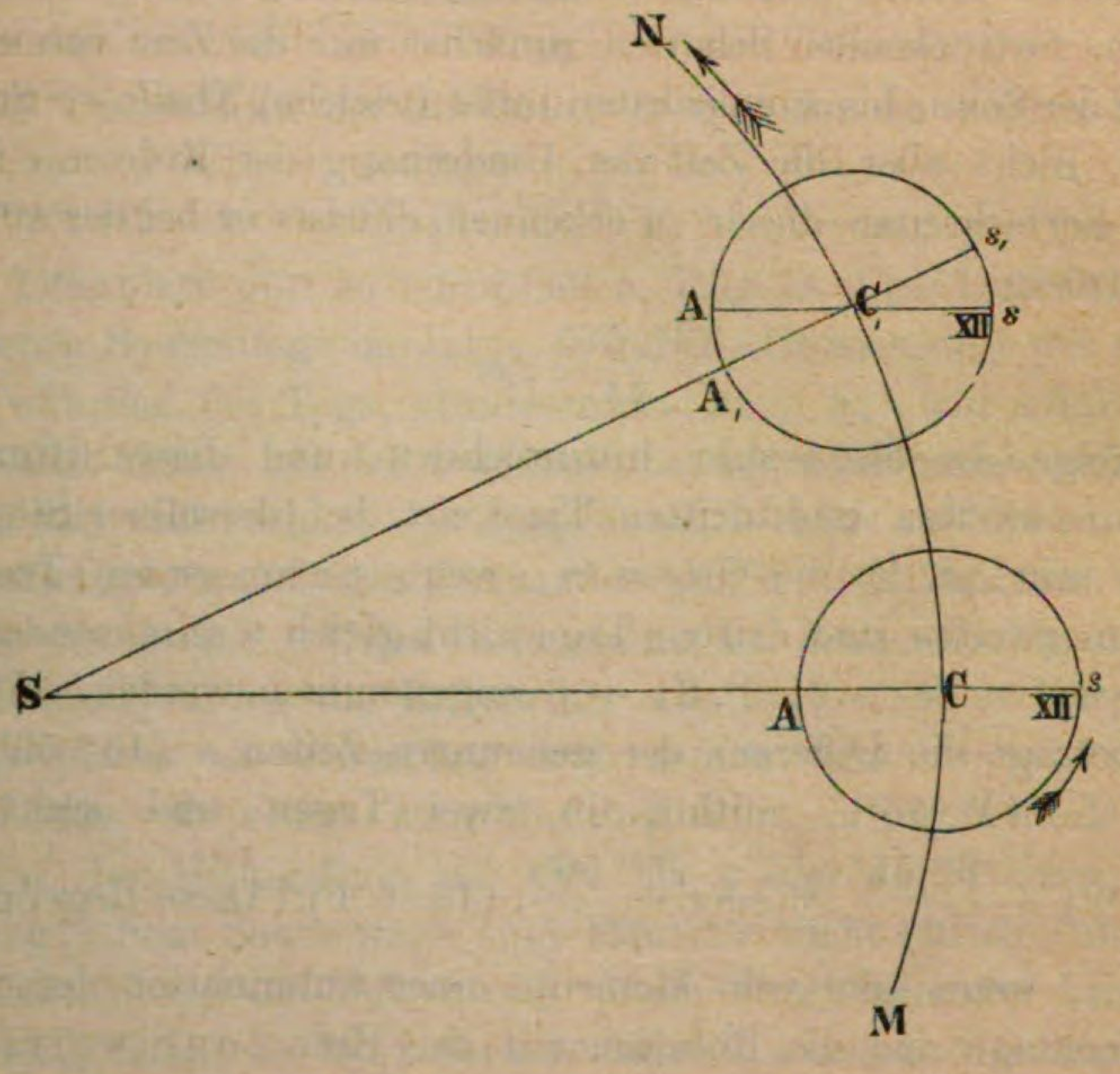
in der von der Sonne aus nach der Erdaxe gehenden Lichtebene, und der Meridian $P,A,$ enthält in seinem Durchschnitt $C,s,$ mit dem Aequator den neuen Schatten der Erdaxe. Nehmen wir an, die Erde habe von der Stellung in C bis zu der in $C,$ genau n Rotationen um ihre Axe vollbracht, so muss der Meridian des Beobachters, der bei der Anfangsstellung C mit PEA zusammenfallend angenommen wurde, in der Stellung $C,$ eine der Anfangsstellung genau parallele Lage PEA annehmen, wobei auch die Linie C,s genau Cs parallel zu liegen kommt. Während aber bei der Stellung C der Schatten auf Cs fiel, fällt er im Moment, wo der Meridian in der Stellung $C,$ die angegebene Lage PEA einnimmt, nicht auf C,s, sondern auf $C,s,$, d. h. aber mit anderen Worten nichts weiter, als dass der Meridian des Beobachters sich um den Winkel $AC,A, = sC,s,$ weiter drehen müsse, damit für ihn die Sonne wieder culminire. Es folgt hieraus mit Nothwendigkeit der wichtige Satz, dass die Zeit von n Rotationen der Erde um ihre Axe nicht gleich der von n Culminationen der Sonne ist, sondern dass letztere Zeit um eine gewisse Grösse τ, nämlich um die Zeit, welche die Erde nöthig hätte, um bei ihrer Rotation um die Axe den Winkel $sC,s,$ zu beschreiben länger ist.

Wir haben in unserer Figur am Centrum $C,$ noch einen zweiten Winkel, nämlich den Winkel $EC,E,$, der gleich dem Winkel $CSC,$ ist und wird dieser in der Ekliptik, dagegen $AC,A, = sC,s,$ im Aequator gemessen. Aus der Stellung des Aequators zur Ekliptik folgt, dass diese beiden Winkel $AC,A,$ und $EC,E,$ zwar nicht gleich sind, aber auch nicht beträchtlich von einander abweichen, dass sie genau gleich sein würden, wenn die Erdaxe senkrecht auf der Ekliptik stünde, d. h. Aequator und Ekliptik zusammenfielen.

Die Erdbahn ist bekanntermassen eine Ellipse und folgt hieraus weiter, dass die Erde in gleichen Zeiten nicht gleiche Winkel an der Sonne beschreibt, dass im Sommer zu n Rotationen um die Erdaxe ein kleinerer Winkel $CSC,$ als im Winter gehört. Die Ellipse ist jedoch so wenig von einem Kreise abweichend, dass wir für jetzt sie geradezu als einen solchen ansehen können. Thun wir dieses und lassen wir andererseits die Erdaxe senkrecht auf dieser Ebene der Kreisbahn stehen, so werden wir auch über den numerischen Werth des Winkels $CSC,$ und den ihm gleichen $EC,E, = AC,A, = sC,s,$ etwas Näheres erfahren. Stellt nämlich für diese Annahmen in Fig. 4 MN ein Stück der Erdbahn vor, so liegt in der Ebene derselben auch der Aequator der Erde und bei einer Projection auf diese Ebene würde die von der Sonne nach der Erdaxe gehende Lichtebene in der Stellung C als SC, in der Stellung $C,$ als $SC,$, ferner der Schatten der Erdaxe

beziehungsweise als Cs und $C_,s_,$ erscheinen. Die Erde müsste, wenn sie genau in 366 Tagen einmal um die Sonne liefe, in n Tagen einen Winkel $CSC_, = \frac{360}{366} \cdot n$ Grade beschreiben, und würde, wenn wir unter einem Tage die Zeit ihrer Rotation um die Erdaxe verstehen, in der zweiten Stellung der Meridian AC genau wieder der Lage AC der Anfangsstellung parallel sein. Rechnen wir aber die Zeit von einer Culmination der Sonne bis zur nächsten als einen Tag, und nennen diese Zeit einen Sonnentag, so folgt aus unserer Figur sofort, dass solcher Sonnentage nicht ganz n auf die zuerst angenommenen n Erd-

Figur 4.



rotationen gehen, dass die Erde um den n^{ten} Sonnentag voll zu machen, noch um den Winkel $AC_,A_, = C_,SC = \frac{360}{366}\, n$ sich weiter um ihre Axe drehen müsste, wozu sie eine Zeit

$$\tau = \frac{24 \cdot 60}{360} \cdot \frac{366}{360} \cdot n = 3{,}93 \cdot n$$

Minuten oder $n \cdot (3^m\ 56^s)$ gebraucht. Um so viel sind demnach n unserer Sonnentage bei einer Erde mit Kreisbahn und senkrecht auf der Ekliptik stehender Axe der Zeit nach länger als n Erdrotationen. Auf einen Tag alles gerechnet, ist demnach

1 Erdrotation $=$ 1 Sonnentag $-$ $3^m\ 56^s$

1 Sonnentag $=$ 1 Erdrotation $+$ $3^m\ 56^s$.

Die Anzeigen des Schattens auf dem Zifferblatte des Aequators werden daher nun wesentlich anders aufgefasst werden müssen wie früher, als wir die Erde ruhig in C stehen und sie blos um ihre Axe rotiren liessen. Bei dieser Annahme war die Zeit der Rotation um die Erdaxe und ein Sonnentag einerlei, und was noch weiter hinzugefügt werden muss, diese Gleichheit blieb bestehen, wir mochten die Erdaxe senkrecht oder schief zur Ekliptik annehmen. Lassen wir aber die Erde sich fortbewegen, so können wir uns die Sache zunächst, wie wir gethan haben, dadurch erleichtern, dass wir die Erdbahn als einen Kreis annehmen und ausserdem die Erdaxe senkrecht zur Ekliptik stellen. Theilt ein Bewohner dieser Erde das Zifferblatt des Aequators in 24 gleiche Theile, so kann er mit diesem Zifferblatte und dem auf demselben fortrückenden Schatten zunächst nur die Zeit von einer Culmination der Sonne bis zur nächsten in 24 (gleiche) Theile — Stunden — zerlegen, nicht aber die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe. Um das Fortschreiten dieser zu erkennen, müsste er bei der m^{ten} Stunde die Zeitgrösse

$$\frac{3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}}}{24}\,.\,m$$

zur Anzeige der Sonnenuhr hinzurechnen, und dieses Hinzurechnen dürfte am zweiten und dritten Tage etc. bei derselben Stunde nicht dasselbe sein, d. h. die Grösse m, wenn sie am ersten Tage 6 war, dürfte am zweiten und dritten Tage nicht gleich 6 sein, sondern müsste statt dessen $= 24 + 6,\ 2\,.\,24 + 6$ angenommen werden. Denn in n Tagen beträgt die Differenz der genannten Zeiten $n\,.\,(3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}})$ in zwei Tagen $2\,.\,(3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}})$, mithin in zwei Tagen und sechs Stunden $2\,.\,(3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}}) + \frac{3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}}}{24}\,.\,6$ oder $\frac{3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}}}{24}\,.\,(48 + 6)$. Diese Regel gilt jedoch nur dann, wenn man vom Momente einer Culmination der Sonne aus die Sonnentage und die Rotationszeit der Erde continuirlich fortzählend bestimmen will. Wollte man aber bei jeder folgenden Culmination der Sonne wieder neu anfangen zu zählen, so würde die Zahl m nur Werthe von 0 bis 24 bekommen.

Kehren wir nun aber zur wahren Erde mit elliptischer Bahn und schiefer Axe zurück, so erkennen wir, dass ein Bewohner dieser Erde mit einem Zifferblatte des Aequators, wenn er dieses in 24 gleiche Theile theilte, weder die Rotationszeit der Erde, noch die Zeit von einer Culmination zur andern genau in 24 gleiche Abschnitte zerlegte, und dass insbesondere die einzelnen Sonnentage, die von der Sonnenuhr als gleiche Abschnitte der Zeit angegeben werden, dies nicht sind. Denn ein Sonnentag dieser Erde ist nicht immer gleich

$$\text{Rotationszeit} + 3^{\text{m}}\ 56^{\text{s}},$$

sondern dieses plus bleibt zwar stets ein plus, aber es ist im Laufe des Jahrs, und strenge genommen im Laufe des Tags, nicht immer dasselbe, nämlich desshalb nicht, weil erstens in unserer Fig. 3 der Winkel $AC_{,}A_{,}$ nicht genau gleich $EC_{,}E_{,}$ ist, und weil zweitens der Winkel $EC_{,}E_{,} = C_{,}SC$ nicht immer denselben Werth besitzt. Betrüge z. B. zu einer gewissen Zeit dieses plus $2^m\ 30^s$, zu einer anderen Zeit $4^m\ 0^s$, so wären die von der Sonnenuhr im ersteren Falle abgemessenen Stunden gleich

$$\frac{\text{Rotationszeit} + 2^m\ 30^s}{24}$$

im letzteren gleich

$$\frac{\text{Rotationszeit} + 4^m\ 0^s}{24}$$

mithin der Unterschied der absoluten Zeitgrössen der beiden Stunden

$$\frac{1^m\ 30^s}{24} = 3{,}^s7.$$

Ein Zifferblatt nun so einzutheilen, dass es diese Unterschiede der verschiedenen Sonnentage im Jahre, ja gar die Unterschiede der einzelnen Stunden während des Tags, abzulesen gestattet, ist nicht möglich; man vernachlässigt daher bei der Construktion der Sonnenuhren diese Verschiedenheiten und rechnet die Zeitgrössen, welche zwischen zwei gleichen Schattenanzeigen liegen, einander gleich, während sie es streng genommen nicht sind. Unser Endresultat ist demnach folgendes:

„Betrachten wir die Erdaxe als schattenwerfenden Körper, den „Aequator als Zifferblatt und theilen letzteres in 24 gleiche „Theile, so nennt man die Zeit vom Auftreten des Schattens „auf der Mittagslinie der Uhr bis wieder dahin einen Sonnen- „tag; diese Sonnentage sind einander nicht gleich, und da die „Eintheilung des Zifferblattes diesen Ungleichheiten keine Rech- „nung trägt, so folgt daraus, dass die absolute Messung der Zeit „nach einer solchen Uhr nur eine theilweise genaue ist.“

Noch dürfte der Beweis zu liefern sein, dass jeder Sonnentag grösser ist als die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe. Um ihn zu führen, sehe man sich die Figur 3 wieder an. Dreht sich die Erde in der Richtung des grossen Pfeils um die Sonne, so laufen auf der Ebene EQ und AQ die Durchschnittpunkte $E_{,}$ und $A_{,}$ im Sinne des kleinen Pfeils herum, ohne dass ein Stillstand oder ein Rücklauf dieser Durchschnittspunkte der Lichtebene mit der Ekliptik und dem Aequator möglich ist. Daraus folgt, dass der Meridian des Beobachters nach einem Zusammenfallen mit irgend zwei zusammengehörenden Punkten E_n und A_n bis zum Zusammenfallen mit den zusammengehörigen Punkten $E_{n+1}A_{n+1}$ am folgenden Tage stets wieder den kleinen Winkel $A_nC_{,}A_{n+1}$

zurückzulegen hat, d. h. aber nichts weiter, als dass die Zeit der nächsten Culmination etwas ferner liegt, als die Zeit der Erreichung der Parallelstellung SCE_nA_n.

§. 5. Nach diesen Betrachtungen gehen wir einen Schritt weiter und beantworten die Frage: Wie müssten auf einer beliebigen, durch's Centrum der Erde gehenden Ebene die 24 Schattenstriche gezogen werden, wenn auf dieser Ebene die Zeit abgelesen werden sollte? Denn voraussichtlich werden doch diese nicht in gleichen Abständen von 15 zu 15 Grad, wie auf dem Aequator, gezogen werden dürfen. Um die Frage zu beantworten, wollen wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grund legen; die xz Ebene sei Fig. 3, unsere Ebene SCP, die positive z Axe die Erdaxe CP, die positive x Axe die mit dem Schatten Cs zusammenfallende Verlängerung von SC; die xy Ebene der Aequator und die positive y Axe eine vom Punkte C nach der Seite hin, nach der sich der Schatten bei der Umdrehung der Erde verschiebt, verlaufende Gerade. Dies vorausgesetzt, ist die Gleichung der schattenwerfenden Ebene SCP

$$y = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und die Gleichung einer nach einem Schattentheilstriche des Aequators verlaufenden Meridianebene

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wenn unter ϑ ein Winkel der xy Ebene von XII Uhr Mittags an nach Abend hingerechnet verstanden wird. Die Gleichung einer durch C laufenden beliebigen Ebene ist aber

$$Ax + By + Cz = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

und wird unsere Aufgabe gelöst sein, wenn wir einmal die Ebene (2) mit der Ebene (3), ebenso die Ebene (1) mit (3) sich durchschneidend denken und den von diesen beiden Durchschnittslinien gebildeten Winkel als den gesuchten gefunden haben. Die Gleichungen der beiden Geraden, die als Durchschnitte von (1) und (3), ebenso von (2) und (3) entstehen, sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} y &= o \\ Ax + By + Cz &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$\left.\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \vartheta \\ Ax + By + Cz &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Ursprung geht oder die Gleichung (3) lässt sich in anderer Form auch geben, als

$$z = ax + by \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

worin a die tang eines Winkels α bedeutet, den der Durchschnitt der Ebene durch die xz Ebene mit der x Axe und b die tang eines Win-

kels β bezeichnet, den der Durchschnitt der Ebene durch die yz Ebene mit der y Axe bildet. Schreiben wir anstatt tang ϑ ein a', so sind die Gleichungen der beiden Geraden (4) und (5) auch

$$\left.\begin{aligned} y &= o \\ z &= ax + by \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und

$$\left.\begin{aligned} y &= a'x \\ z &= ax + by \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

oder, wenn man statt dieser Gleichungen nur solche zwischen y und z, sowie x und z verlangt, auch

$$\left.\begin{aligned} y &= o \,.\, z \\ x &= \frac{1}{a} \,.\, z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{a'}{a'b + a} \,.\, z \\ x &= \frac{1}{a'b + a} \,.\, z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

als Gleichungen für die beiden Geraden, die den gesuchten Winkel miteinander bilden, den wir nunmehr mit τ bezeichnen wollen. Bekanntlich ist aber, wenn die Gleichungen zweier Geraden in der Form (9) und (10) gegeben sind, und man die Coefficienten am z mit $p_{\prime}$ und $q_{\prime}$ beziehungsweise $p_{\prime\prime}$ und $q_{\prime\prime}$ bezeichnet, der Cosinus des von den Geraden gebildeten Winkels

$$\cos\tau = \frac{1 + p_{\prime}p_{\prime\prime} + q_{\prime}q_{\prime\prime}}{\sqrt{(1 + p_{\prime}^2 + q_{\prime}^2)(1 + p_{\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime}^2)}}.$$

Es ist aber

$$p_{\prime} = 0$$

$$p_{\prime\prime} = \frac{a'}{a'b + a}$$

$$q_{\prime} = \frac{1}{a}$$

$$q_{\prime\prime} = \frac{1}{a'b + a},$$

mithin

$$\cos\tau = \frac{1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a'b + a}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left[1 + \left(\frac{a'}{a'b + a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'b + a}\right)^2\right]}} \quad \ldots\ldots \quad (A),$$

welche Gleichung die Lösung der Aufgabe, eine Sonnenuhr auf einem beliebigen, durch's Centrum der Erde laufenden, ebenen Zifferblatte zu construiren, enthält. Wir wollen von diesen unzählig vielen Ebenen nur eine Gruppe berücksichtigen, nämlich diejenigen Ebenen, die zu-

gleich auch durch die y Axe gehen. Demgemäss muss unser b in obigen Gleichungen gleich Null gesetzt werden, wonach die Gleichung (A) übergeht in:

$$\cos \tau = \frac{1 + \frac{1}{a^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{a'^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + a'^2 + 1}},$$

oder wenn man anstatt des $\cos \tau$ lieber $\operatorname{tang} \tau$ einführen wollte,

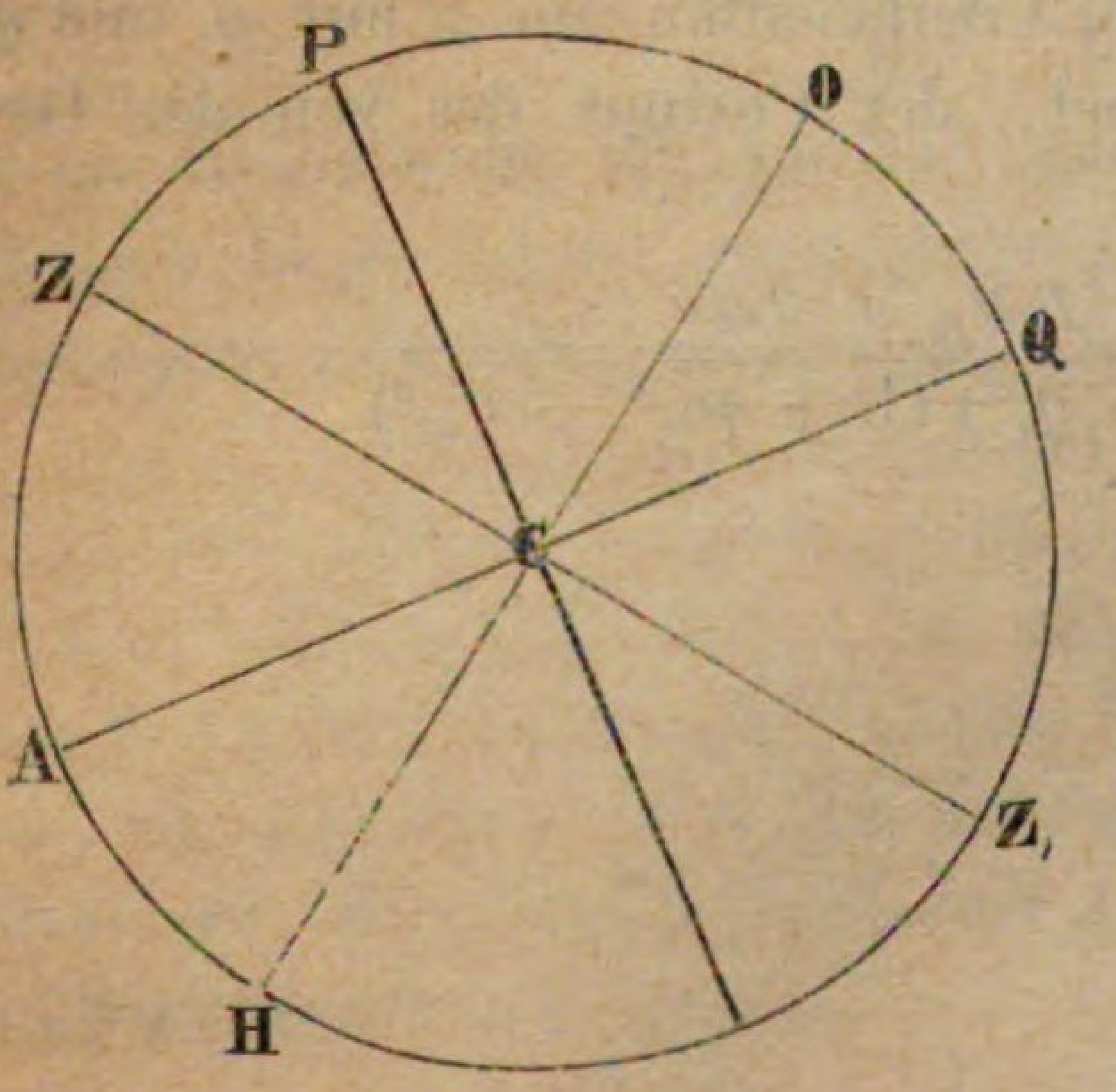
$$\operatorname{tang} \tau = \sqrt{\frac{1 - \cos \tau^2}{\cos \tau^2}} = a' \sqrt{\frac{1}{a^2 + 1}}.$$

Erinnern wir uns aber, dass $a' = \operatorname{tang}. \vartheta$ und dass a die Tangente eines Winkels α bedeutet, den der Durchschnitt des Zifferblatts durch die xz Ebene und die x Axe miteinander bilden, so ist auch

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \vartheta \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha^2 + 1}}$$

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \vartheta \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A_*).$$

Figur 5.



Stellt in Fig. 5 die Ebene des Papiers die xz Ebene, PC die Erdaxe, AQ den Aequator, HO den Horizont des Beobachters vor, so ist PC die positive z, CQ die positive x Axe und eine in C zu denkende Senkrechte die y Axe. Nehmen wir an, es fiele das Zifferblatt mit HO zusammen, so wäre $OCQ = \alpha$ und Winkel ZCA gleich der geographischen Breite. Bezeichnen wir diese mit φ, so ist

$$\alpha = 90^0 - \varphi$$

und unsere Gleichung (A_*) verwandelt sich in

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \vartheta \sin \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I).$$

Lassen wir das Zifferblatt anstatt mit HO mit CZ zusammenfallen, so ist

$$\alpha = 90^0 + (90^0 - \varphi) = 180 - \varphi,$$

oder auch, wenn wir O mit $Z_{,}$ coincidiren liessen

$$\alpha = -\varphi.$$

Für diesen Fall geht mithin die Gleichung (A_*) über in

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \vartheta \cos \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II).$$

Lassen wir O mit Q zusammenfallen, so wird $\alpha = 0$, mithin geht Gleichung (A_*) über in

$$\tang \tau = \tang \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}).$$

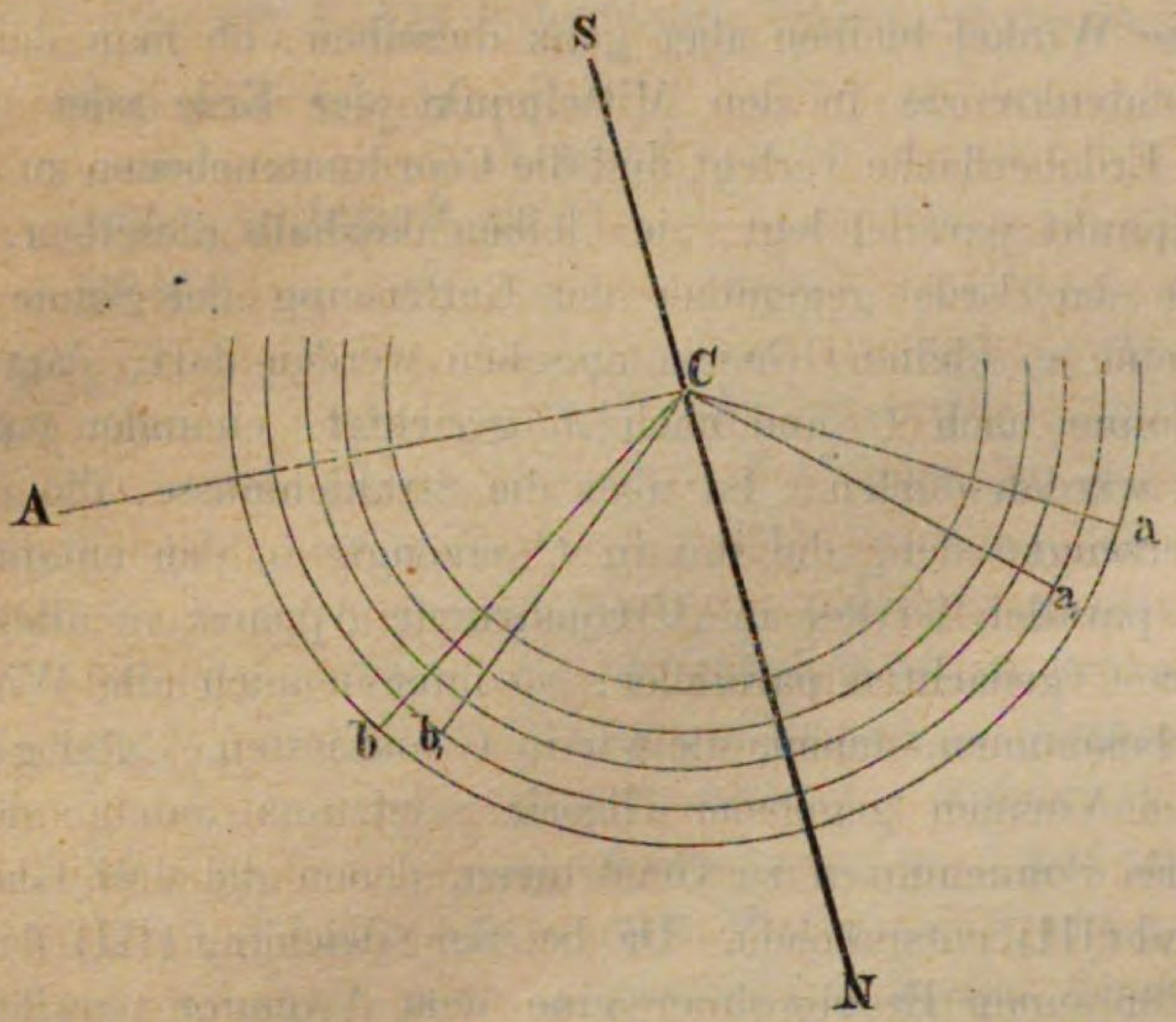
Es ist nun leicht einzusehen, dass unsere ganzen Betrachtungen auch dann ihre Giltigkeit behalten, wenn wir uns auf die Oberfläche der Erde versetzen, als Standpunkt einen beliebigen Punkt M mit der geographischen Breite gleich φ wählen, und auf diesem Punkte eine Sonnenuhr so construiren, dass der schattenwerfende Stift parallel zur Erdaxe und das Zifferblatt parallel HO liegt, mithin eine horizontale Ebene bildet, oder wenn wir das Zifferblatt vertical und zugleich so stellen, dass es senkrecht auf dem Meridian, also genau von Ost nach West liegt; oder wenn wir, wie anfangs, eine Ebene parallel dem Aequator AQ als Zifferblatt construiren. Für diese drei Fälle können die Gleichungen (I), (II) und (III) unmittelbar benutzt werden. Denn es handelt sich hier nur um die Winkel τ; diese Winkel bleiben aber ganz dieselben, ob man den Anfang des Coordinatenkreuzes in den Mittelpunkt der Erde oder auf einen Punkt der Erdoberfläche verlegt und die Coordinatenebenen zu denen für den Mittelpunkt parallel legt; sie bleiben desshalb dieselben, weil der Halbmesser der Erde gegenüber der Entfernung der Sonne von der Erde als eine so kleine Grösse angesehen werden darf, dass Strahlen von der Sonne nach C und nach M gerichtet, einander parallel angenommen werden dürfen. Ist aber die Strahlenmasse, die in M den Schatten erzeugt, der, die ihn in C erzeugte in den entsprechenden Elementen parallel, ist der in M construirte Apparat in allen Theilen ein dem in C gedachten paralleler, so müssen auch alle Winkel, die wir in M bekommen, denen, die wir in C auffassten, völlig gleich sein.

Die im Vorigen gegebene Theorie setzt uns nun in den Stand, eine der drei Sonnenuhren zu construiren, denen die drei Gleichungen (I), (II) und (III) entsprechen. Da bei der Gleichung (III) der Aequator oder für einen Erdbewohner eine dem Aequator parallele, d. h. senkrecht zur Erdaxe construirte Ebene das Zifferblatt bildet, so pflegt man eine solche Uhr auch „Aequatorialuhr“ zu nennen. Ebenso wird die der Gleichung (I) und (II) entsprechende Sonnenuhr beziehungsweise eine „Horizontal“- und eine „Verticaluhr“ genannt. Bei der Construktion aller drei Arten sind zwei Operationen unerlässlich, nämlich erstens: das Bestimmen der Meridianebene und zweitens: die Errichtung einer in der Meridianebene zur Weltaxe parallelen Geraden, als schattenwerfenden Körper. Um die erste Aufgabe praktisch und in einer für die jetzigen Zwecke genügenden Weise zu lösen, kann man folgenden Weg einschlagen. Auf solider Unterlage construire man mittelst einer Libelle

eine horizontale Ebene, und ziehe hierauf von einem Punkte aus ein System concentrischer Kreise, etwa so wie die Fig. 6 zeigt. Im gemeinschaftlichen Mittelpunkte C dieser Kreise errichte man weiter einen verticalen dünnen Stab, dessen Schattenspitze zu einer gewissen Zeit Vormittags gerade einen der Kreise, z. B. in a und Nachmittags denselben Kreis etwa in b berührt, der zu einer andern Zeit Vormittags den nächsten Kreis etwa bei a_1, Nachmittags bei b_1 etc. mit der Schattenspitze erreicht und messe die Winkel, die Ca, Cb; Ca_1, Cb_1 etc. mit einer beliebig angenommenen Geraden CA bilden; sind diese Winkel α, β; α_1, β_1; α_2, β_2 etc., so liegt die Meridianlinie so, dass sie einen Winkel a mit CA bildet, gleich

$$a = \frac{1}{n}\left\{\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + \frac{\alpha_2+\beta_2}{2} + \cdots \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right\}.$$

Figur 6.



In unserer Figur ist angenommen:

$$\alpha = 150^0\ 0' \quad \beta = 37^0\ 30'$$
$$\alpha_1 = 141^0\ 0' \quad \beta_1 = 45^0\ 15'$$

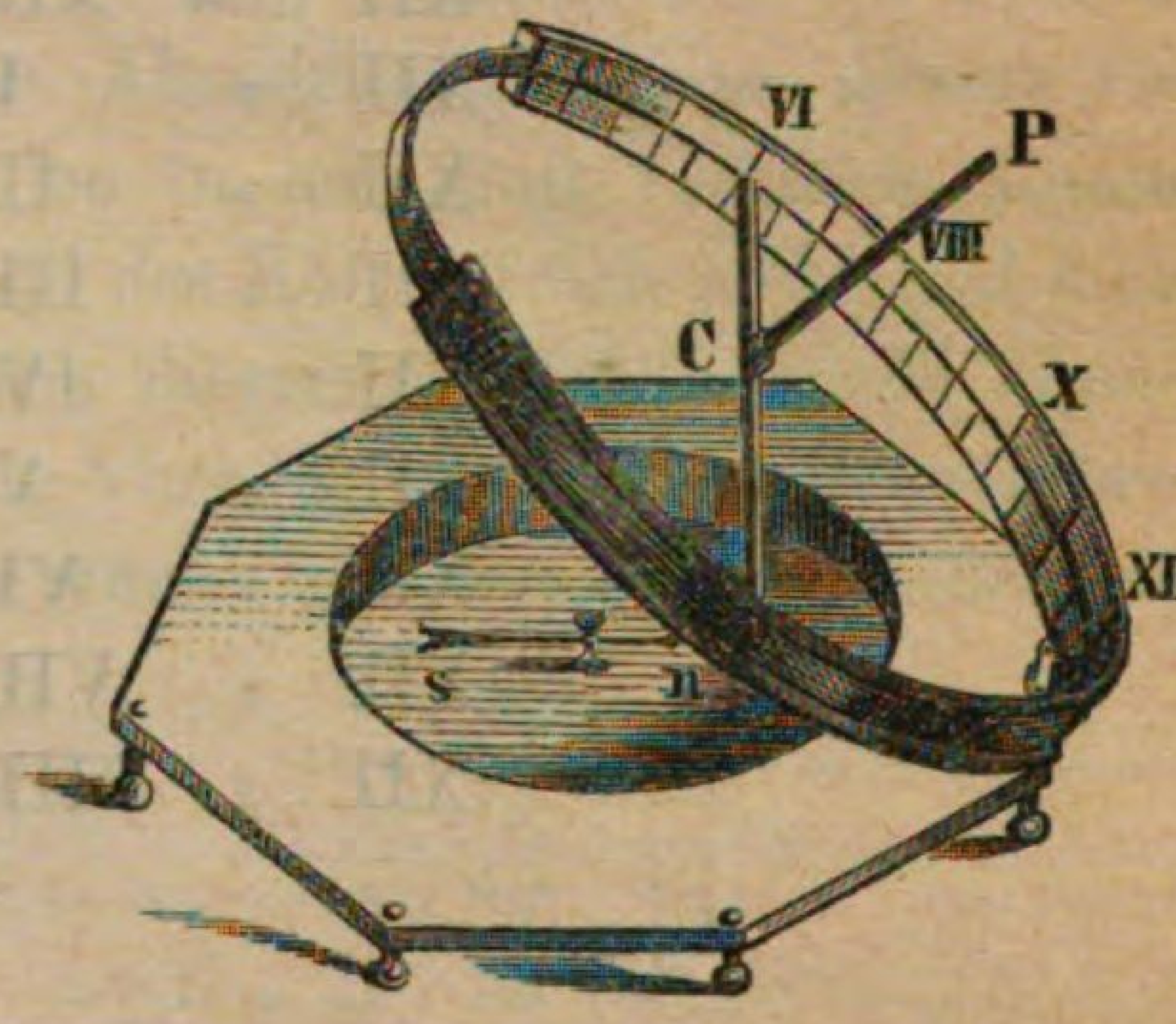
und

$$a = \frac{1}{2}(93^0\ 45' + 93^0 7') = 93^0\ 26',$$

wonach der Meridian in die Lage NS zu liegen kommt. Ist diese Linie gefunden, so wird man in ihr eine Ebene zu construiren haben, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, und in der ersteren eine Gerade CP so ziehen müssen, dass der Winkel, den diese Gerade mit NC in C bildet, gleich der geographischen Breite wird, und somit diese Gerade

in die Lage der Erdaxe gelangt. Errichtet man nun drittens in C oder einem andern Punkt senkrecht zur eben erhaltenen, parallel zur Erdaxe liegenden, Geraden eine senkrechte Ebene, so liegt diese dann parallel zum Aequator. Werden in dieser Aequatorealebene die Schattenlinien markirt, so, dass die Stunde XII Mittags in die Linie zu liegen kommt, in der die Aequatorealebene sich mit der in CN errichteten Verticalebene des Meridians schneidet, und von hier aus nach Osten hin die Stunden I, II etc. und nach Westen hin die Stunden XI, X etc. immer unter einem Winkel von 15 Graden aufeinander folgen, so ist die Sonnenuhr als Aequatorealuhr fertig, und würde der Hauptsache nach aussehen wie die in Fig. 7 nach einem vorhandenen Apparate entworfene Zeichnung. Die Stellung des Apparates in den Meridian geschieht bei ihm mit Hilfe einer kleinen Magnetnadel *ns*. Der schattenwerfende Stift ist CP und fällt sein Schatten anstatt auf eine Ebene auf die innere Fläche eines dem Aequator parallel laufenden Ringes, der von XII an nach beiden Seiten hin in gleiche Theile getheilt ist. Die richtige Stellung dieses Ringes wird durch eine unter der Fussplatte der Uhr angebrachte Hebeleinrichtung ermöglicht.

Figur 7.



Im gewöhnlichen Handel trifft man oft ganz einfach construirte Sonnenuhren, für welche unsere Gleichungen (I) und (II) passen, da sie zugleich Horizontal- und Vertical-Sonnenuhren sind. Die Fig. 8 ist perspectivisch nach einem solchen Instrumentchen entworfen worden. Der schattenwerfende Körper ist ein von C nach C_1 gespannter Faden, während die Meridianstellung einfach wieder durch eine kleine Magnetnadel erreicht wird und die Schattenlinien von C aus auf einem horizontalen und verticalen Bretchen gemäss der Gleichung (I) und (II) gezogen sind. Für die Winkel der Schattenlinien mit der Linie von C nach XII oder der Mittagslinie gilt demnach die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \tau_n = \operatorname{tang} (n \cdot 15^0) \cdot \sin \varphi.$$

Für Marburg ist $\varphi = 50^0\ 48'$, mithin $\log \sin \varphi = 9{,}88927$, und berechnen sich hiernach die Winkel τ_n oder die Winkel zwischen den Stundenlinien nach

XII	und	XII	zu	$0^0\ 0'$
XII	»	I	»	$11^0\ 44'$
XII	»	II	»	$24^0\ 6'$

XII	und	III	zu	37° 46′
XII	»	IV	»	53° 19′
XII	»	V	»	70° 55′
XII	»	VI	»	90° 0′
XII	»	VII	»	109° 5′
XII	»	VIII	»	126° 41′.

Es sind dies die Stunden von XII bis VIII Uhr Nachmittags; für die Stunden von XII bis IV Uhr Vormittags findet man ganz dieselben Winkel, so dass z. B. der Winkel 37° 46′ auch der Stunde IX Vormittags entspricht.

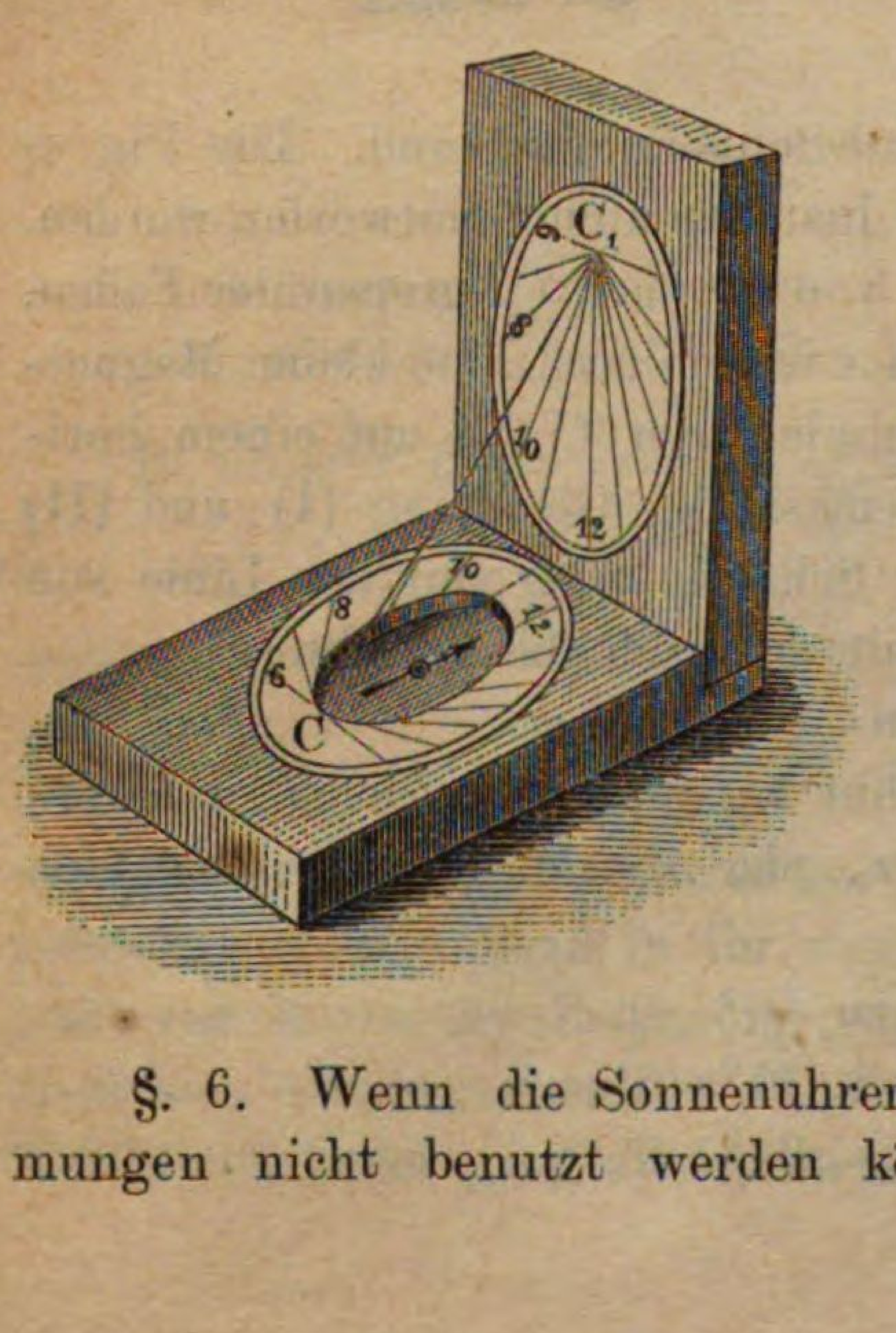
Für die Verticaluhr würden die Schattenlinien mit der Linie nach XII Winkel bilden, die nach der Gleichung:

$$\tang \tau_n = \tang (n . 15) \cos \varphi$$

zu berechnen sein, worin der constante Logarithmus von $\cos \varphi$ = 9,80074. Sie sind demnach für Marburg zwischen

XII	und	XII	=	0° 0′
XII	»	I	=	9° 37′
XII	»	II	=	20° 2′
XII	»	III	=	32° 18′
XII	»	IV	=	46° 16′
XII	»	V	=	67° 2′
XII	»	VI	=	90° 0′
XII	»	VII	=	112° 58′
XII	»	VIII	=	133° 44′.

Figur. 8.



Nach diesen Erörterungen wird der Leser im Stande sein, den Zusammenhang der Theorie mit der Praxis zu erkennen, und insbesondere auch im Stande sein, eine der drei Arten von Uhren selbst zu construiren. Es versteht sich von selbst, dass mit der zunehmenden Grösse des Maassstabes auch die Genauigkeit der Zeitbestimmung wächst. Wollte man nicht blos für ganze, sondern auch Halbe- und Viertelstunden die Schattenwinkel berechnen, so müsste man obige Gleichungen auch für die Halben- und Viertelwerthe von n ausrechnen.

§. 6. Wenn die Sonnenuhren zu eigentlich genauen Zeitbestimmungen nicht benutzt werden können, so sind sie immerhin von

Interesse, und haben wir im vorigen §, insbesondere auch mit Rücksicht auf das Folgende, der Darstellung ihrer Einrichtung möglichst Rechnung getragen.

Wir gehen nun zu einer kurzen Betrachtung derjenigen Apparate über, die als Uhren im engeren Sinne angesehen werden müssen, nämlich der „Pendeluhren" und der „Chronometer".

Was die ersteren anlangt, so sind dieselben von Huyghens erfunden und erhielten um's Jahr 1658 eine Form, die ihnen bis heute im Wesentlichen geblieben ist. Die Kraft, welche bei diesen merkwürdigen Apparaten die Hauptrolle spielt, ist die Anziehungskraft der Erde, die so wirkt, dass ein frei fallender Körper von beliebigem specifischem Gewichte und beliebiger Form, wenn er im luftleeren Raume sich bewegen könnte, mit gleichmässiger Beschleunigung sich bewegt, um hierbei in der ersten Sekunde in runder Zahl 15, in zwei Sekunden 4.15, in drei Sekunden 9.15, in n Sekunden $n^2.15$ Fuss zu durcheilen während sehr wesentliche Abweichungen von diesem Gesetze bemerkt werden, wenn das Fallen in mit Luft erfülltem Raume stattfindet und das specifische Gewicht des Körpers sich mehr und mehr dem der Luft nähert. Sehen wir von diesem Luftwiderstande einmal ganz ab — und in der That sind die Verhältnisse bei den Pendeluhren so, dass wir dies thun dürfen — so würde also ein frei fallendes Gewicht obiges Gesetz befolgen und

in der	ersten	Sekunde	 15	Fuss
»	zweiten	»	 45	»
»	dritten	»	 75	»
»	*n*ten	»	$(n^2 - 1) . 15$	»

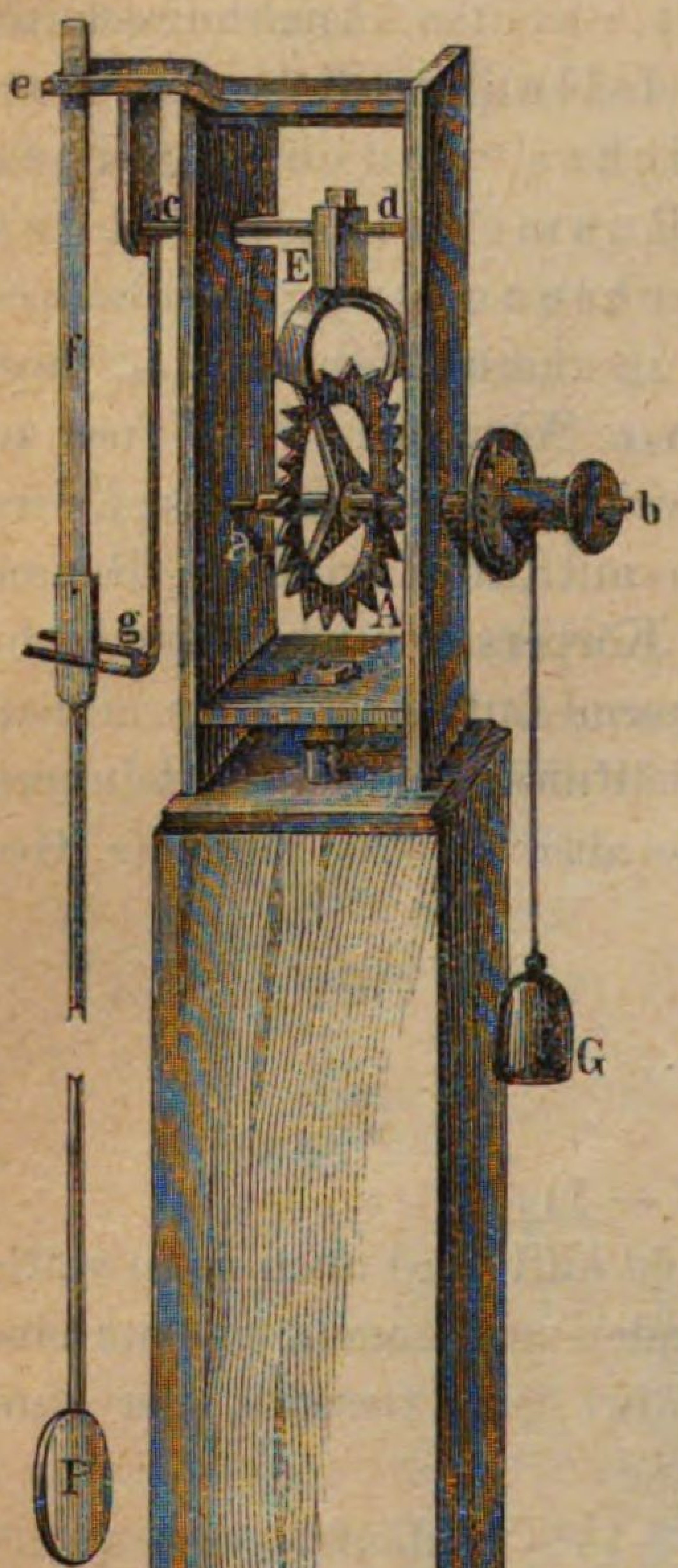
durchlaufen. Dieser immer rascher werdende Fall wird auch dann stattfinden, wenn wir das Gewicht an einem Faden aufhängen, der um eine bewegliche Rolle mit fester Axe herumgeführt ist. Gesetzt, der Umfang derselben betrüge 1 Fuss, so würde sie

in der	ersten	Sekunde	. . . 15	Umläufe
»	zweiten	»	. . . 45	»
»	*n*ten	»	$(n^2 - 1)$	»

vollenden, und würde ein an der Axe sitzender Zeiger, der vor einem Zifferblatte rotirte, so schnell sich drehen, dass das Auge ihn in einem bestimmten Momente nicht zu fassen vermöchte. Soll diese Bewegung des Zeigers langsamer und zugleich gleichförmig werden, so muss nothwendig dem Zuge der Schwere in irgend einer Weise begegnet werden. Wiewohl nun in dieser Beziehung manche Wege offen stehen, so wird hier doch blos ein Mittel Berücksichtigung finden, nämlich die Anbringung eines Pendels und die Verbindung dieses Pendels mit obiger

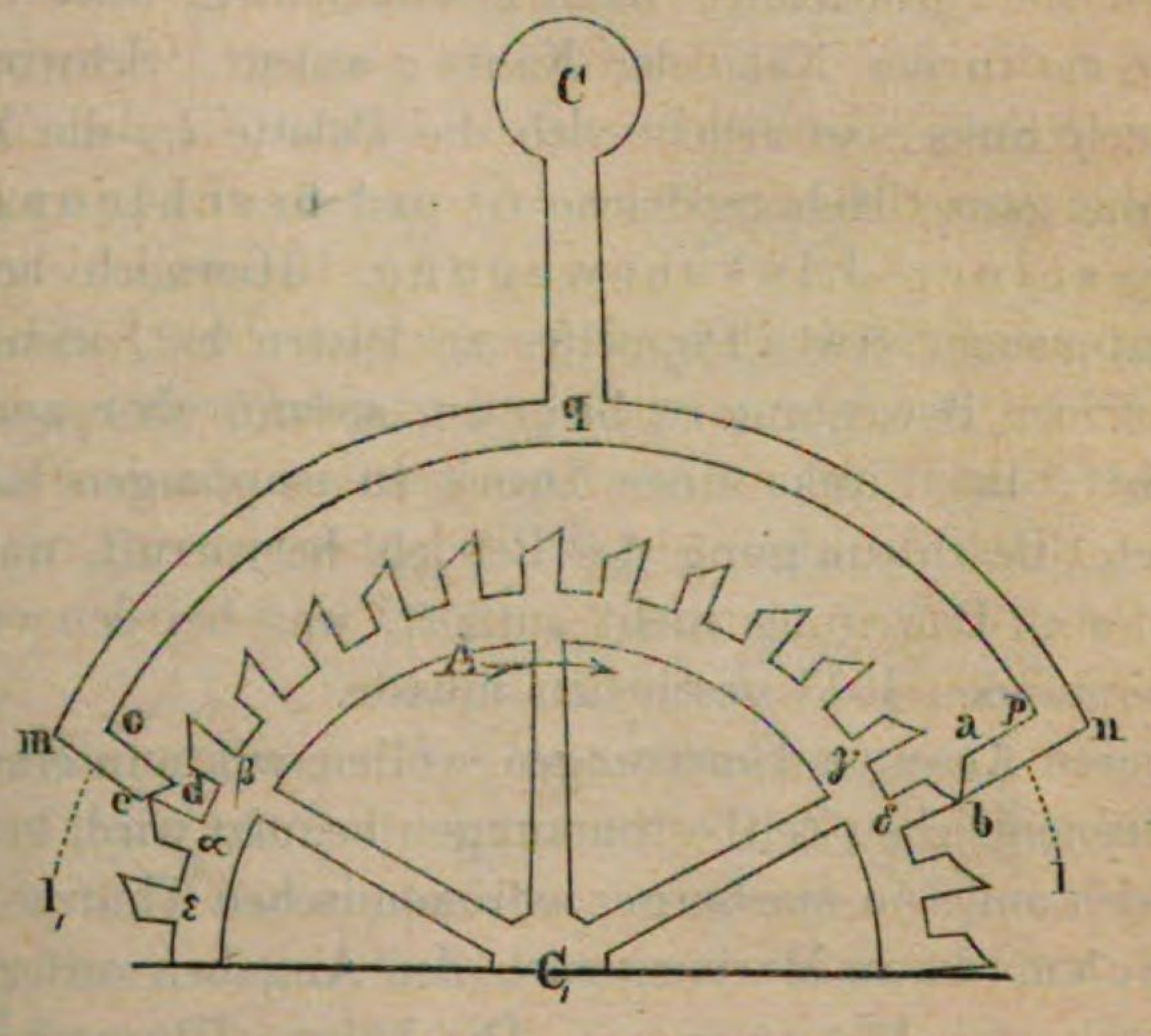
Rolle und einem Rade durch einen Mechanismus, den man das „Echappement“ oder die „Hemmung“ zu nennen pflegt, während das Pendel selbst der „Regulator“ genannt wird. Wir hätten demnach vier Theile, aus denen unser Apparat zusammengesetzt ist: das Rad, das Gewicht, den Regulator und das Echappement, deren gegenseitige Bewegungen die Fig. 9 zu versinnlichen bestimmt ist. Das Rad *A* dreht sich um die Axe *ab* und ist mit einer Anzahl Zähne versehen, die mit dem Echappement und dem Pendel zusammen die Bewegung des Gewichts *G* beeinflussen, welche dabei eine gleichförmige, und zwar sprung- oder ruckweis gleichförmige wird. Das bei *e* an einer Stahlfeder *f* aufgehangene Pendel bewegt sich so, dass es bei jedem Hin- und Hergang eine Gabel *g* mitnimmt, die am hintern Ende fest an einer verticalen Stange befestigt ist und mit dieser um die Axe *cd* sich dreht. Mit dieser Axe *cd* ist ferner der Doppelhacken *E* fest verbunden, dessen vorderes hackenförmiges Ende sich von den Zähnen abhebt, wenn das Pendel nach vorn schwingt, während das hintere Ende dann gerade an einem Zahn anstösst und so die Bewegung des Rades hemmt. Beim Zurückschwingen des Pendels findet das Umgekehrte statt: der hintere Hacken nebt sich von dem Zahn an den er eben anstiess ab, das Rad rückt um die Breite eines Zahnes oder einer Zahnlücke vor, und stösst bald darauf wieder an den sich ihm zuneigenden vorderen Hacken an, um jetzt wieder einen kurzen Moment aufgehalten zu werden u. s. w. u. s. w. Das Tempo des momentanen Fortrückens wird durch die Schwingungsdauer des Pendels bestimmt und rechtfertigt sich daher für's Pendel der Name Regulator; die eigentliche Hemmung aber wird durch den Doppelhacken *E*, den man auch „Anker“ zu nennen pflegt, bewirkt, und heisst diese Art der Hemmung desshalb eine „Ankerhemmung“. Um diesen wichtigen Theil der Uhr, also das Echappement, in einer bestimmten Form genauer kennen zu lernen, wollen wir unsere Fig. 10 betrachten, die

Figur 9.



wir Prechtl's „Technologischer Encyclopädie" entnahmen. Sie stellt die, von Graham erfundene, „ruhende Ankerhemmung" in ihrer ursprünglichen Gestalt dar, und geben wir die Erläuterung nach dem in dem genannten Werke enthaltenen Texte. An der „Ankerwelle" C die zur Welle $C_,$ des „Steigrades" („Sperrrades") A parallel gestellt ist, sitzt der „Anker" *bqc*, dessen Enden bei *m* und *n* umgebogen sind, um die sogenannten „Paletten" *mcdo* und *nbap* zu bilden, deren Flächen *ab* und *cd* man die „Hebungsflächen" des Ankers zu nennen pflegt. Das Steigrad A hat 30 Zähne von eigenthümlicher Form, deren Vorderflächen sich nach der vom Pfeile angegebenen Richtung der Bewegung etwas hinneigen, und deren nach rückwärts abfallende, krummlinige Begrenzung insofern von Wesenheit

Figur 10.



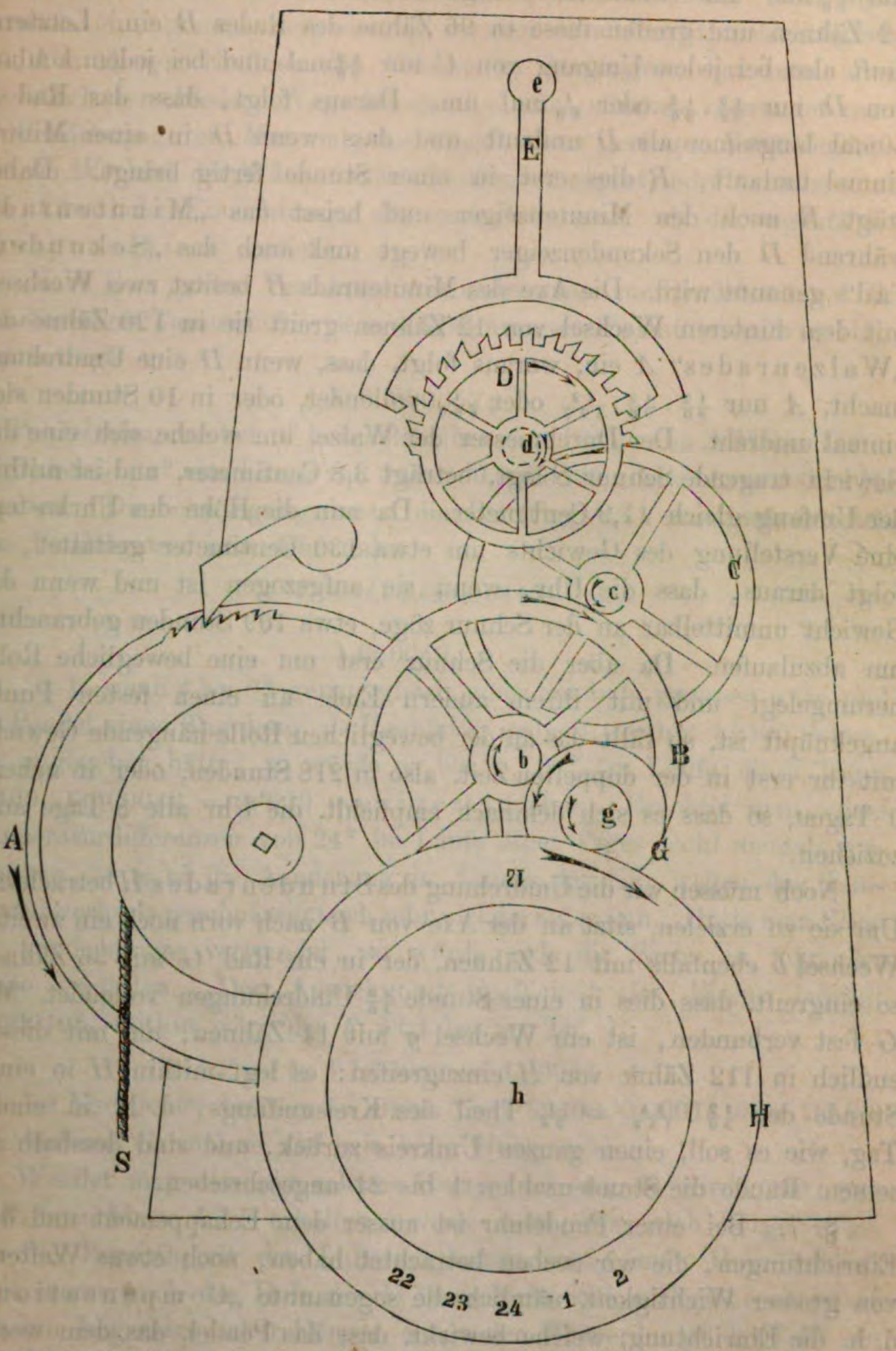
ist, als sie bei einer grösseren Zahnbreite den Eintritt der Paletten in die Zahnschnitte möglich macht. Das Spiel der Hemmung ist nun folgendes. Ist in der Figur das Pendel und mit ihm der Anker in der Ruhelage, so stehen beide Paletten l und $l_,$ in den Zähnen des Steigrades, wobei, wenn das Steigrad von dem Bewegungsapparat (Gewicht) einen Zug erleidet, einer der Zähne gegen die ihm im Wege stehende Palette drückt. Sei dieser der Zahn α, welcher mit der Palette $l_,$ in Berührung ist, so wird seine Spitze in der Mitte der Hebungsfläche *cd* stehen. Die andere Palette l wird zwischen den Zähnen γ und δ ruhen, wobei ihre untere Kante b die Höhlung des Zahnes δ fast berührt, während γ von a noch etwas weniger als eine halbe Zahnbreite entfernt ist. Wird nun das Pendel nach links elongirt, so gleitet

die Spitze des Zahns α auf der Hebungsfläche *cd* gegen *d* hin und ist im Begriffe dieselbe zu verlassen, wenn die Kante *d* in den durch die äusseren Zahnspitzen des Rades repräsentirten Kreis gelangt. Dabei rückt aber auch der Zahn δ weiter, gestattet sonach der Palette *l* den ungehinderten Eintritt in den Zahnschnitt zwischen γ und δ, und nähert sich hierbei die Zahnspitze von γ mehr und mehr der Fläche *ap*. In dem Momente, in welchem die Zahnspitze α die Hebefläche *cd* verlässt, berührt die Zahnspitze γ die Fläche *ap*, und zwar beinahe an der Kante *a*. Das nach geschehener Elongation sich selbst überlassene Pendel schwingt nun nach rechts, mithin erhebt sich die Palette *l* und jene $l_{,}$ steigt nieder. Es gleitet sonach die Zahnspitze γ über die Hebungsfläche *ab*, wodurch nothwendig auch das Pendel eine Beschleunigung nach rechts erhält. Verlässt γ die Fläche *ab*, so ist die Palette $l_{,}$ in den Zahnausschnitt $\alpha\varepsilon$ eingetreten, um den gegen sie anrückenden Zahn ε aufzuhalten, dessen Spitze sich an die Fläche *mc* in der Nähe der Kante *c* anlegt. Schwingt das Pendel wieder nach links, so erhebt sich die Palette $l_{,}$, die Zahnspitze ε gleitet über die ganze Hebungsfläche *cd* und beschleunigt so das Pendel in seiner Linksbewegung. Hiernach begreift man, dass das Echappement etwas Doppeltes zu leisten hat, nämlich: einmal das Rad in seiner Bewegung zu hemmen, sodann aber auch vom Rad aus bald rechts, bald links einen Druck zu empfangen hat, der eine gleichgerichtete Beschleunigung des Pendels hervorruft, und somit bewirkt, dass dessen Bewegung nicht aufhört, was bei den verschiedenen Reibungswiderständen bald geschehen müsste.

Nach diesen Auseinandersetzungen wollen wir nun eine Pendeluhr, wie sie zu astronomischen Zeitbestimmungen benutzt wird, kennen lernen. Sie befindet sich auf dem marburger astronomischen Thurme und ist vom Uhrmacher Schmidt in Marburg nach den Angaben verfertigt, die das klassische Werk von Jürgensen: „Die höhere Uhrmacherkunst" etc. S. 175—183 enthält; eine Uhr, die wir im Folgenden häufig benutzt sehen werden. Die Fig. 11 zeigt die Uhr der Hauptsache nach, wie sie erscheinen würde, wenn man das Räderwerk, incl. Anker, senkrecht zum Zifferblatte ansähe. Wir wissen, dass mit dem Hin- und Hergange des Pendels ein Hin- und Hergang des Ankers *E* erfolgt, wobei die Ankerhacken in die Zähne des Rades *D* eingreifen und wobei, wenn letzteres durch das Gewicht in Umdrehung erhalten wird, bei jedem Hin- und Hergang zusammengenommen das Fortrücken um eine Zahnbreite und eine Zahnlückenbreite vor sich geht. Das „Hemmungsrad" *D* hat 30 Zähne und 30 Zahnlücken; es beträgt mithin die Entfernung zweier Zahnmitten den 30sten Theil des Umfangs und die Entfernung der Mitte einer Zahnlücke von der Mitte des fol-

genden Zahns $\frac{1}{60}$ des Umfangs, um welche Grösse sich das Rad bei jedem Hin- oder Hergang des Pendels im Sinne des beigesetzten

Figur 11.



Pfeils fortbewegt. In demselben Sinne dreht sich auch der mit der Axe des Rads nach hinten verbundene Stahltrieb oder „Wechsel“ *d* und

greift mit 12 Zähnen in's Rad C oder das sogenannte „Mittelrad“ ein. Da dieses Rad 90 Zähne besitzt, so lauft es bei jedem Umgang des Wechsels oder bei jedem Umlauf des Hemmungsrades D nur $\frac{12}{90}$ mal um. Seine Axe trägt nach vorne einen Wechsel c mit 12 Zähnen und greifen diese in 96 Zähne des Rades B ein. Letzteres lauft also bei jedem Umgang von C nur $\frac{12}{96}$mal und bei jedem Umlauf von D nur $\frac{12}{96} \cdot \frac{12}{90}$ oder $\frac{1}{60}$ mal um. Daraus folgt, dass das Rad B 60mal langsamer als D umlauft und dass wenn D in einer Minute einmal umlauft, B dies erst in einer Stunde fertig bringt. Daher trägt B auch den Minutenzeiger und heisst das „Minutenrad“, während D den Sekundenzeiger bewegt und auch das „Sekundenrad“ genannt wird. Die Axe des Minutenrads B besitzt zwei Wechsel: mit dem hinteren Wechsel von 12 Zähnen greift sie in 120 Zähne des „Walzenrades“ A ein, woraus folgt, dass, wenn D eine Umdrehung macht, A nur $\frac{12}{90} \cdot \frac{12}{96} \cdot \frac{12}{120}$ oder $\frac{1}{600}$ vollendet, oder in 10 Stunden sich einmal umdreht. Der Durchmesser der Walze, um welche sich eine das Gewicht tragende Schnur S legt, beträgt 3,8 Centimeter, und ist mithin der Umfang gleich 11,9 Centimeter. Da nun die Höhe des Uhrkastens eine Verstellung des Gewichts um etwa 130 Centimeter gestattet, so folgt daraus, dass die Uhr, wenn sie aufgezogen ist und wenn das Gewicht unmittelbar an der Schnur zöge, etwa 109 Stunden gebrauchte, um abzulaufen. Da aber die Schnur erst um eine bewegliche Rolle herumgelegt und mit ihrem andern Ende an einen festen Punkt angeknüpft ist, so fällt das an der beweglichen Rolle hängende Gewicht mit ihr erst in der doppelten Zeit, also in 218 Stunden, oder in nahezu 9 Tagen, so dass es sich demnach empfiehlt, die Uhr alle 8 Tage aufzuziehen.

Noch müssen wir die Umdrehung des Stundenrades H betrachten. Um sie zu erzielen, sitzt an der Axe von B nach vorn noch ein zweiter Wechsel b ebenfalls mit 12 Zähnen, der in ein Rad G mit 36 Zähnen so eingreift, dass dies in einer Stunde $\frac{12}{36}$ Umdrehungen vollendet. Mit G fest verbunden, ist ein Wechsel g mit 14 Zähnen, um mit diesen endlich in 112 Zähne von H einzugreifen; es legt mithin H in einer Stunde den $\frac{12}{36} \cdot \frac{14}{112} = \frac{1}{24}$ Theil des Kreisumfangs, d. h. in einem Tag, wie es soll, einen ganzen Umkreis zurück, und sind desshalb an seinem Rande die Stundenzahlen 1 bis 24 angeschrieben.

§. 7. Bei einer Pendeluhr ist ausser dem Echappement und den Einrichtungen, die wir soeben betrachtet haben, noch etwas Weiteres von grosser Wichtigkeit, nämlich die sogenannte „Compensation“, d. h. die Einrichtung, welche bewirkt, dass das Pendel, das dem wechselnden Einfluss der Wärme unterworfen ist, diesem Wechsel nicht folgt. Die zunehmende Wärme dehnt nämlich die Körper aus und

verlängert die Pendelstange, während umgekehrt diese mit abnehmender Wärme sich verkürzt, was zur Folge hat, dass die Schwingungsdauer dort mehr und mehr zu- hier mehr und mehr abnimmt, und die Uhr nothwendig bald langsamer bald schneller lauft und hiernach eine genaue Zeitmessung voraussichtlich nicht wohl möglich ist. Um diesen Einfluss der Wärme zu beseitigen, hat man zwei wesentlich verschiedene Wege betreten: einmal nämlich verwendet man zur Pendelstange ein Material, das wegen seiner geringen Veränderlichkeit im Wechsel der Wärme sich unmittelbar eignet, oder man benutzt eine künstliche Einrichtung, die man dann auch als die eigentliche „Compensation“ ansieht.

Nach dem ersten Verfahren verwendet man zur Pendelstange z. B. geradfaseriges Tannenholz. Sein Ausdehnungscoefficient ist sehr gering und beträgt

$$0{,}00000352;$$

ein Pendel also, das bei 0^0 beispielshalber eine Länge von 1 Meter hätte, würde bei $+ 24^0$ eine Länge von $1\,(1 + 0{,}0000035 \,.\, 24) = 1{,}00008448$ M. erhalten. Die Schwingungsdauer, die bei 0^0 gleich t war, würde nach dem Pendelgesetz jetzt sehr nahe

$$t' = t\sqrt{1{,}00008448}$$

oder

$$1{,}000042 \,.\, t$$

sein, d. h. wenn t bei 0^0 genau gleich einer Sekunde gewesen wäre und das Pendel einen Tag lang als Regulator gedient, mithin 86400 Sekunden angegeben hätte, so würde es bei $+ 24^0$ im Laufe eines Tages $86400 \,.\, 0{,}000042 = 3{,}^s629$ weniger angeben. Beachtet man, dass Temperaturdifferenzen von 24^0 im Laufe eines Tages wohl niemals vorkommen, so wird die Aenderung im Gange der Uhr wegen des Temperaturwechsels regelmässig noch sehr viel geringer sein. Hätte man Eisen zur Pendelstange verwendet, so würde sich die Sache in folgender Weise gestalten. Der Ausdehnungs-Coefficient des Eisens beträgt 0,0000125, mithin wäre das t' jetzt bei $+ 24^0$

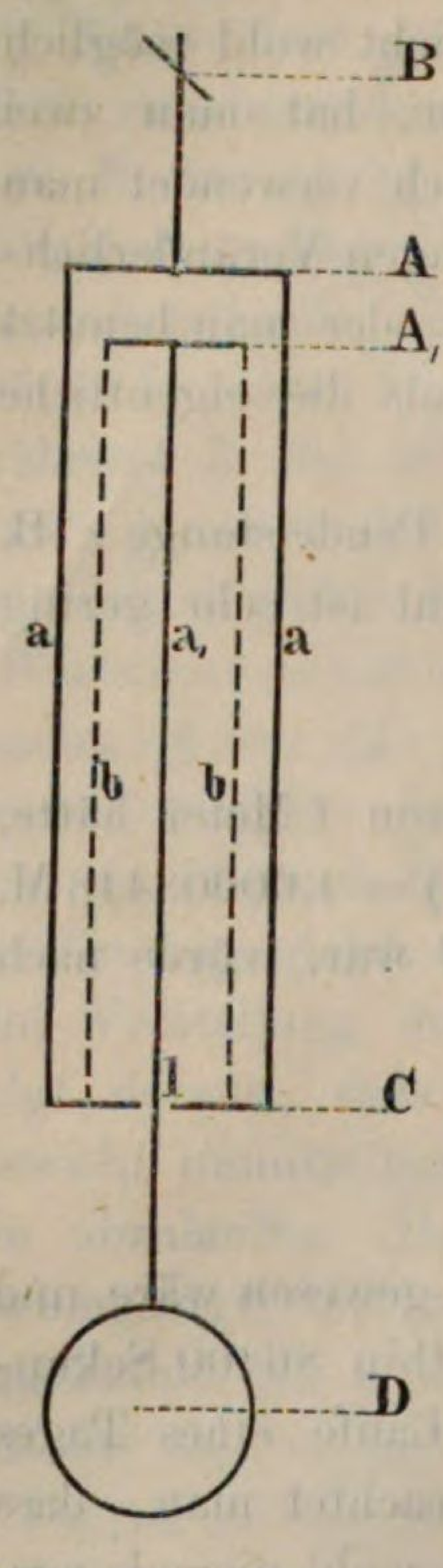
$$t' = t \,.\, \sqrt{1{,}00030} = 1{,}00014 \,.\, t$$

und das Nachgehen betrüge in einem Tage $86400 \,.\, 0{,}00014$ oder $12^s{,}09$, d. h. nahezu viermal so viel wie beim Holzpendel.

Wendet man also ein solches Holzpendel an, so wird man eine recht brauchbare Uhr erhalten, wenn man nur noch Sorge trägt, dass die Feuchtigkeit der Luft möglichst wenig auf's Holz influirt. Denn wenn auch das Holz der Wärme nicht viel nachgibt, so ist es doch ein hygroskopischer Körper, saugt den Wasserdampf der Luft ein und verändert seine Länge. Diesem Uebelstande begegnet man jedoch dadurch, dass man das zu verwendende Holz mit heissem Oel

tränkt und die Oberfläche der Pendelstange noch mit Firniss überzieht.

Fig. 12.



Die eigentlichen Compensationspendel sind aber andere, nämlich: bald das sogenannte „Rostpendel", bald das „Quecksilberpendel". Das Rostpendel wurde zuerst vom Engländer Harrison im Jahr 1720 construirt. Die Theorie und Praxis verlangt in ihm ein Pendel, das bei Temperaturveränderungen seine Länge nicht ändert, und erreicht dies in der Benutzung zweier Metalle, deren Ausdehnungscoefficient verschieden ist, wie z. B. bei Eisen und Messing. Der Ausdehnungscoefficient ist bei ersterem = 0,0000125,
» letzterem = 0,0000187.

Die Zusammenstellung der beiden Metalle kann nun geschehen wie in Fig. 12. Die beiden Eisenstangen *aa* sind oben und unten durch je ein rechtwinkeliges Querstück zu einem Rahmen verbunden. Das obere Querstück trägt mitten eine verticale Eisenverlängerung mit der Aufhängeschneide *B*; das untere Querstück *C* ist bei *l* mit einem Loche durchsetzt, um den dritten Eisenstab *a*, frei durchzulassen. Auf diesem Querfortsatz *C* sitzen unten die beiden Messingstäbe *bb* auf, die oben durch ein Querstück *A*, verbunden sind, an dem der eben erwähnte dritte Eisenstab *a*, mit der Linse *D* hängt. Ist nun die ganze Länge des Pendels bei der Temperatur 0°

$$L = BD = BC + A,D - A,C,$$

so wird sie bei der Temperatur $\pm\, t^0$

$$(BC + A,D)\,(1 \pm 0{,}0000125\, t) - A,C\,(1 \pm 0{,}0000187\, t) = L,$$

sein und soll nun L, wieder gleich L werden, so muss

$$\pm\, 0{,}0000125\, t\,(BC + A,D) \mp 0{,}0000187\, t \,.\, A,C = 0$$

oder

$$\frac{BC + A,D}{A,C} = \frac{0{,}0000187}{0{,}0000125}$$

sein. Es ist aber $BC + A,D = e$ die gesammte Eisenlänge, die man erhielte, wenn man *a*, unten bei *l* angesetzt dächte, und ebenso $A,C = m$ die im Apparat in Betracht kommende Messinglänge. Unsere Bedingungsgleichung für die Gleichheit von L und L, ist also

$$\frac{e}{m} = \frac{0{,}0000187}{0{,}0000125},$$

d. h. soll ein solches Pendel der Temperatur nicht folgen, so muss

das Verhältniss der Eisenlänge zur Messinglänge das umgekehrte sein, wie das Verhältniss der Ausdehnungscoefficienten.

Statt der Zusammenstellung Fig. 12 sind auch noch Zusammenstellungen mit mehr Stäben möglich und können selbstverständlich auch andere Metalle nebeneinander gewählt werden. Bei der wirklichen praktischen Ausführung eines solchen Pendels müssen aber die Ausdehnungscoefficienten, die hier in einer Mittelzahl angenommen wurden, für die zu verwendenden Metalle nach zuverlässigen Methoden genau bestimmt werden, eine Operation, die gerade nicht zu den einfachsten gehört.

Das „Quecksilberpendel", zuerst 1722 vom Engländer Graham construirt, stellt die Fig. 13 dem Wesen nach dar. Die Metallstange des Pendels trägt unten einen Metallrahmen $ABCD$, der ein Gefäss $abcd$ in passender Weise umschliesst und festhält. Dieses Glas- oder Metallgefäss, einen kreisförmigen oder elliptischen Cylinder bildend, enthält das Quecksilber, das mit seinem Niveau bis n reicht. Es ist klar, dass des bedeutenden Gewichts des Quecksilbers halber der Schwingungsmittelpunkt unseres Pendels etwa in die halbe Höhe der Quecksilbermasse zu liegen kommt. Dehnte sich das Quecksilber nicht aus, sondern nur die Pendelstange und der Rahmen, so würde der genannte Punkt S tiefer rücken und somit das Pendel langsamer schwingen; dehnte sich umgekehrt das Quecksilber allein aus, so rückte sein Niveau n und hiermit auch S höher, und das Pendel schwänge schneller. Da nun die Wärmezunahme diese beiden Bewegungen von S gleichzeitig bewirkt, so wird die Verschiebung von S gleich der Differenz dieser einzelnen Verschiebungen sein und seine Lage beibehalten, wenn diese Differenz gleich Null bleibt. Mit Rücksicht auf den Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers, den des übrigen Pendels und des Glases wird man im Stande sein, die Menge Quecksilber zu berechnen, die bewirkt, dass diese Differenz sowohl bei der Wärmezu- wie bei der Wärmeabnahme gleich Null wird. Diese genaue Bestimmung der betreffenden Ausdehnungscoefficienten ist aber mit besonderen Schwierigkeiten verbunden, und zieht man es daher vor, die ungefähre genaue Menge des Quecksilbers zu berechnen und dann das mit dieser Menge construirte Pendel auf

Fig. 13.

seine Richtigkeit bei den Zeitbestimmungen selbst zu prüfen. Zeigt sich hierbei, dass die Temperatur noch einen bemerkenswerthen Einfluss ausübt, so wird man durch Vermehrung oder Verminderung des Quecksilbers schliesslich eine möglichst vollständige Compensation erreichen. Die betreffende Berechnung der Quecksilbermenge ist aber eine sehr einfache. Setzen wir ein Glasgefäss voraus, so können wir die Ausdehnung oder Zusammenziehung desselben vernachlässigen und bezeichnen wir den innern Querschnitt des Gefässes mit F, die Höhe des Quecksilbercylinders aber mit h, so ist $h \,.\, F$ die Menge des Quecksilbers und h die zu suchende Grösse. Denn wenn man weiss, bis zu welcher Höhe man das Quecksilber einzufüllen hat, so ist die Aufgabe gelöst. Wegen der Schwere des Quecksilbers gegenüber dem Rahmen und der Pendelstange, wird man die Lage des Schwingungsmittelpunktes S, wie schon erwähnt, nahezu in der halben Höhe des Quecksilbercylinders annehmen können. Bezeichnen wir nun die Entfernung Sm dieses Punktes vom Aufhängepunkt bei der Temperatur 0^0 mit L, so ist die Entfernung der Basis cb von m gleich

$$L + \tfrac{1}{2} h.$$

Verändert sich die Eisenstange mit dem Eisenrahmen allein und ist α der Ausdehnungscoefficient des Eisens, so rückt diese Basis bei der Temperatur $\pm t$ in die Entfernung

$$(L + \tfrac{1}{2} h)\ (1 \pm \alpha t).$$

Da aber das Quecksilber hierbei seine Höhe auch verändert, so wird diese, wenn wir mit γ den Ausdehnungsofficienten bezeichnen, zu

$$h\ (1 \pm \gamma t),$$

mithin die halbe Höhe gleich $\frac{1}{2} h\ (1 \pm \gamma t)$. Die Entfernung des Schwingungsmittelpunkts von m wird somit gleich

$$(L + \tfrac{1}{2} h)\ (1 \pm \alpha t) - \tfrac{1}{2} h\ (1 \pm \gamma t) = L,$$

und soll diese Grösse gleich L werden, so muss

$$\pm \alpha t L + \tfrac{1}{2} h \pm \tfrac{1}{2} \alpha t h - \tfrac{1}{2} h \mp \tfrac{1}{2} \gamma t h$$

oder

$$\pm \alpha L \pm \tfrac{1}{2} \alpha h \mp \tfrac{1}{2} \gamma h = 0$$

sein, woraus sich

$$h = \frac{2\ \alpha L}{\gamma - \alpha}$$

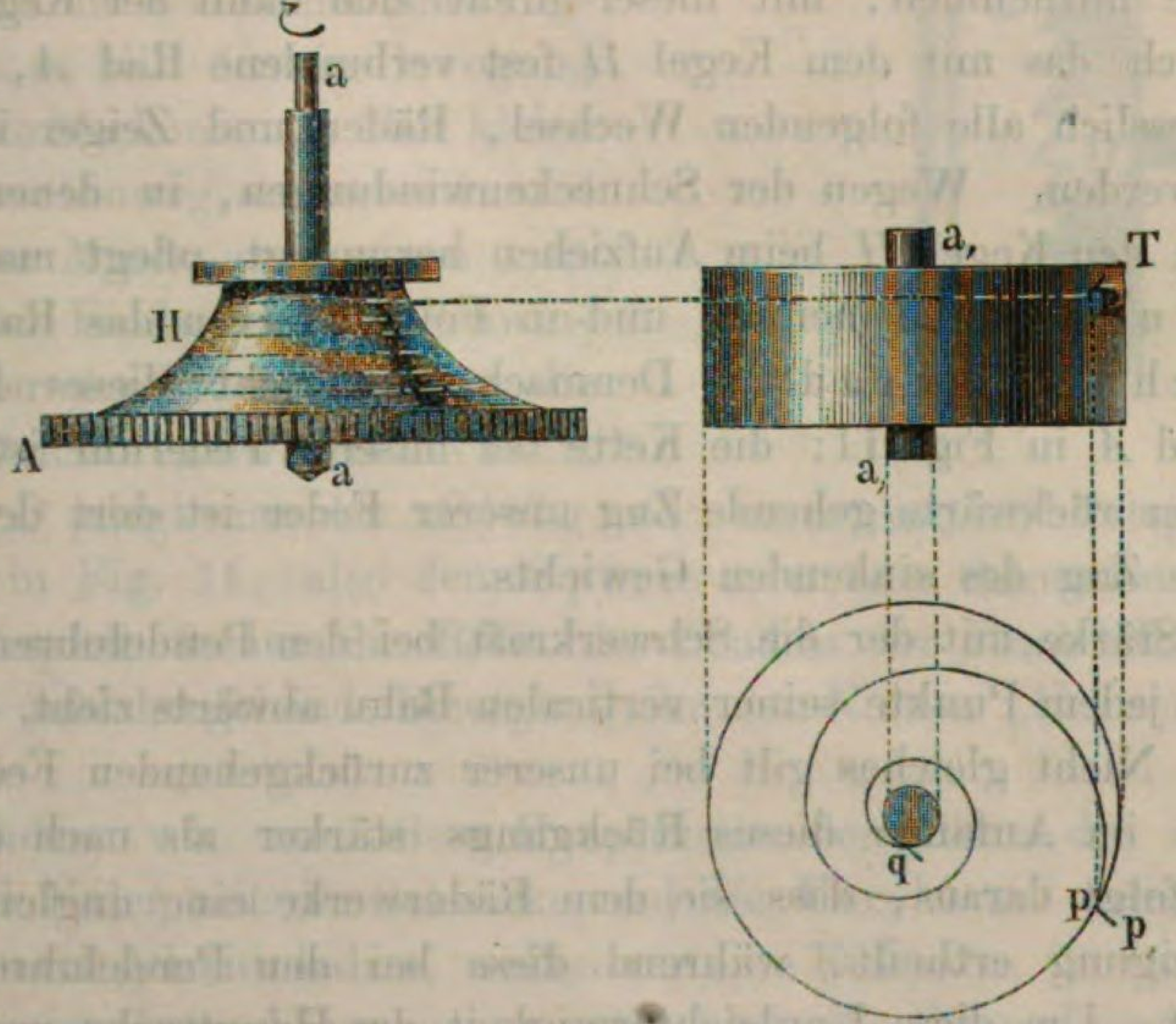
als die gesuchte Grösse ergiebt. Soll das Pendel ein Sekundenpendel sein, so ist L nahezu gleich 1 Meter gleich 100 Centimeter, und da $\alpha = 0{,}0000125$, $\gamma = 0{,}000179$ ist, so berechnet sich

$$h = \frac{200 \,.\, 0{,}0000125}{0{,}0001665} = 15{,}^{\text{Ctm}}01.$$

§. 8. Die zweite Klasse von Uhren, deren man sich zur genauen Zeitmessung bedient, bilden die „Federuhren“. Zu ihnen gehören

unsere Taschenuhren, die bei bestimmter Einrichtung und bestimmter Güte den Namen „Taschenchronometer" oder englisch Pocket-Chronometer erhalten. Werden letztere grösser construirt und in ein Kästchen eingesetzt, in dem sie insbesondere auch auf die See mitgenommen werden können, so nennt man diese Art von Chronometer des ersteren Umstands wegen nach dem Englischen: Box-Chronometer, wegen des letzteren auch „See-Chronometer" oder „Seeuhren". Denn es ist selbstverständlich, dass eine Seeuhr keine Pendeluhr im Sinne des §. 7 sein kann. Unsere Aufgabe sei, im Allgemeinen die Einrichtung einer Federuhr kennen zu lernen und insbesondere das Gemeinsame und die Unterschiede in den Einrichtungen zwischen ihr und der Pendeluhr hervorzuheben.

Fig. 14.



Wir sahen bei den Pendeluhren die Schwerkraft ein Gewicht zum Falle bringen und hierdurch das Räderwerk in Umdrehung versetzen. Schon die Grösse des vom Gewicht hierbei durchlaufenen Raums lehrt uns, dass bei der Taschenuhr dieser Modus verlassen werden muss. Die Schwerkraft wird zu dem Ende durch die Elasticität einer Feder ersetzt, die im zusammengerollten Zustande das Bestreben hat, sich wieder aufzurollen, und ist der hierbei ausgeübte Druck als die Kraft anzusehen, welche das Räderwerk umdreht. Zur näheren Versinnlichung dient Fig. 14. *T* ist ein cylindrisches Messinggehäuse, die sogenannte „Trommel", die sich um einen feststehenden Kern *a*, dreht. An ihr ist bei *q*, wie der unterhalb *T* befindliche Grundriss der Trommel zeigt, eine Stahlfeder mit ihrem einen Ende eingehängt, während

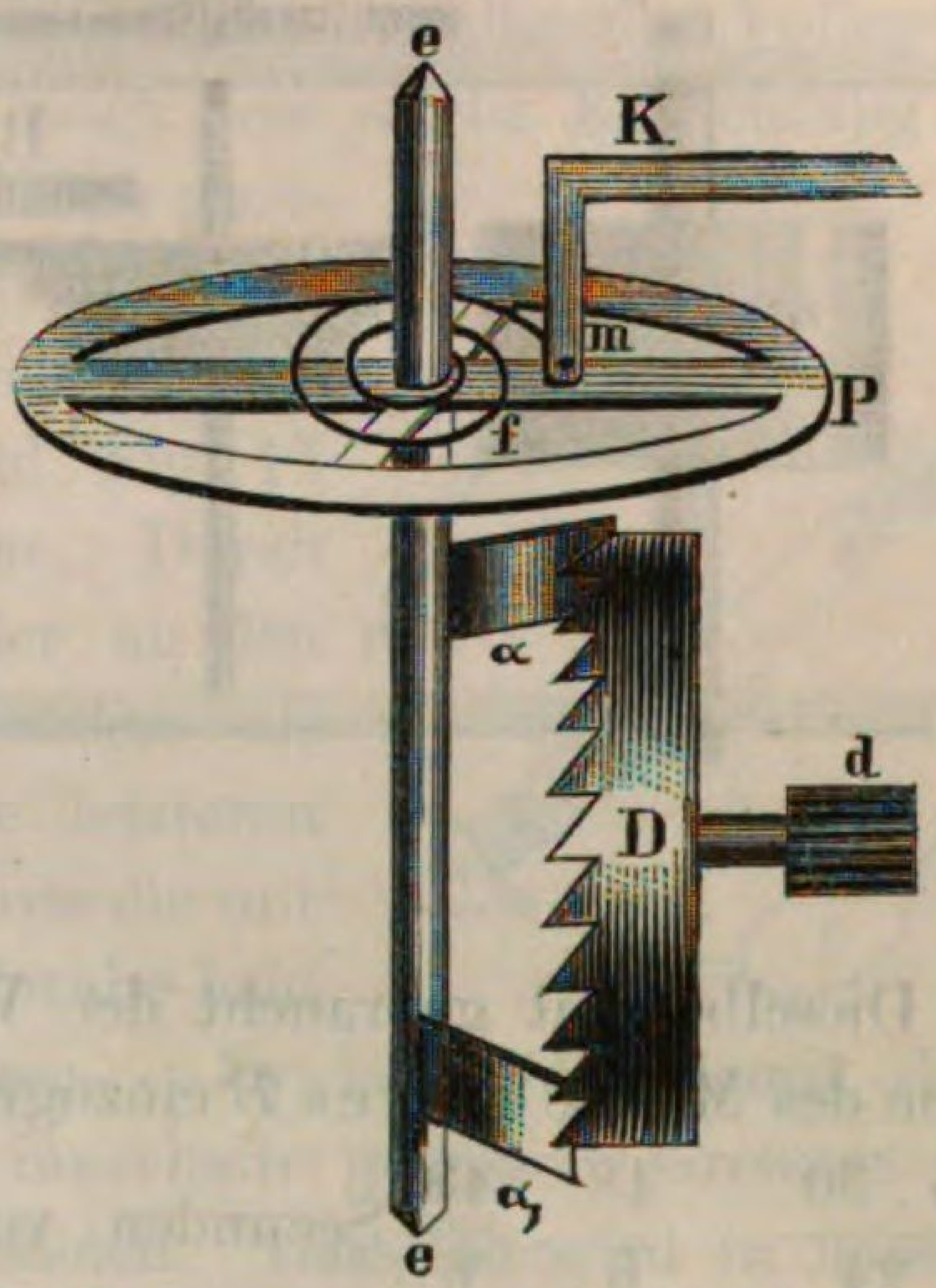
das andere nach dem Punkte p des Trommelmantels geht, der in einen Fortsatz p' nach Aussen endet. Wird die Trommel mit der Feder sich selbst überlassen, so nimmt sie bei der Drehung um a, eine Ruhelage an, in der die Feder ohne Spannung ist. Denken wir in diesem Zustand um den äusseren Trommelmantel in gehöriger Länge eine Kette gelegt, deren eines Ende bei p, eingehakt ist, während das andere Ende nach dem kegelförmigen Theile H lauft und nun diesen Kegel mittelst eines auf den vierkantigen Fortsatz a zu setzenden Uhrschlüssels im Sinne des angedeuteten Pfeils in Umdrehung versetzt, oder kurz gesprochen: „ziehen wir die Uhr auf", so lauft hierbei die Trommel in demselben Sinne mit und die Feder wird gespannt. Alles nun sich selbst überlassen, wird die gespannte Feder ihre Ruhelage wieder annehmen wollen und hierbei zunächst die Trommel im umgekehrten Sinne mitnehmen; mit dieser dreht sich dann der Kegel H und somit auch das mit dem Kegel H fest verbundene Rad A, von dem aus schliesslich alle folgenden Wechsel, Räder und Zeiger in Umlauf gesetzt werden. Wegen der Schneckenwindungen, in denen sich die Kette um den Kegel H beim Aufziehen herumlegt, pflegt man H auch die „Schnecke" zu nennen und in Folge hiervon das Rad A auch das „Schneckenrad". Demnach entspricht dieses Rad dem Walzenrad A in Fig. 11; die Kette bei unserer Federuhr ist dort das Seil S, der rückwärts gehende Zug unserer Feder ist dort der abwärts gerichtete Zug des sinkenden Gewichts.

Die Stärke mit der die Schwerkraft bei den Pendeluhren das Gewicht an jedem Punkte seiner verticalen Bahn abwärts zieht, ist immer dieselbe. Nicht gleiches gilt bei unserer zurückgehenden Feder. Ihre Kraft ist im Anfange dieses Rückgangs stärker als nach dem Ende hin und folgt daraus, dass sie dem Räderwerke eine ungleichförmige Beschleunigung ertheilt, während diese bei den Pendeluhren gleichförmig ist. Um diese Ungleichförmigkeit der Hauptsache nach zu beseitigen, wickelt sich die Kette auf dem kegelförmigen Apparat der Schnecke auf; denn nach dem Aufziehen im Momente, den unsere Fig. 14 darstellt, wirkt die Feder an dem kürzesten Hebelarm; dieser vergrössert sich mehr und mehr nach dem Ende hin und macht so die schwächer werdende Federkraft in ihrer Wirkung der im Anfange möglichst gleich.

Unsere Pendeluhren besassen eine Einrichtung, durch welche der immer rascher werdende Umlauf der Räder in einen gleichförmigen verwandelt wurde, und bestand diese Einrichtung in einem Pendel in Verbindung mit der Hemmung oder dem sogenannten Regulator und dem Echappement. Für die Federuhren stellt die Fig. 15 das Aequivalent dieser Einrichtung dar. An der Axe e sitzen zwei Querstücke

α und $\alpha_{,}$, die die Bestimmung haben, in die Zähne des Rades D ebenso hemmend einzugreifen, wie es in Fig. 11 die Hackenenden des Ankers E thaten. Damit nun dieses Eingreifen in einem bestimmten Tempo erfolgt, wird eine Feder f angebracht, deren eines Ende oben an der Axe e befestigt ist, während das andere Ende sich bei m an ein feststehendes Ansatzstück K anheftet. Die Axe e aus dem Gleichgewichte gebracht, macht unter dem Einflusse der Feder f Pendelbewegungen und bewirkt so den Eingriff der Theile α und $\alpha_{,}$ in die Zähne von D. Das mit der Axe e verbundene Rad P spielt theils die Rolle eines Schwungrads, d. h. es hilft dem in Bewegung begriffenen Mechanismus über kleine Hindernisse hinweg, andererseits wird aber seine Masse auch einen entscheidenden Einfluss auf die Schwingungsdauer der Feder f ausüben, die demnach leicht regulirt werden kann.

Fig. 15.



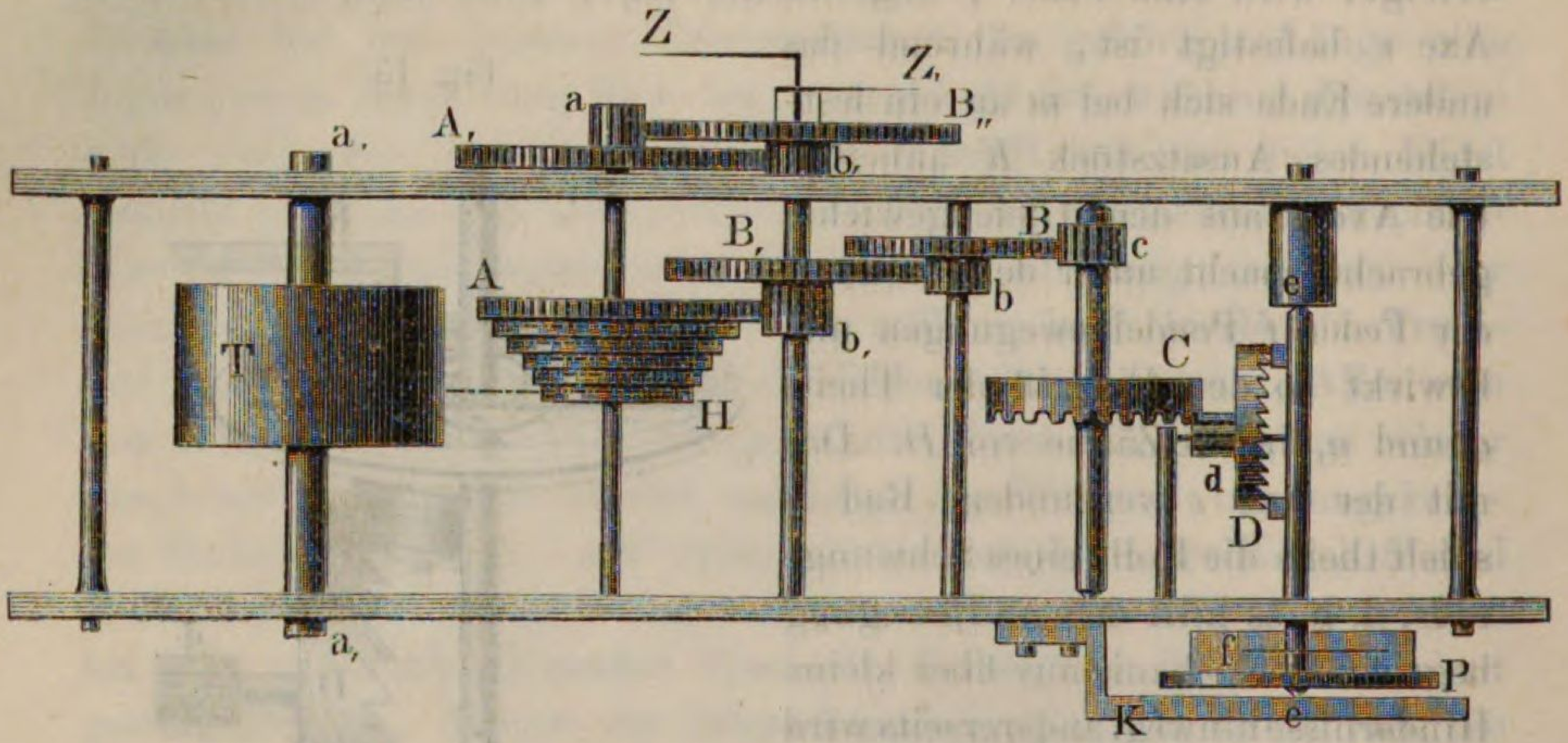
Das Rad D pflegt man das „Steigrad“ zu nennen und entspricht dem Rade D in Fig. 11, also dem Sperrrade oder Sekundenrade. Die Feder f spielt ferner die Rolle des Pendels der Pendeluhr und hat ihre hin- und hergehende Bewegung ihr den Namen „Unruhe“ eingetragen.

Nachdem wir nun diese Haupttheile der Uhr: die bewegende Kraft, die Feder mit der Schnecke und die Unruhe mit dem Echappement kennen gelernt haben, wollen wir eine Federuhr, im Durchschnitt aufgenommen, betrachten, um zu sehen, wie die Bewegungen von einander abhängen. Gehen wir zu dem Ende in der Figur 16 von rechts nach links.

Die in Schwingung begriffene Feder f setzt die „Spindelaxe“ e in Bewegung, deren „Spindellappen“ α und $\alpha_{,}$ in das „Steigrad“ D eingreifen. Das Tempo der Schwingungen von der Feder f sei so, dass sie in 5 Secunden 24 Schwingungen d. h. 12 Hin- und 12 Hergänge vollendet. Hat das „Steigrad“ D 15 Zähne, so folgt, dass es einen Umlauf vollendet, wenn e 30 Schwingungen macht. Diese vollendet es aber in $\frac{5 \,.\, 30}{24}$ Secunden. In derselben Zeit macht auch der Wechsel d einen Umlauf, und da er 6 Zähne und das

folgende „Kronrad“ C deren 48 hat, so folgt, dass dieses zu einem Umlauf $\frac{5 \cdot 30}{24} \cdot \frac{48}{6}$ Secunden gebraucht.

Fig. 16.

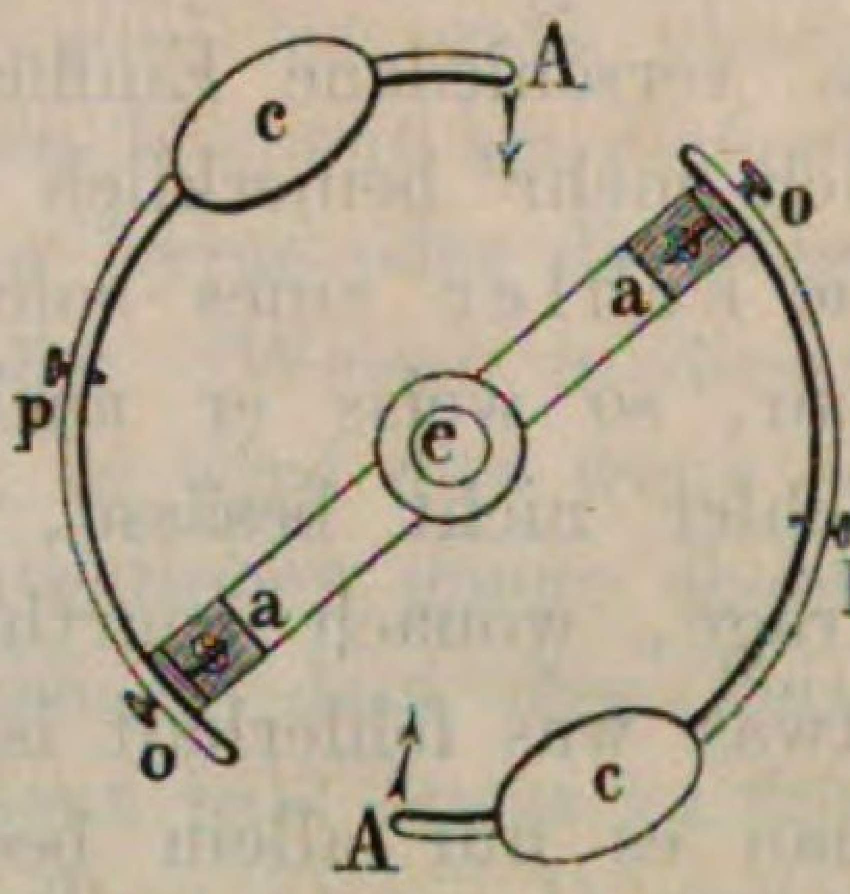


Dieselbe Zeit gebraucht der Wechsel c mit 6 Zähnen, um in 48 Zähne des Mittelrades B einzugreifen, welches demnach einen Umlauf in $\frac{5 \cdot 30}{24} \cdot \frac{48}{6} \cdot \frac{48}{6}$ Secunden vollendet. Da der Wechsel von B oder b auch 6 Zähne hat, und mit diesen in $B,$ mit 54 Zähnen eingreift, so vollendet $B,$ einen Umlauf in $\frac{5 \cdot 30}{24} \cdot \frac{48}{6} \cdot \frac{48}{6} \cdot \frac{54}{6}$ d. h. in 3600 Secunden oder in einer Stunde. Es ist mithin das Rad $B,$ das „Minutenrad“ und trägt den „Minutenzeiger“ Z. Der obere Wechsel $b,$, an der Minutenaxe fest sitzend, hat 12 Zähne, und greift mit diesen ins „Wechselrad“ $A,$ mit 48 Zähnen ein; dessgleichen greift der untere Wechsel $b,$ mit 12 Zähnen ins „Schneckenrad“ A mit 48 Zähnen ein. Es folgt daraus, dass A und $A,$ mit gleicher Geschwindigkeit umlaufen, nämlich in $\frac{48}{12}$ oder 4 Stunden. An dieser Vierstundenaxe der Schnecke sitzt aber oben noch ein weiterer Wechsel a mit 16 Zähnen und greift mit diesen in ein lose auf die Minutenaxe gestecktes Rad $B,,$ mit 48 Zähnen ein; dieses vollendet mithin seinen Umlauf in $4 \cdot \frac{48}{16}$ oder in 12 Stunden und trägt den „Stundenzeiger“ $Z,$.

Eine solche Federuhr, wie wir sie beschrieben haben, wird auch dem Einflusse der Temperatur unterworfen sein, der sich in der Weise geltend macht, dass er die Schwingungen der Unruhe bald etwas beschleunigt bald etwas verlangsamt. Soll dies nicht geschehen,

so muss auch hier eine Compensation angebracht werden. Ist diese in vollendeter Weise vorhanden, ist das Echappement ein möglichst genügendes und überhaupt der ganze Apparat dem entsprechend, was der Astronom von einer guten Uhr verlangt, so wird die gewöhnliche Taschenuhr zum Chronometer. Die Compensation, die man bei Chronometern anwendet, ist zuerst vom Engländer Harrison im Jahr 1726 angegeben, jedoch erst 50 Jahre später zu genügender Vollendung erhoben worden. Unsere Figur 17 zeigt eine solche Einrichtung und ist dem oben genannten Werke von Jürgensen entnommen. Die Axe des in der Figur dargestellten eigenthümlichen Balanciers entspricht der Axe *e* der Fig. 16 und Fig. 15 und ist mithin die Axe der Unruhe. Durch diese Axe lauft der Metallarm *aa* der an den Enden die Metallbögen *AA* und ausserdem die Schrauben *oo* trägt. Werden diese letzteren herein oder herumgeschraubt, so würde die mit der Axe *e* in Verbindung stehende Unruhe bald schneller bald langsamer schwingen. Es lässt sich somit durch das Verstellen der Schrauben *oo* innerhalb gewisser Grenzen eine Aenderung der Schwingungsdauer erzielen. Dasselbe wird in feinerem Maasse mit den Schrauben *pp* sich erreichen lassen. Die Metallbogen *AA* bestehen weiter aus zwei nebeneinander liegenden Metallen: aussen Messing innen Stahl. Eine solche Metallstange krümmt sich, wenn sie vorher gerade gedacht wurde, bei zunehmender Wärme bekanntermassen so, dass bei dieser Krümmung das Messing nach Aussen und bei abnehmender Wärme so, dass umgekehrt der Stahl nach Aussen zu liegen kommt. Eine gekrümmte Stange bei einer gewissen Temperatur z. B. 0° gedacht, befolgt dasselbe Gesetz: bei zunehmender Wärme wird das Ganze sich mit dem Messing nach Aussen krümmen und werden die Enden bei *A* eine Bewegung in der Richtung der beigesetzten Pfeile machen, wodurch nothwendig die mit den Metallbogen verbundenen Massen *cc* sich der Axe mehr nähern. Bei abnehmender Temperatur findet die umgekehrte Bewegung der Massen *cc* statt und haben wir nun folgendes Nebeneinanderwirken:

Fig. 17.



1) durch die Zunahme der Wärme verlängert sich die Unruhe *f* Fig. 15 und Fig. 16 und rückt zugleich *c* Fig. 17 näher an die Axe;

2) durch die Abnahme der Wärme verkürzt sich die Unruhe, aber *c* rückt weiter von der Axe weg.

Diese beiden Dinge: Verlängerung oder Verkürzung der Unruhe einerseits, Annäherung der Massen *c* an *e* oder Entfernung der Massen *c* von *e* andererseits, wirken sich aber entgegen und ist es denkbar, dass

durch gehörige Stellung und Schwere von *c* ebenso von *o* und *p* diese entgegengesetzten Wirkungen sich aufheben und so die Schwingungsdauer unverändert bleibt.

§. 9. Bei einer Uhr sind es nun weiter zwei Dinge, die zu erforschen das eigentliche Ziel einer Zeitbestimmung bilden: nämlich der „Stand“ und der „Gang“ der Uhr. Ist jede dieser Grössen — wir werden sogleich sehen, dass man beide in Zahlen auszudrücken pflegt — gleich Null, so hat man eine absolut richtig gehende Uhr vor sich; eine Uhr würde aber, selbst wenn sie einmal absolut genau vorhanden wäre, dennoch nur kurze Zeit so bleiben, da verschiedene Einflüsse Fehler hervorrufen, die nach und nach sich mehr bemerklich machen. Der Astronom ist daher genöthigt, die Fehler eines solchen Apparats zu studiren; kennt er diese genau, so weiss er auch was die Uhr zeigen müsste, wenn sie diese Fehler nicht besässe, d. h. völlig richtig wäre. Es ist aber die Frage, wonach beurtheilen wir denn die Fehler? Denn sicher wird etwas was fehlerhaft ist, nicht dadurch als fehlerhaft erkannt, dass man es nur allein beobachtet, sondern dadurch, dass man es mit etwas Richtigem vergleicht. Besitzt demnach der Lauf der Uhr Fehler, so lassen sich diese nur erkennen, wenn man daneben einen anderen als fehlerlos geltenden Lauf beobachtet. Dieser letztere ist uns aber in gewissen Erscheinungen am Himmel gegeben, namentlich in der scheinbaren Umdrehung des Fixsternhimmels um unsere Erde, d. h. eigentlich in der Rotation der Erde um ihre Axe. Diese Rotation vollzieht sich mit absolut gleichförmiger Geschwindigkeit und folgt hieraus, dass wenn die Erde feststünde und nur rotirte, die Zeit von einer Culmination eines Fixsterns bis zur nächsten stets dieselbe bliebe. Die Sache ist aber noch einfacher, indem diese Zeit von einer Culmination zur andern auch bei der, in ihrer Bahn fortschreitenden, Erde stets dieselbe ist. Denn der Umkreis, den die Erde beschreibt, besitzt zwar einen Radius von 21 Millionen Meilen, aber selbst diese weite Strecke ist gegenüber der Entfernung der Fixsterne so verschwindend klein, dass sie geradezu gleich Null gesetzt werden darf, d. h. es ist ganz einerlei ob wir die Erde innerhalb Jahresfrist einmal um die Sonne führen oder sie an einem Punkte festhalten. Die Zeit von einer Culmination irgend eines Fixsterns bis zur nächsten ist demnach eine unveränderliche Grösse und diese Zeitgrösse ist es, die dem Astronomen in erster Linie dazu dient, andere Zeitgrössen, insbesondere die von Uhren angegebenen, zu beurtheilen. Eine Uhr, welche bestimmt ist, den scheinbaren Lauf der Fixsterne gewissermassen in verkleinertem Maassstabe wiederzugeben, und welche die, von einer Culmination bis zur nächsten verfliessende, Zeit in 24 Stunden,

jede Stunde in 60 Minuten und jede Minute in 60 Secunden theilt, pflegt man eine „Sternuhr" zu nennen und dem entsprechend auch die Zeit, die sie abmisst, mit dem Namen „Sternzeit" zu belegen. Die Zeit von 24 Stunden bildet den sogenannten „Sterntag" und ebenso spricht man bei ihr von „Sternstunden", „Sternminuten" und „Sternsecunden". Halten wir an einer solchen Uhr vorläufig einmal fest, so fragt sich: wann muss bei ihr der Stunden- der Minuten- und Secundenzeiger auf 0^h, 0^m und 0^s stehen? Oder anders ausgedrückt: welchen Moment in der Umdrehung der Erde oder der scheinbaren Umwälzung des Fixsternhimmels pflegt man als den Zeitpunkt „Null" anzusehen? Es ist dies zunächst ganz gleichgiltig und wollen wir einmal den betreffenden Moment als denjenigen ansehen, in welchem ein heller Stern z. B. α Lyrae oder die Wega in der oberen Culmination den Meridian passirt. Weisen in diesem Moment unsere drei Zeiger der Uhr auf 0 hin, so wird dies wenn sie absolut richtig bleibt, bei den folgenden Culminationen genau ebenso stattfinden. In Wirklichkeit aber wird man sehen, dass dies keine Uhr thut, sondern dass der betreffende Moment bald etwas zu früh bald etwas zu spät angezeigt wird: am zweiten Tage also z. B. anstatt bei 24^h 0^m 0^s bei 24^h 0^m 2^s, am dritten bei 24^h 0^m 4^s, am vierten bei 24^h 0^m 6^s. Von einer solchen Uhr würden wir offenbar sagen: „sie gehe vor" und zwar täglich um 2 Secunden. Ein solches Voreilen oder im entgegengesetzten Falle ein Zurückbleiben pflegt man mit dem Namen „Gang" zu bezeichnen, und versteht insbesondere unter „Gang", die Zahl, welche angiebt, wie viel Secunden die Uhr täglich vor- oder nachgeht. Im ersteren Falle wollen wir die betreffende Zahl mit dem + Zeichen im letzteren mit dem — Zeichen versehen.

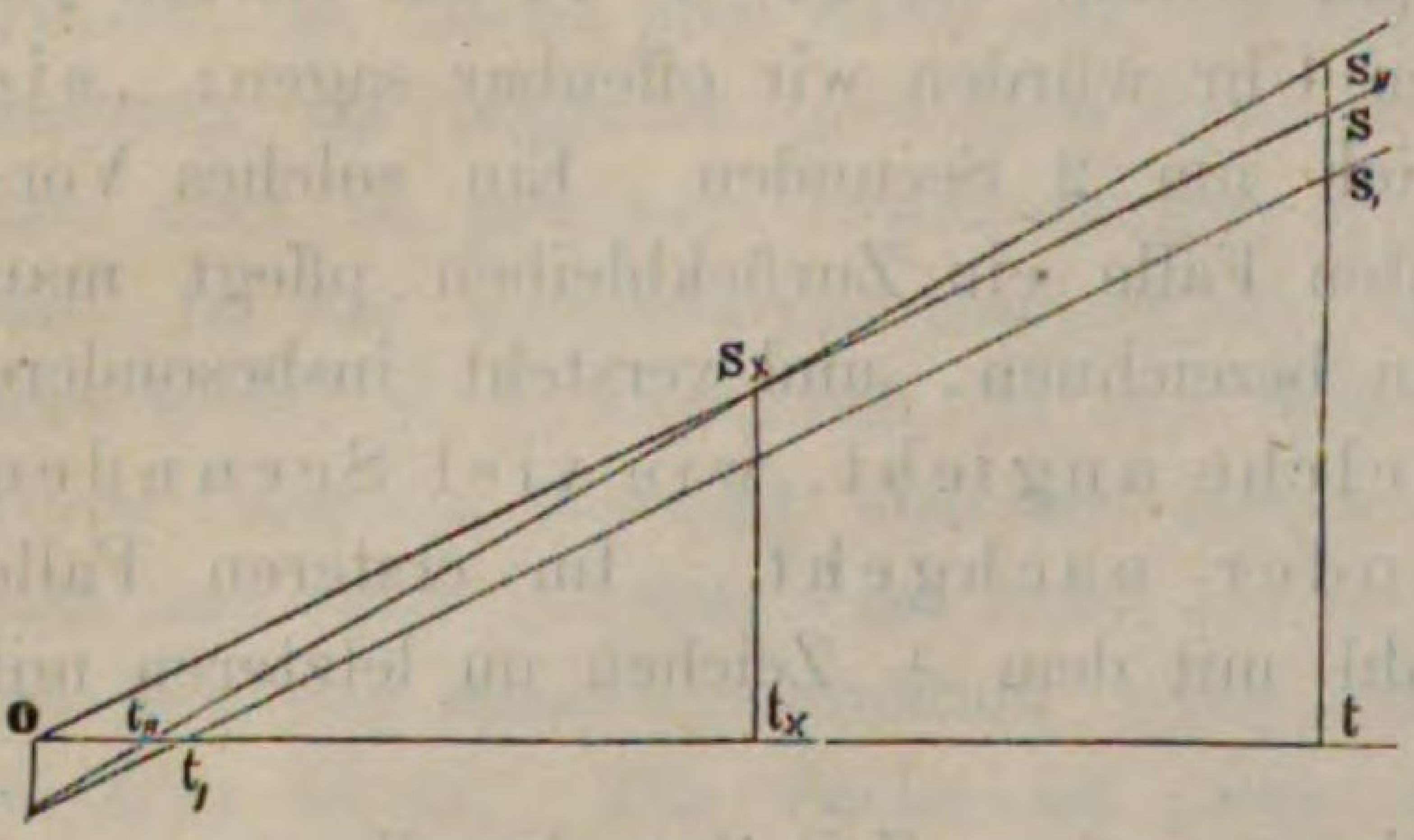
Ist der Gang innerhalb einer gewissen Zeit stets derselbe, so nennt man ihn einen „regelmässigen" im Gegensatze zum „unregelmässigen", den eine Uhr zeigt, die an einem Tage z. B. einen Gang von + 2, am nächsten einen von + 3,5, am dritten einen von + 1,8 etc. hätte.

Mit dem Gang nicht zu verwechseln ist ein zweites, nämlich der „Stand" einer Uhr. Unsere Sternuhr kann z. B. den Zeitraum von einer Culmination eines Fixsterns bis zur nächsten genau als einen Zeitraum von 24 Stunden angeben, also z. B. die erste Culmination von α Lyrae anzeigen um 23^h 45^m 30^s, die zweite um dieselbe Zeit, die dritte auch noch. Eine solche Uhr hat nach unseren jetzigen Betrachtungen innerhalb dieser Zeit einen Gang gleich Null; aber ihre Zeiger geben den absoluten Zeitpunkt der Culmination von α Lyrae falsch an. Angenommener Massen soll nämlich dieser Stern in

seiner Culmination von der Uhr angezeigt werden um $24^h\ 0^m\ 0^s$; rückten wir jetzt im Moment der ersten Culmination die Zeiger von $23^h\ 45^m\ 30^s$ rasch auf $24^h\ 0^m\ 0^s$, so stünden sie richtig und da der Gang der Uhr bis zur dritten Culmination gleich Null sein soll, so würde diese und die vorausgehende zweite Culmination nun auch um $24^h\ 0^m\ 0^s$ angezeigt. Man sieht also, eine Uhr kann innerhalb einer gewissen Zeit einen Gang gleich Null haben, aber die Angabe eines absoluten Zeitpunkts ist falsch: sie hat einen falschen „Stand" und zeigt wie bei unserem Beispiele $14^m\ 30^s$ weniger als sie zeigen müsste. Wir werden im Folgenden auch einen Stand der über die richtige Zeit hinausgeht mit + bezeichnen und umgekehrt mit —; ferner werden wir für den Gang den Buchstaben *g*, für den Stand den Buchstaben *s* wählen. Demnach würde z. B. eine Uhr, die am 23. Juni Nachmittags auf ihren Stand geprüft wurde und deren Gang man um diese Zeit kannte, bei der z. B. $s = + 1^m\ 15{,}^s0$, $g = - 2{,}^s3$ war, eine Uhr sein, die zu dieser Zeit $1^m\ 15{,}^s0$ zuviel zeigte, trotzdem aber täglich um $2{,}^s3$ nachgieng.

Es dürfte vielleicht nicht überflüssig sein, die bisherigen Erläuterungen noch durch eine graphische Darstellung zu vervollständigen.

Fig. 18.



Zu dem Ende stelle die horizontale Gerade *ot* Fig. 18 den continuirlichen Lauf der Zeit vor, so dass jeder Punkt dieser Geraden einem bestimmten Zeitmomente entspricht. Die Ordinaten senkrecht zu dieser Geraden aber mögen in ihrer Länge die von einer Uhr gemachten Anzeigen der betreffenden Zeitmomente bedeuten. Geht nun eine Uhr genau richtig, ist innerhalb der Zeit *o* bis *t* ihr Stand und Gang gleich Null, so ist die von *o* nach *s* schief aufsteigende Gerade als das Bild unseres Uhrlaufs zu betrachten. Denn ist die Ordinate *ts* im Moment *t* das Uhrmaass der Zeit *ot*, so ist in irgend einem anderen Momente z. B. im Momente $\frac{1}{m}\, ot$ auch die betreffende Ordinate $\frac{1}{m} \cdot ts$ d. h. die Uhranzeigen sind genau proportional der verflossenen Zeit. Ein Uhrlauf der hiervon abweicht wird unter Umständen zwar auch wieder durch eine Gerade allgemein aber durch eine Curve dargestellt. Ersteres findet statt bei Uhren, deren Gang gleich Null ist und die nur einen Standfehler haben; ferner bei Uhren, deren Gang ein gleichförmiger ist; letzteres dagegen bei Uhren, deren

Gang ungleichförmig ist. Die Gerade $t_{,}s_{,}$ die parallel zu os gezogen, bezeichnet den Lauf der ersten Uhr: Ihr Gang ist stets gleich Null, aber sie steht ein für allemal falsch und zeigt von o bis t immer um $ss_{,}$ zu wenig. Die Gerade $t_{,,}s_{,,}$ die steiler aufsteigt wie $t_{,}s_{,}$, dagegen gehört einer Uhr an, deren Gang ein regelmässiger ist, einer Uhr die innerhalb unserer Zeit von o bis t fortwährend vorläuft und zwar so, dass dieses Vorlaufen von der Zeit t_x bis t den Werth $ss_{,,}$ erreicht. Eine solche Uhr und ebenso jede Uhr, bei der innerhalb einer gewissen Zeit stets ein Nachlaufen stattfindet, muss nothwendig, wenn der Gang nur lange genug regelmässig bleibt, in einem Momente richtig zeigen, d. h. einen Stand gleich Null haben: geometrisch genommen nämlich in dem Momente, der vom Durchschnitt der Geraden, die der völlig richtigen Uhr angehört, mit der Geraden, die die abweichende Uhr versinnlicht, angegeben wird: in unserer Figur also im Momente t_x; in jedem andern Momente ist demnach der Stand von Null abweichend.

Wir haben bisher nur von Sternuhren gesprochen und an ihnen erläutert, was man unter Gang und Stand zu verstehen habe. Dieselbe Betrachtung gilt natürlich ohne Weiteres auch für eine mittlere Sonnenzeit zeigende Uhr. Diese Uhr soll, wie wir später noch näher sehen werden, den Zeitraum von einer Culmination der sogenannten mittleren Sonne bis zur nächsten in 24 Stunden theilen und wird auch sie die Momente dieses Zeitraums entweder genau oder nicht genau angeben können.

§. 10. Einen sehr wichtigen Punkt bei unseren Zeitbestimmungen bildet noch die sogenannte „Uhrvergleichung". Man versteht darunter die Feststellung der Angabe einer Uhr nach h Stunden, m Minuten, s Secunden im Momente, wo eine andere Uhr gerade $h_{,}$ Stunden, $m_{,}$ Minuten und $s_{,}$ Secunden zeigt.

Bei einer gewöhnlichen Thurmuhr, die man blos hören, deren Zifferblatt man aber nicht ablesen kann, und einer Sternuhr oder einem mittlere Zeit zeigenden Chronometer wird dies nach folgender Methode geschehen können. Man stellt sich mit dem Chronometer so auf, dass man die Thurmuhr deutlich schlagen hört, und merkt sich vorläufig bei einer bestimmten Angabe der letztern ungefähr die Zeigerstellung des Chronometers. Erstere habe z. B. 10^h und noch halb geschlagen und man habe gefunden, dass dies nahezu um die Zeit $6^h\ 5^m$ des Chronometers stattfand. Giebt die Thurmuhr nun Viertelstunden an und will man wissen, wie viel das Chronometer zeigen muss, wenn jene $10\frac{3}{4}^h$ schlägt, so wird man sich ein oder zwei Minuten vor dem erwarteten Schlagen der Thurmuhr der vorläufigen Beobachtung gemäss etwa um $6^h\ 5^m + 13^m$ oder um $6^h\ 18^m$ nach der Chronometerzeit

bereit halten müssen. Das Chronometer schlage ganze Secunden. Da es bei einer Thurmuhr auf einen Bruchtheil einer Secunde nicht ankommt, so kann man jetzt nur den Secundenzeiger des Chronometers mit dem Auge verfolgen; dieses wird genau im Stande sein, die Zeiger im Momente, wo die Thurmuhr drei Viertel schlägt, zu erkennen, um die Stunde, Minute und Secunde notiren zu können, womit die Aufgabe gelöst ist. Es ist dies eine Methode, bei welcher das Auge insbesondere das Zifferblatt zu verfolgen hat. Eine bessere und allseitiger anwendbare Methode ist dagegen die, wo man zunächst mit dem Ohre den Moment des Zusammentreffens zweier Uhrschläge wahrnimmt, in diesem Momente „Null“ zählt, sodann nach den Chronometersecundenschlägen „eins“ „zwei“ „drei“ etc. eine beliebige Anzahl Secunden weiter zählt, hierbei mit dem Auge das Zifferblatt fixirt, und schliesslich von einer, mit dem Auge deutlich erkannten, Stellung der Zeiger die Anzahl Secunden abzieht, die man von jenem Momente „Null“ an in Gedanken fortzählte. Ist z. B. die Thurmuhr nahe daran $\frac{3}{4}$ zu schlagen: so halte man sich bereit um das Tempo der Secundenschläge des Chronometers zu vernehmen; sobald die Thurmuhr schlägt, zähle man 0, 1, 2, 3 .... fort und sehe auf das Chronometer; es zeige dies bei der als „17“ gezählten Secunde $6^h\ 25^m\ 13^s$, so ist klar, dass der Moment des Chronometers der mit dem $\frac{3}{4}$ Schlag der Thurmuhr coincidirte, $6^h\ 23^h\ 13^s - 17^s = 6^h\ 22^m\ 56^s$ war. Diese Methode ist namentlich da die einfachste, wo die eine Uhr gar nicht schlägt, z. B. bei einem Vergleiche einer Taschenuhr mit einem Chronometer. Will man diese Uhren vergleichen, so wähle man sich einen passenden Stand der Taschenuhr: Stunde und eine volle Minute aus; sobald das Auge diese Minute vom Zeiger erreicht sieht, zählt man wieder „Null“ und 1, 2, 3, . . nach dem Chronometersecundentempo weiter bis zu einem bestimmten vom Chronometer angegebenen Momente, um von diesem die gezählten Secunden wiederum abzuziehen.

Wenn eine Thurmuhr mit einer Taschenuhr verglichen werden soll, und letztere keinen Secundenzeiger besitzt, so kann man sich auf andere Weise helfen. Man sucht nämlich durch Vergleichung der Taschenuhr mit einem andern Secundenzähler herauszubekommen, wie viel Schwingungen die Unruhe der Uhr macht, was leicht gefunden werden kann, wenn man die Taschenuhr hierbei ans Ohr hält um ihren Tik-Tak zu vernehmen. Gesetzt es wären dies in einer Minute 150. Soll nun die Thurmuhr mit der Taschenuhr verglichen werden, so nehme man diese kurz vor dem betreffenden Schlage der Thurmuhr vor das Auge und fange mit einer vollen Minute derselben, indem man sie zugleich rasch an das Ohr bringt und nach dem Tempo der Unruhe 0, 1, 2 . . . etc.

weiter zählt, bis eben der Schlag der Thurmuhr erfolgt. Hat man z. B. bei 6^h 25^m die Taschenuhr ans Ohr gebracht und muss bis 170 zählen bis die Thurmuhr schlägt, so entspricht diesem Schlage der Moment $6^h\ 25^m + \frac{170^m}{150} = 6^h\ 26^m\ 8^s$.

Bei diesen Vergleichungen einer Thurmuhr oder einer Taschenuhr unter sich oder mit einem Chronometer kommt es auf die allergrösste Genauigkeit nicht an. Diese wird aber zur Regel zu machen sein, da, wo für genaue Zeitbestimmungen eine solche Vergleichung zweier astronomischen Uhren entweder zweier Sternuhren oder zweier mittlere Zeit angebenden Uhren oder einer Sternuhr mit einer der zweiten Art stattfinden muss. Die Secundenschläge zweier gleichartigen Uhren müssten wenn sie in einem bestimmten Momente zusammenfielen und die Uhren genau denselben Gang gemeinsam behielten, auch ferner zusammenfallen. Keine zwei Uhren der Welt aber werden selbst nur auf einige Tage dieses Zusammengehen zeigen, sondern nach einem solchen Momente des Zusammentreffens zweier Secundenschläge mehr und mehr auseinander gerathen, um nach einer weiteren Zeit sich wieder mit ihren Secundenschlägen zu nähern und schliesslich in einem Momente wieder zusammenzutreffen u. s. w. Diese „Coincidenzen", wie wir sie nennen wollen, werden um so häufiger in einer gewissen Zeit eintreten, je mehr das Tempo der Secundenschläge verschieden ist, je mehr sich die eine Uhr gegen die andere in einer gewissen Zeit verspätet. Gesetzt, die eine Uhr liefe täglich gegen genaue Sternzeit um 4,5 Secunden vor, die andere um 2,3 Sec. nach, so wären beide in einem Tage um 6,8 Sec. auseinander in einer Stunde um $\frac{6,8}{24}$ Sec. Fielen nun die Schläge in einem bestimmten Momente zusammen, so würde dies wieder geschehen sobald

$$\frac{6,8\,.\,x}{24} = n,$$

worin n eine ganze Zahl Secunden, x dagegen eine Zahl bedeutet, die für unseren Fall sich zu $n\,\frac{24}{6,8}$ Stunden oder $n\,.\,(3^h\ 31^m\ 46^s)$ berechnet, denn allemal wird eine Coincidenz erfolgen, wenn die Differenz der beiden Uhren eine Secunde beträgt. Solche Coincidenzen sind nun die Momente, die man wählt, um die zusammengehörigen Stände zweier Uhren zu finden. Wäre man in der Lage ganz genau den Moment zu erkennen, wo die Secundenschläge zusammenfielen, so brauchte man blos die Zeiger der einen Uhr in diesem Momente zu notiren, in Gedanken 0, 1, 2, 3, ... nach der anderen Uhr fortzuzählen und die gezählten Secunden von dem Stande der letzteren, bei dem man

zu zählen aufhörte, abzuziehen. Aber es ist nicht möglich, den betreffenden Moment absolut genau zu treffen, wiewohl das Ohr bei solchen „trocknen" Schlägen zweier Pendel im Stande ist, dann noch zwei Schläge als von einander verschieden zu erkennen, wenn sie nur um $\frac{1}{50}$ Secunden auseinander liegen. Die obigen Pendel differirten in 12706 Secunden um einen Schlag, d. h. während die eine 12706 Schläge macht, macht die andere einen weniger. Die nächsten beiden Schläge nach jeder Coincidenz differiren also um $\frac{1}{12706}$ Secunden, die folgenden beiden Schläge um $\frac{2}{12706}$, die folgenden um $\frac{3}{12706}$ Secunden u. s. w.; die Differenz $\frac{1}{50}$ wird mithin erst erreicht nach $\frac{12706}{50}$ d. h. nach nahezu 240 Secunden oder 4 Minuten. Vor dem Momente jeder völligen Coincidenz werden demgemäss 4 Minuten kommen, innerhalb deren das Ohr nicht im Stande ist, das Nebeneinander von dem wirklichen Zusammensein der Schläge zu unterscheiden; ebenso wird dies auch 4 Minuten nach dem Momente jeder Coincidenz der Fall sein und wird es demnach bei den beiden vorausgesetzten Uhren allemal innerhalb 8 Minuten dem Ohre nicht möglich sein, die Pendelschläge beider Uhren als deutlich von einander verschieden zu erkennen. Es wird also ein solches Ohr im Maximum einen Fehler begehen können gleich $\frac{1}{50} = 0{,}02$ Secunden, welcher Fehler lediglich von der Natur des Ohrs und nicht etwa vom Tempo der Uhren abhängt, während dieses letztere in Verbindung mit dem Maximum des Ohrfehlers in der Weise wie wir zeigten, die Zeit der Unsicherheit bestimmt. Ein Ohr das oft solche Uhren vergleicht, wird in Wirklichkeit auch häufig vielleicht noch einen geringeren Fehler wie 0,02 begehen und es ist klar, dass es selbst beim Vergleichen von astronomischen Uhren nicht darauf ankommt, gerade den absoluten Moment der Coincidenzen zu treffen, sondern nur einen solchen, der innerhalb der „Unsicherheits-Grenzen" liegt, wenn wir diese 8 Minuten, oder allgemein die Zeit die den 8 Minuten in unserem jetzigen Beispiele entspricht, so nennen wollen.

Diese Unsicherheitsgrenzen werden in jedem einzelnen Falle andere sein und um so näher an einander liegen, je mehr die Pendel von einander abweichen. Sehen wir zu, wie sich dieselben beim Vergleich einer Pendeluhr, die nach Sternzeit geht, und einer solchen die mittlere Zeit angiebt, z. B. einem Chronometer gestalten. Die Sternsecunden sind etwas kürzer als die mittleren Zeitsekunden und zwar

ist wie wir im nächsten Abschnitte sehen werden t Sternzeit $= 0{,}9973\,t$ mittlere Zeit und umgekehrt t mittlere Zeit gleich $1{,}0026\,t$ Sternzeit. Lassen wir nun zwei solche Uhren nebeneinander gehen, so werden ihre Schläge nach einem stattgehabten Zusammentreffen wiederum zusammentreffen, so oft

$$(1 - 0{,}9973)\,x = 0{,}0027\,x = n$$

oder

$$x = \frac{n}{0{,}0027} = 370\,n$$

ist also allemal nach 370 Secunden oder 6 Minuten und 10 Secunden. Die halbe Unsicherheitszeit mit τ bezeichnet, ist demnach zu berechnen nach der Gleichung

$$0{,}0027\,\tau = \frac{1}{50}$$

d. h.

$$\tau = \frac{1}{50 \cdot 0{,}0027} = 7{,}^{s}4$$

Secunden. Schlägt das Chronometer wie unser Marburger Chronometer nicht ganze Secunden, sondern halbe, so ist klar, dass schon in der Hälfte der Zeit also alle $3^{m}\ 5^{s}$ eine Coincidenz erfolgt und hiermit auch die Zeit τ von $7.^{s}4$ auf $3{,}^{s}7$ herabsinkt.

Um hier schon zu zeigen, wie eine genaue Vergleichung unseres Chronometers von Kessels, einfach mit K bezeichnet, mit der Pendeluhr von Schmidt, mit S bezeichnet, ausfällt, wollen wir folgendes Beispiel beachten. Am 30. Dec. 1869 wurden nach der oben angegebenen Methode, gemäss derer man in einem von dem Chronometer angegebenen Momente des Zusammentreffens „Null", dann nach der Sternuhr, „Eins", „Zwei" etc. weiter zählte und dann von einem bestimmten Stande der letzteren Uhr die fortgezählten Secunden abzog, folgende Coincidenzen beobachtet:

K	S
$4^{h}\ 22^{m}\ 30{,}^{s}0$	$0^{h}\ 17^{m}\ 40{,}0$
25 35, 5	20 46,0
28 35, 0	23 46,0

Diese drei Coincidenzen können zunächst auf ihre Richtigkeit geprüft werden. Erstens muss, da es aufeinanderfolgende sind, zwischen diesen nach Obigem eine Zeit von etwa 3 Minuten liegen, was sich zeigt; zweitens müssen bei K Coincidenzen mit halben Secunden zwischen solchen mit ganzen liegen, was ebenfalls der Fall ist; drittens muss die Zeit von zwei aufeinanderfolgenden Coincidenzen von S allemal um eine halbe Secunde grösser ausfallen wie bei K, was auch der Fall ist. Diese drei Proben erweisen die gemachte Beobachtung als brauchbar. Für die Vergleichung der Uhren ist nach unserer

bis jetzt angestellten Betrachtung aber eine einzige Beobachtung hinreichend und fragt es sich, warum wir deren mehrere gemacht haben? Ein Grund könnte zunächst darin liegen: in zwei, drei oder mehreren eine bessere Prüfung für die Richtigkeit jeder einzelnen haben zu wollen, da ohne Zweifel, wenn man blos einen einzigen Vergleich macht, dieser hin und wieder fehlerhaft und eine sonst mit demselben verbundene Arbeit vergeblich sein kann. Der Hauptgrund liegt aber darin, dass man im Stande ist aus 2, 3 oder mehr Beobachtungen zwei zusammengehörige Coincidenzen zu berechnen, bei denen die Genauigkeit grösser ist, als bei zwei direkt beobachteten. Um dies zu erreichen, wählt man für eine der Uhren z. B. für Kessels eine zwischen den beiden äussersten Beobachtungen gelegene und blos auf Minuten abgerundete Mittelzeit und nennt diese Zeit die „Epoche", in unserem Falle z. B. $4^h\ 25^m\ 0^s$. Die Correktionen, die wir an die beobachteten Werthe von K anbringen müssen, um auf diese Epoche dreimal zu kommen, sind dann:

$$+\ 2^m\ 30{,}^s0$$
$$-\ 0\ \ 35{,}\ 5$$
$$-\ 3\ \ 35{,}\ 0.$$

Da diese Correktionen aber Mittlere-Zeit-Grössen sind, so müssen sie nach der oben angegebenen Gleichung: $t' = 1{,}0026\ t$ erst in Sternzeitgrössen verwandelt werden. Wir benutzen hierzu einfach die zu diesem Zwecke aufgestellte Tabelle I (A) des Anhangs und erhalten für die ganzen Minuten und Secunden die folgenden nebeneinander stehenden Werthe, die zusammengenommen nun die den obigen drei Werthen entsprechenden Correktionen in Sternzeit sind nämlich:

$$+\ (2^m\ 0{,}^s329 + 30{,}^s082) = +\ 2^m\ 30{,}^s411$$
$$-\ (0\ \ 0{,}000 + 35{,}598) = -\ 0\ \ 35{,}598$$
$$-\ (3\ \ 0{,}493 + 35{,}096) = -\ 3\ \ 35{,}589$$

Bringen wir diese drei nun in Sternzeit ausgedrückten Correktionen an unsere obigen drei Coincidenzzahlen von S an, so kommen wir auf die drei der Epoche von $K = 4^h\ 25^m\ 0^s$ entsprechenden Zeiten von S nämlich:

$$0^h\ 20^m\ 10{,}^s411$$
$$0\ \ 20\ \ 10{,}402$$
$$0\ \ 20\ \ 10{,}411$$

aus welchen sich das Mittel

$$0^h\ 20^m\ 10{,}^s408$$

berechnet. Hiermit sind wir aber zu den offenbar genaueren Coincidenzzahlen

K	*S*
$4^h\ 25^m\ 0^s$	$0^h\ 20^m\ 10{,}^s408$

gelangt.

Diese Art von Berechnung wird später uns wieder begegnen und können wir dann auf unsere jetzigen Betrachtungen und Berechnungsarten nur einfach hinweisen.

§. 11. Wir wollen hier noch einige Bemerkungen über die Güte der astronomischen Uhren und deren Behandlungsweise folgen lassen. Eine astronomische Pendeluhr, wie sie zu eigentlichen genauen Zeitbestimmungen benutzt wird, soll an einem festen Orte ihre Aufstellung erhalten, am besten an einem steinernen Pfeiler und zwar so, dass vom Boden aus sich keine Erschütterungen nach ihr hin fortpflanzen können. Eine solche Uhr wird von Zeit zu Zeit mit frischem Oel versehen werden müssen und überlässt man am besten dieses Einölen einem erfahrenen Uhrmacher, der auch dafür sorgen wird, dass das, von ihm verwandte Oel die gehörige Beschaffenheit hat; am besten wohl Oel von völlig reifen Oliven, deren Behandlungsweise nach der vom Uhrmacher Laresch in Paris im Jahre 1828 bekannt gemachten, und im 29. Bande von „Dinglers polytechnischem Journal" Seite 126 beschriebenen Methode nachgelesen werden kann. Da man über den Gang und den Stand einer astronomischen Uhr sich immer unterrichtet halten muss, so versteht es sich von selbst, dass das Aufziehen derselben in ununterbrochener Regelmässigkeit geschehen muss, und besorgt auch dies am zweckmässigsten ein Uhrmacher. Die Genauigkeiten der Pendeluhren sind natürlich verschieden; doch kann man sagen, dass eine gute astronomische Pendeluhr wohl keinen grösseren täglichen Gang haben dürfe wie 1—2 Secunden; aber wenn auch die auf verschiedenen Sternwarten befindlichen Uhren in höchster Vollendung diesen geringen Gang und wohl noch einen viel geringeren zeigen, so darf man nicht vergessen, dass solche Instrumente nicht jedem zu Gebote stehen und man auch mit Uhren die oft einen stärkeren Gang haben, zufrieden sein kann und darf.

Besondere Aufmerksamkeit muss man auf die Behandlungsweise eines Chronometers verwenden, namentlich falls dasselbe darauf Anspruch machen darf, aus der Werkstatt eines unserer ersten Künstler auf diesem Gebiete hervorgegangen zu sein, und der Preis eines solchen Apparates allein schon zur Vorsicht mahnt. Dieser wird sich wohl bei vollendeten Boxchronometern zwischen 350 bis 550 Thalern bewegen. Wird man bei einer astronomischen Pendeluhr das Einölen am besten einem Uhrmacher überlassen, so ist bei einem solchen Chronometer diese Operation unter keinen Umständen selbst vorzunehmen, sondern der Apparat wird zu dem Zwecke der Werkstatt zu übersenden sein, aus der er hervorgieng, oder, wo dies nicht möglich ist einem Uhrmacher übergeben werden müssen, bei dem man sicher ist, dass er

diejenige Erfahrung besitzt, welche die Behandlung eines so theueren Instrumentes verlangt.

Das Placiren eines solchen Chronometers ist nicht gleichgültig und muss vor allem an einem trocknen Orte stattfinden. Muss es von einem Orte zum andern transportirt werden, so geschieht dies so, dass man es, in den Händen haltend, fortträgt oder bei einer Fahrt zu Lande auf die weiche Unterlage eines Kissens aufsetzt, durch welches sich die Erschütterungen nicht fortpflanzen. Zur See bekommt ein derartiges Instrument natürlich eine Aufhängung nach Art eines Compasses. Auch ist die Richtung nicht gleichgültig, in der man ein Boxchronometer in seinem Kasten hinstellt, da der Erdmagnetismus von Einfluss auf die Stahltheile angenommen werden könnte, und so bei einer wechselnden Stellung ein unregelmässiger Gang zu erwarten wäre. Muss das Chronometer verschickt werden, so gebe man es nur in ganz sichere Hände und trage Sorge, dass nach Ablauf des Uhrwerks die Unruhe durch etwas Papier festgestellt wird, da sie sonst bei den Erschütterungen Schaden leiden könnte. Noch ist darauf aufmerksam zu machen, dass man das Chronometer nicht bedeutendem Temperaturwechsel plötzlich aussetzen darf. Denn wenn auch durch die Compensation die Temperatureinflüsse beseitigt werden, so wird dies doch nicht absolut vollständig geschehen und wird namentlich wegen des Oels, wenn dieses plötzlich eine bedeutend andere Temperatur erfährt, die Reibung verändert und so der Gang ein unregelmässiger werden können.

Ein vollendetes Chronometer wird einen täglichen Gang von etwa einer Secunde haben; Taschenchronometer vielleicht im Maximum 7—8 Secunden. Die Veränderung des Gangs bei einer solchen Uhr wird den Zeitpunkt erkennen lassen, wo man dieselbe einer neuen Einölung zu unterwerfen hat.

§. 12. Zum Schlusse dieses Abschnittes mögen noch einige Angaben zur Literatur folgen. Der im Vorausgehenden besprochene Gegenstand ist ein so wichtiger und allseitig bedeutungsvoller, dass man eine reichhhaltige Literatur erwarten kann, doch liegt es uns ferne, auch nur einigermassen dieselbe hier vollständig angeben zu wollen; unsere Absicht ist vielmehr dem mit dem Studium dieser Lehren beschäftigten Leser eine Erleichterung im Auffinden derselben zu gewähren. Eine Schrift haben wir schon wiederholt angeführt: nämlich das classische Werk von Urban Jürgensen: „die höhere Uhrmacherkunst etc.“ Kopenhagen 1842 mit einem Atlas von 23 Tafeln. Dieses Werk enthält über Pendeluhren und Chronometer im Ganzen und deren einzelne Theile die genauesten Details und erfordert ein aufmerksames Studium insbesondere von Seiten Derer, die mit den Einrichtungen der Uhren

noch wenig vertraut sind, die aber dann auch durch dasselbe eine reiche Belehrung erhalten werden. Eine sehr vollständige Darstellung dieses Zweiges der Wissenschaft und Kunst enthält ferner unter dem Artikel „Uhren" der schon angeführte 19. Band von Prechtl's „Technologischer Encyclopädie etc." mit den Figurentafeln 460—485. Ferner müssen wir hier nennen den vortrefflichen von G. Karsten, Harms und Weyer bearbeiteten Band I. der „Allgemeinen Encyclopädie der Physik", nämlich die „Einleitung in die Physik" von Seite 607 an bis 648. Auf diesen Blättern ist zunächst eine übersichtliche und lichtvolle Darstellung aller Arten von Zeitmesser zu finden, so dass der Leser über Sonnenuhren, Wasseruhren, Sanduhren und eine Reihe anderer Einrichtungen im Allgemeinen sich unterrichten kann. Aber mehr noch wie dieser allgemein gehaltene Text verdient die Zusammenstellung der Literatur hervorgehoben zu werden, denn kaum dürfte irgend eine andere Zusammenstellung mehr bieten als diese und wird Jeder, der im Allgemeinen oder im Speciellen anfragt: ob über Dies oder Jenes die betreffende Literatur Etwas aufzuweisen habe, beim Nachsehen des genannten Verzeichnisses die beste Antwort erhalten. Was die Sonnenuhren anlangt, so empfehlen wir dem mathematisch gebildeten Leser die kleine Schrift von Dr. R. Sonndorfer „Theorie und Construktion der Sonnen-Uhren". Wien 1864, bei W. Braumüller. Ferner nennen wir hier ein Schriftchen von H. Göring „Die Sonnenuhr oder praktische Anleitung, die Zeit zu bestimmen etc." Arnsberg 1864, bei H. F. Grote. Als Geschichte der Uhrmacherkunst wollen wir einmal die Schrift von Poppe nennen „Ausführliche Geschichte der theoretisch-praktischen Uhrmacherkunst etc." Leipzig 1801. In diesem interessanten Werke wird der Leser sich über die Entwickelung der Methoden die Zeit zu bestimmen belehren können; aber es wird wohl nicht mehr im Buchhandel zu haben sein, sondern nur auf antiquarischem Wege erlangt werden können. Weiterhin nennen wir hier das Schriftchen von F. W. Barfuss: „Geschichte der Uhrmacherkunst von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage", Weimar 1827, Bernh. Friedr. Voigt. In Betreff der Zeitmessung mit Hilfe des electrischen Stroms haben wir schon oben die nöthigen Mittheilungen gemacht.

Kapitel II.

Die verschiedenen Zeitarten.

§. 13. Die Zeit als solche ist nur eine einzige und wird in Rücksicht auf sie nicht von verschiedenen Qualitäten die Rede sein können. Was wir als eine Zeitart bezeichnen und im Unterschiede von einer anderen auffassen, ist blos etwas quantitativ Besonderes, insofern dabei ein bestimmter Maassstab benutzt wird: verschieden von dem bei anderen Zeitmessungen gebräuchlichen und insofern als im einen Falle die Grenzen, innerhalb derer dieser Massstab zur Anwendung kommt, andere sind wie in einem zweiten.

In diesem Sinne aufzufassende Zeitarten gäbe es unzählich viele, jedoch werden in der Astronomie nur drei verschiedene berücksichtigt: nämlich die „wahre Sonnenzeit", die „mittlere Sonnenzeit" und die „Sternzeit".

Die „wahre Sonnenzeit" ist diejenige Zeitart, deren Theile durch die Stellungen der „wahren Sonne": der Sonne wie sie uns Licht und Wärme zuführt, abgegrenzt werden. Von diesen Stellungen sind besonders zwei merkwürdig und wichtig: nämlich die Stellungen zwischen denen sich die Sonne scheinbar über und unter unserem Horizont bewegt und es bei uns Tag und Nacht ist, also die Stellungen: „Aufgang" der wahren Sonne und „Untergang" derselben. Zwischen dem Auf- und Untergange in der Mitte liegend, ist eine dritte Stellung bemerkenswerth, wo die wahre Sonne ihren höchsten Stand über dem Horizonte erreicht, ein Moment, den man auch mit dem Namen der „oberen Culmination der wahren Sonne", oder auch mit dem Namen des „wahren Mittags" bezeichnet, im Gegensatze zur „unteren Culmination" oder der „wahren Mitternacht", die der tiefsten Stellung der Sonne unter dem Horizont entspricht. Gerade diese dritte Stellung der Sonne, der wahre Mittag, ist es nun, von dem aus man in der Astronomie oft zu rechnen pflegt. Zwischen einem dieser Momente und dem nächsten, liegt eine Zeitstrecke, die man mit dem besonderen Namen des „wahren Sonnentags" bezeichnet im Gegensatze zu dem, was man sonst im Leben als wahren Sonnentag zu bezeichnen hätte, und was dann die Zeit vom Aufgange der wahren Sonne bis zu ihrem Untergang wäre. Der Astronom pflegt im Momente der Culmination der wahren Sonne, für welche wir

in Zukunft einfach auch das Zeichen ⊙ gebrauchen werden, Null und von hier „eins“ „zwei“ . . . „vierundzwanzig“ bis zur nächsten Culmination zu zählen. Diese vierundzwanzig (gleiche) Abtheilungen des wahren Sonnentags nennt er „wahre Sonnenstunden“, und theilt jede von diesen wiederum in 60 wahre Sonnenminuten und jede von diesen wieder in 60 wahre Sonnensekunden.

Da es uns nun im Folgenden wesentlich auf richtige Vorstellungen und Begriffe ankommt, so müssen wir sowohl die wahren Bewegungen als auch die Scheinbewegungen betrachten, und diesen entsprechend zunächst das, was wir mit dem Namen Culmination bezeichneten, auffassen.

Man kann nun dreierlei Anschauungsweisen ausbilden: Erstens die Anschauungsweise, die den wahren Bewegungen allein entspricht. Nach ihr steht die Sonne fest, und bewegt sich um sie die Erde innerhalb eines Jahrs in einer Ellipse, indem sie gleichzeitig hierbei innerhalb eines Tages um ihre Axe rotirt. Halten wir hieran fest, so dürfen wir in unseren Erläuterungen strenggenommen nur von Erdbewegungen reden, während wir Ausdrücke wie „die Sonne bewegt sich“, „die Sonne steigt höher über den Horizont“ etc. eigentlich vermeiden müssten. Dieser Vorstellung gemäss versteht man nun unter dem „wahren Sonnentage“

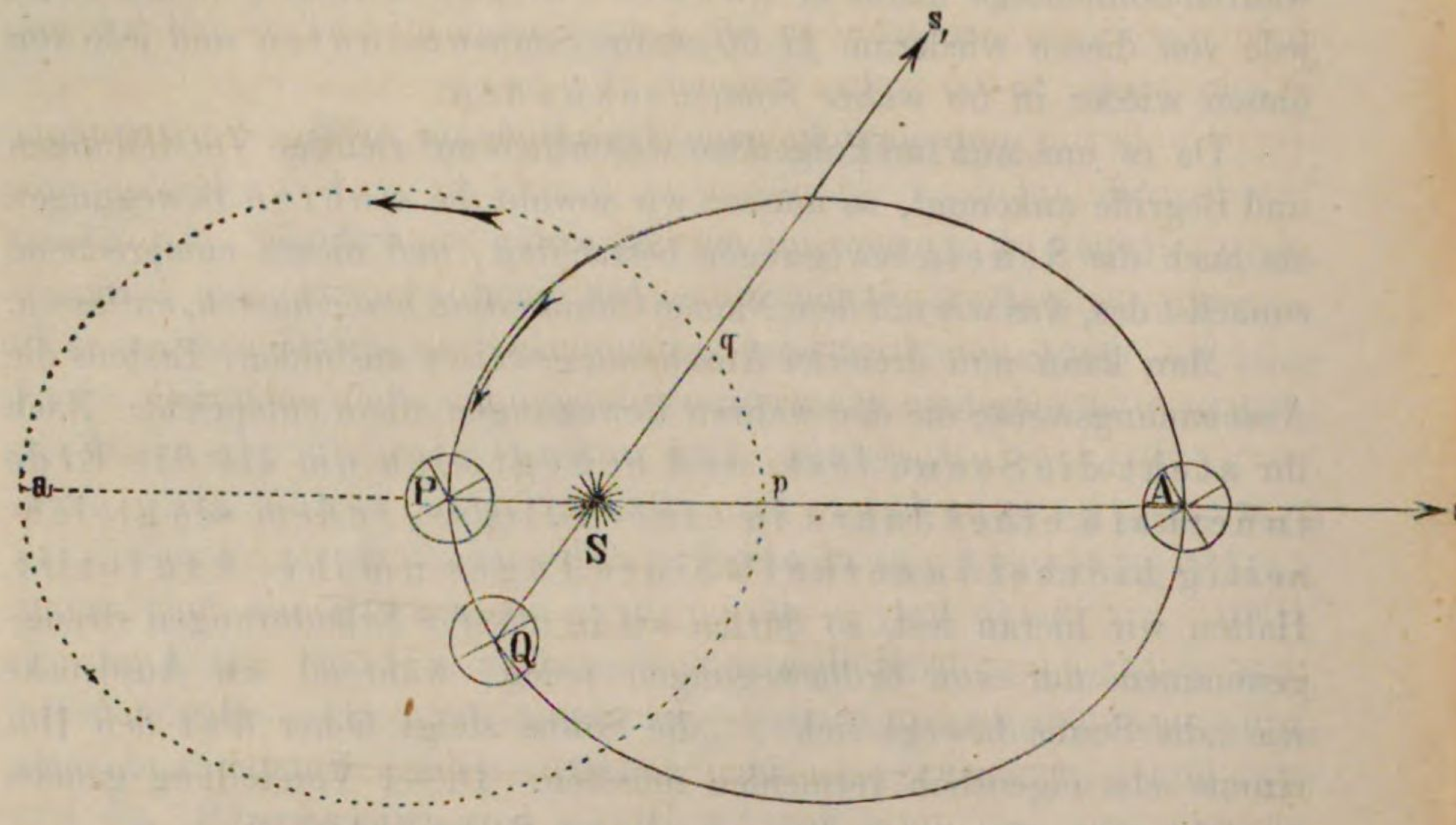
> „die Zeit, die während der Rotation der Erde um „ihre Axe und der gleichzeitigen Progressivbe- „wegung der Erde in ihrer elliptischen Bahn ab- „gegrenzt wird zwischen zwei aufeinander folgen- „den Momenten, in denen ein bestimmt gedachter „Erdmeridian durch den Mittelpunkt der Sonne „hindurchgeht,

wobei daran festzuhalten ist, dass die Progressivbewegung der Erde im Weltraum in demselben Sinne erfolgt, wie die von uns am Himmel wahrgenommenen Sternbilder des Thierkreises: Widder, Stier, Zwillinge etc. auf einander folgen, und weiterhin zu beachten ist, dass auch die Rotation der Erde um ihre Axe in demselben Sinne sich vollzieht.

Die Erscheinungen, welche nach dieser Vorstellungsart erklärt werden, lassen sich zweitens auch erklären, wenn man annimmt: die Sonne laufe innerhalb eines Jahrs in einer Ellipse um die Erde, die Erde selbst aber stehe mit ihrem Mittelpunkte in einem Brennpunkte der Ellipse fest, rotire aber um ihre Axe: wenn man also eine Progressivbewegung der Sonne und blos eine Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe annimmt. In der Definition vom wahren Sonnentag hat man in Folge dessen nur den Ausdruck „Progressivbewegung der Erde“

in „Progressivbewegung der Sonne“ zu verwandeln. Bei der ersten Vorstellung steht demnach Fig. 19, die Sonne unbeweglich in *S*, die

Fig. 19.

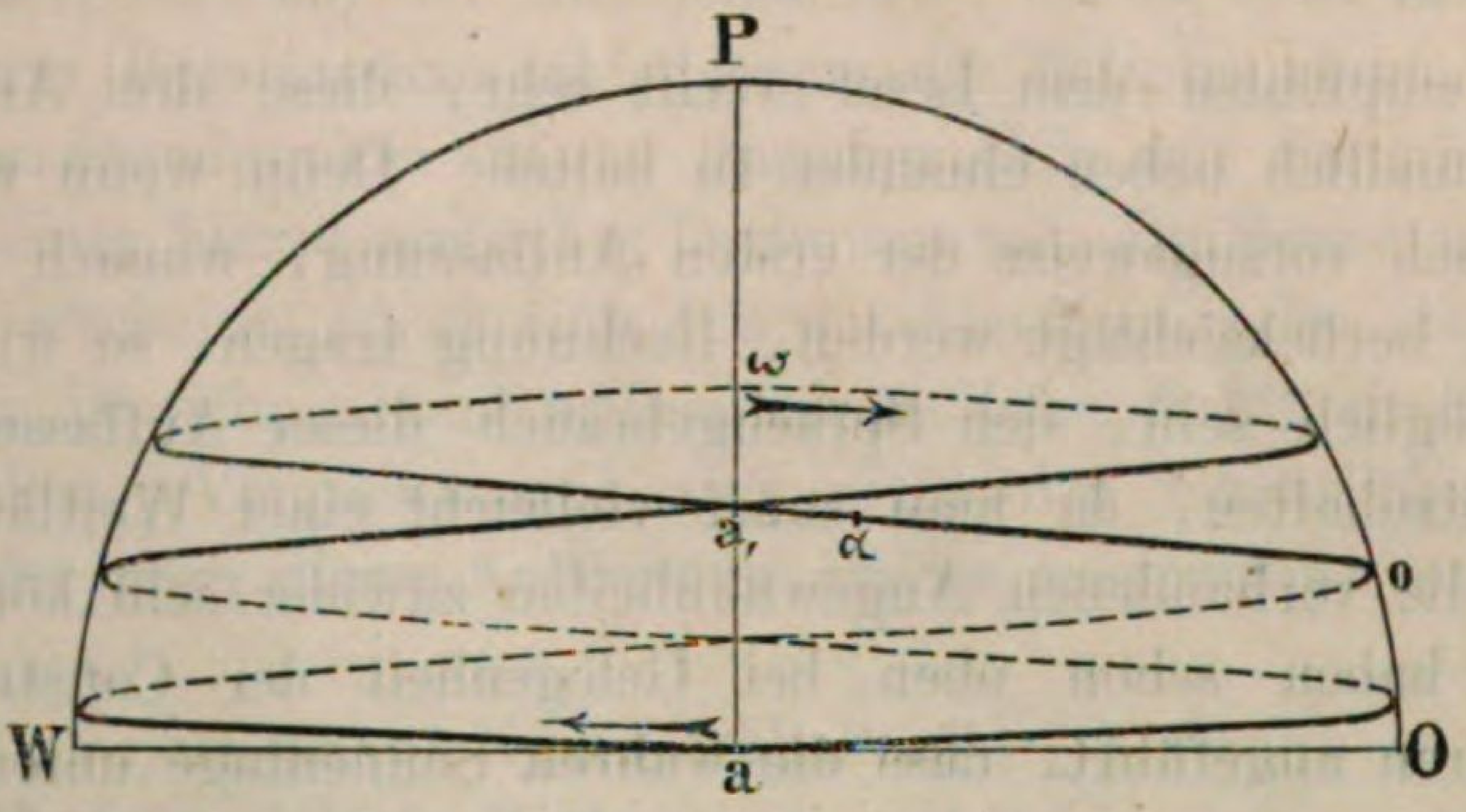


Erde zur Zeit des Wintersolstitiums in *P*, zur Zeit des Sommersolstitiums in *A* und wird bei ersterer Stellung die Sonne beim Fixstern *s* gesehen; bewegt sich die Erde von *P* nach *Q*, so rückt scheinbar die Sonne vom Fixstern *s* nach dem Sterne *s,*. Nach der zweiten Vorstellung, wenn wir uns bei *S* die Erde denken, müssen wir zur Zeit des Wintersolstitiums die Sonne in *p* annehmen und in der punktirt gezeichneten Ellipse jährlich in demselben Sinne wie vorhin die Erde in der ausgezogenen Ellipse herum laufen lassen. Einer Bewegung der Erde von *P* nach *Q* entspricht also jetzt eine Sonnenbewegung von *p* nach *q*. Tag und Nacht aber entsteht durch Rotation der in *S* aufgestellten Erde um ihre Axe.

Eine dritte Vorstellungsart ist denkbar, der gemäss die Erde weder eine Progressiv- noch eine Rotationsbewegung macht und nur eine Bewegung der Sonne zugelassen wird, die aber von der vorausgehenden wesentlich verschieden gedacht werden muss, wenn die Erscheinungen in derselben Weise stattfinden sollen. Um Tag und Nacht zu erklären, denken wir ihr gemäss die Sonne täglich um die Erde rotirend und zwar in entgegengesetzter Richtung, wie die Erde eigentlich um ihre Axe rotirt. Fände diese Rotation nun jahraus jahrein in demselben Kreise statt, so ist klar, dass von Jahreszeiten nicht die Rede sein könnte. Um sie hervorzubringen, muss die Sonne vom Aequator aus nach Norden und Süden wandern um von hier wenn sie

den nördlichen oder südlichen Wendekreis erreicht hat, sich wieder dem Aequator zuzuwenden d. h. sie muss innerhalb Jahresfrist zwischen den Wendekreisen einmal hin und her wandern. Um auch dieses zu ermöglichen, lassen wir die Sonne in einer Spirale, deren Anzahl Windungen wir sogleich angeben werden, vom Aequator aus nach dem Pol hin auf- und von hier wieder in einer weiteren Spirale herabsteigen etwa so wie in einigen Windungen in Figur 20 angedeu-

Figur 20.



tet ist, wo von *a* aus in der Richtung des Pfeils das Aufsteigen bis *w* erfolgt und von hieraus in der Richtung des zweiten Pfeils das Abwärtssteigen eintritt. Dass diese Spirallinie, welche die Sonne beschreibt, keine gewöhnliche cylindrische Schraubenlinie sein kann, versteht sich von selbst; denn erstens ändert die Sonne ihre Entfernung von der Erde und zweitens ist das Fortbewegen nach dem Wendekreis hin kein gleichmässiges, da z. B. 1870 die tägliche Declinationsänderung der Sonne vom 17/18. März 23′ 42″, dagegen vom 20/21. Juni nur 4″ beträgt, demgemäss also die Windungen der Spirallinie nach den Wendekreisen immer näher aufeinander rücken müssen. Hiermit würden die Jahreszeiten erklärt werden können; aber noch eine weitere Erscheinung muss ihre Erklärung finden, nämlich das scheinbare jährliche Wandern der Sonne durch die Sternbilder des Thierkreises. Um dieses zu erklären, nehmen wir einfach an, dass der tägliche Umlauf der ⊙ um die Erde etwas l a n g s a m e r vor sich gehe, wie der in demselben Sinne scheinbar sich vollziehende Umlauf des Fixsternhimmels. Steht z. B. die ⊙ beim Aufsteigen von *a* aus bei einem bestimmten Fixstern, so würde sie nach einem vollen Umlauf um die Erde, wenn sie mit der Fixsternumwälzung gleichen Schritt hielte in *a*, ankommen und mit dem betreffenden Fixstern wieder zu derselben Zeit im Meridian, der durch die Erdaxe *aP* und durch *a′* gelegt werden kann, ankommen; verspätet sie sich aber ein klein wenig, so wird sie im betreffenden Momente erst in *α* stehen;

d. h. aber Nichts anderes, als sie wird in der Fixsternwelt ein wenig mehr nach Osten hin fortgerückt erscheinen und jetzt mit einem andern Fixstern zugleich durch den Meridian gehen. Verzögert sich täglich ihr Erscheinen im Meridian, so dass innerhalb eines Jahres diese Verzögerungen 360^0 betragen, so ist klar wie sie hiernach innerhalb Jahresfrist mit allen Sternbildern des Thierkreises zusammen erscheint. Rechnen wir das Jahr zu 365 Tagen, so leuchtet ein, dass vom Aequator aus bis zum Wendekreis und von hier bis wieder zum Aequator je $\frac{365}{4} = 91\frac{1}{4}$ Spiralwindungen angenommen werden müssen.

Wir empfehlen dem Leser recht sehr, diese drei Anschauungsweisen gründlich neben einander zu halten. Denn wenn wir im Folgenden auch vorzugsweise der ersten Auffassung, wonach nur Erdbewegungen berücksichtigt werden, Rechnung tragen, so wird es nicht immer möglich sein, den Sprachgebrauch dieser Auffassung gemäss streng festzuhalten, da man sonst vielleicht einer Weitläufigkeit begegnete, die vorhandenen Angewohnheiten zuwider sein könnte.

Wir haben schon oben bei Gelegenheit der Construktion der Sonnenuhren angeführt, dass die wahren Sonnentage unter sich nicht gleich sind: erstens nämlich, weil die Erde sich nicht in einem Kreise sondern in einer Ellipse um die ⊙ bewegt, und zweitens weil die Erdaxe auf der Eckliptikebene nicht senkrecht steht, sondern mit ihr einen Winkel von $66\frac{1}{2}^0$ bildet. Da dies der Fall ist und diese Ungleichheiten ein complicirtes Gesetz befolgen, so leuchtet ein, dass es nicht wohl möglich ist nach Art einer Pendel- oder Federuhr, einen Mechanismus zu construiren, der diese Unregelmässigkeiten der wahren Sonnentage genau nachahmt. Dagegen ist eine andere Art von Uhren, nämlich die Sonnenuhren und nur diese allein dazu bestimmt, die wahre Sonnenzeit anzuzeigen. Ueber diese Anzeigen sind wir durch das im ersten Capitel Mitgetheilte schon genügend unterrichtet, und wissen insbesondere, dass alle Sonnenuhren keine grosse Genauigkeit der Zeitmessung gestatten. Es wäre daher, wenn wir keinen Ausweg finden könnten, mit Hilfe ihrer nicht möglich etwas Genaues über die wahre Sonnenzeit zu erfahren, was wir nothwendigerweise doch müssen, weil die ⊙ das Treiben der Menschen und der übrigen Natur der Hauptsache nach zu regeln hat und es ja die wahre Sonne ist, die der Astronom zunächst nur beobachten kann.

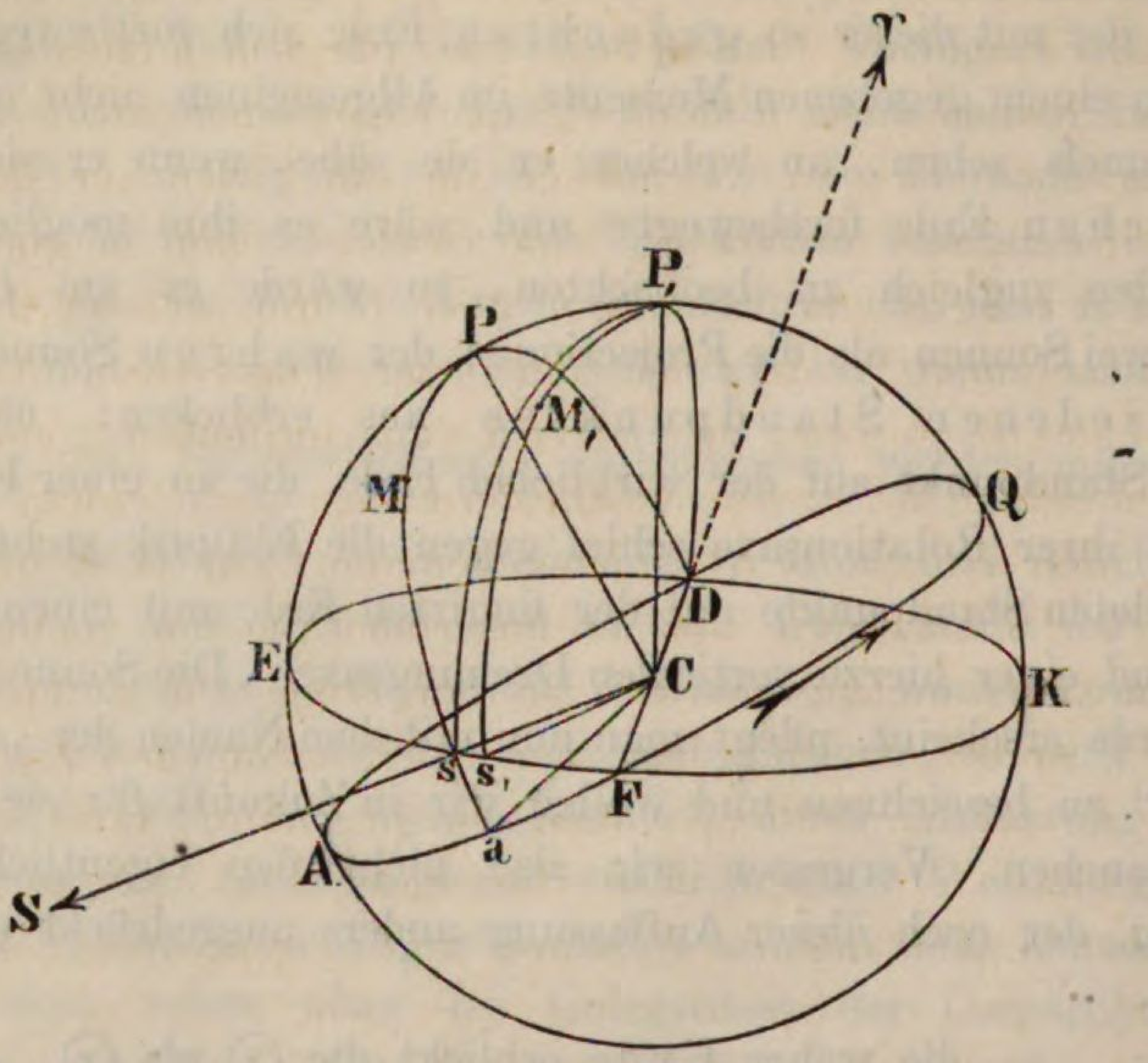
Der Ausweg, den die Astronomie nun gefunden hat und dessen Natur und Bedeutung im Folgenden nach und nach klar werden wird, besteht darin, dass sie die Erdbewegung und die Erdstellung in eine andere verwandelt denkt, als wie sie in Wirklichkeit ist, in der Weise nämlich, dass sie die Erde nicht in einer Ellipse, sondern in einem

Kreise um die ☉ laufen lässt, und ferner so, dass die tägliche Rotation um eine zur Ekliptik senkrechte Axe stattfindet. Ein Bewohner, der mit dieser so gedachten Erde sich fortbewegt, wird die Sonne in einem gegebenen Momente im Allgemeinen nicht an der Stelle des Himmels sehen, an welcher er sie sähe, wenn er sich mit der wirklichen Erde fortbewegte und wäre es ihm möglich auf beiden Erden zugleich zu beobachten, so würde er am Himmel zugleich zwei Sonnen als die Projectionen der wahren Sonne von zwei verschiedenen Standpunkten aus erblicken: nämlich dem wahren Standpunkt auf der wirklichen Erde, die in einer Ellipse lauft, und mit ihrer Rotationsaxe schief gegen die Ekliptik steht, und dem eingebildeten Standpunkte auf der fingirten Erde mit einem Kreise als Bahn und einer hierzu verticalen Drehungsaxe. Die Sonne wie sie auf dieser Erde erscheint, pflegt man nun mit dem Namen der „mittleren Sonne" zu bezeichnen und wollen wir in Zukunft für sie das Zeichen ○ gebrauchen. Vergessen wir also nicht den eigentlichen Zusammenhang, der nach dieser Auffassung anders ausgedrückt auch folgender ist:

die wahre Erde erblickt die ☉ als ☉
die eingebildete Erde „ „ ☉ „ ○.

§. 14. Um nun die Verschiedenheit der Stellungen dieser beiden Sonnen genau aufzufassen, werfen wir zunächst einen Blick auf die Fig. 21. In ihr stellt $AFQD$ den Erdäquator $EFKD$ die Erdekliptik, d. h. den Durchschnitt der Ebene der Erdbahn mit der Erdkugel vor. Diese beiden merkwürdigen Ebenen schneiden sich in einem Durchmesser DF, der während der jährlichen Fortbewegung der Erde parallel mit sich selbst verschoben wird, und in seinen beiden äussersten Lagen in der Richtung CD und CF verlängert gedacht, auf Punkte des Weltraums hinweist, von denen die benachbartesten um den Durchmesser der Erdbahn oder um 42 Millionen Meilen in Wirklichkeit von einander entfernt liegen. Die grosse Entfernung von 42 Millionen Meilen, um welche die Linie FD an den Endpunkten der Erdbahn von einander entfernt zu liegen kommt, würde aus einer ebensolchen Entfernung von 42 Millionen Meilen beobachtet, unter einem Winkel ϱ erscheinen, für welchen $tang\ \frac{1}{2}\varrho = \frac{21000000}{42000000} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\varrho}{2}$ nahe $= 26^{\circ}\ 35'$ wäre. Es ist gelungen, die Entfernungen einiger Fixsterne von der ☉ zu bestimmen, von denen die kleinste gleich 4500000 Millionen Meilen dem Stern α im Centauren, eine viel grössere gleich 54300000 Millionen Meilen dem Polarstern zukommt; nehmen wir nun eine Entfernung gleich der von α Centauri an, und betrachten

Figur 21.



in dieser von C aus unsere 42 Millionen Meilen, so erscheinen diese im Maximum unter einem Winkel ϱ für welchen

$$tang \frac{1}{2}\varrho = \frac{21}{4500000} = 0,00000464;$$

die Tangente von 1 Secunde hat aber den Werth 0,0000048, und folgt hieraus, dass die Strecke des Halbmessers der Erdbahn also die 21 Mill. Meil., in die Entfernung von α Centauri gebracht, unter einem Winkel von etwa 1″ erscheinen würde und ebenso, dass von diesem Fixstern aus der Halbmesser der Erdbahn nur unter einem Winkel von 1″, der Durchmesser der Erdbahn unter einem solchen von 2″ gesehen wird. Denkt man daran, dass die uns bekannt gewordene geringste Entfernung eines Fixsterns gewählt ist, dass der Polarstern 13mal so weit entfernt liegt, so ist einleuchtend, dass der Durchmesser der Erdbahn gleich 42 Mill. Meilen, von der Fixsternwelt aus betrachtet, eine verschwindend kleine Grösse ist, mit andern Worten: dass die ganze Bewegung der Erde in ihrer weiten Bahn von der Fixsternwelt aus nicht wahrgenommen wird, und die Erde, wenn sie überhaupt gesehen werden könnte, nur als ein ruhender Punkt erschiene. Es folgt aber auch ferner hieraus, dass wenn wir CD nach einer Seite hin von C aus bis zur Region der Fixsterne uns verlängert dächten und uns die Punkte alle vorstellten, in welchen CD in dieser Entfernung von der Erde diese Himmelsregion durchschneidet, dass alle diese Punkte als in einen zusammen-

fallend von der Erde aus gesehen werden. In gleicher Weise wird bei der entgegengesetzten Verlängerung von *CD* ein zweiter solcher Punkt am Himmel aufzufassen sein, und pflegt man diese beiden Punkte mit dem Namen der „Nachtgleichenpunkte" zu bezeichnen. Dreht sich die Erde in der Richtung des Pfeils um ihre Axe, so wird nach einiger Ueberlegung klar werden, dass in unserer Zeichnung bei der Verlängerung von *C* über *D* hinaus der „Frühlingsnachtgleichenpunkt" und bei der entgegengesetzten Verlängerung von *C* über *F* hinaus der „Herbstnachtgleichenpunkt" erreicht wird, von denen der erstere bekanntermassen das Zeichen ♈ der letztere das Zeichen ♎ führt. Von ersterem aus zählt man in der Ekliptik die Längen und unterscheidet „Sonnenlängen" und „Erdlängen", welche ersteren in der Folge mit L letzteren mit l bezeichnet werden sollen. Um aber hier schon den Zusammenhang zwischen L und l aufzufassen wird es gut sein, wenn wir uns eine Ellipse zeichnen in einen ihrer Brennpunkte die ☉, in einen beliebigen Punkt des Umfangs die ♁ setzen, und zwei parallele Geraden durch ☉ und ♁ legen, die die Richtung nach dem ♈ nehmen. Betrachten wir nun einmal die ☉ einmal die ♁ als Drehungsmittelpunkt und drehen hierum die Geraden ☉ ♈ und ♁ ♈ im Sinne der Progressivbewegung der Erde, so beschreibt erstere bis sie schliesslich durch die ♁ geht, das was man die „Erdlänge", letztere aber bis sie durch die ☉ geht, das was man die „Sonnenlänge" zu nennen pflegt. Für die Fälle wo $l < 180^0$ ist, ist $L > 180$ und setzen wir fest, dass nur positive Werthe von l und L zulässig sein sollen, so bestehen die Gleichungen:

$$L = 180^0 + l$$
$$l = L - 180.$$

Erreicht aber l einen Werth $> 180^0$ und L Werthe < 180, so würde die letztere der Gleichungen unserer Festsetzung entgegen negative Werthe liefern, die jedoch sofort zu den entsprechenden positiven werden, wenn man 360^0 hinzu addirt. Da in diesem Falle auch $L > 360^0$ wird, so müsste, da wir solche Werthe nicht zulassen, von der rechten Seite der ersteren Gleichung 360^0 abgezogen werden.

Verlängert man die Gerade ♁☉ bis zum diametral entgegengesetzten Durchschnittspunkte mit der Ellipse und schreibt an diesen Punkt ein S', so nennt man diesen Punkt gewöhnlich den „scheinbaren Ort der ☉". Setzt man ebenso an den Durchschnittspunkt der Geraden ☉ ♈ mit der Ellipse ein ♈, so wäre dies als der scheinbare Ort des Frühlingspunkts (von der ☉ aus gesehen) zu bezeichnen. Zählt man von letzterem nun, wie es in den Darstellungen gewöhnlich geschieht die Längen, so ist

$$L = \Upsilon\odot S'; \; l = \Upsilon\odot\text{♁}$$

und wird es gut sein, wenn man diese beiden geometrischen Auffassungen, die selbstverständlich zu denselben Gleichungen führen, neben einander vergleicht.

Unsere Figur 21 stellt die Erde an einem bestimmten Tage des Jahres vor; die Richtung nach dem Frühlingspunkt ist $CD\Upsilon$, die nach der Sonne CsS, so dass diese Richtung nothwendig auch in die Ebene der Ekliptik fällt, und der gegebenen Definition gemäss auch der Bogen zwischen D und s gleich der Länge der $\odot$ ist. Denken wir uns in C eine Gerade CP' senkrecht zur Ekliptik errichtet, so weist diese nach einem Punkte der Himmelskugel, den man den „Pol der Ekliptik" zu nennen pflegt. Legen wir durch diese Axe der Ekliptik zwei Ebenen, von denen die eine durch D, die andere durch s d. h. bei gehöriger Erweiterung durch $\odot$ geht, so bilden auch diese Ebenen mit einander einen Flächenwinkel gleich dem Linienwinkel DCs = der Länge der $\odot$. Legen wir auch durch die eigentliche Erdaxe CP zwei Meridianebenen, die eine durch den Υ die andere durch die $\odot$, so bilden diese Ebenen einen zweiten Flächenwinkel mit einander, den man die „Rectascension" der $\odot$ nennt. In unserer Figur sind es die Ebenen PCD und PCs von denen die letztere den Aequator in a schneidet, so dass auch der Linienwinkel DCa, in der Ebene des Aequators gemessen, gleich der Rectascension der Sonne ist. Wir werden die Rectascension im Folgenden durch ein $Æ$ oder häufig auch durch den Buchstaben α, ferner die „Declination" der Sonne als den Winkel, der in der Meridianebene PCS vom Punkte a des Aequators aus gezählt wird: in unserer Figur also den Winkel aCs mit δ bezeichnen, wobei dieses positiv anzunehmen ist, wenn der betreffende Winkel nach dem Nordende der Erdaxe zu liegt. Die „Breiten" eines Gestirns werden auf den Meridianen der Ekliptik in unserer Figur auf dem Meridian P,Cs gezählt und zwar von der Ebene der Ekliptik $EFKD$ aus. Da die $\odot$ in der letzteren Ebene selbst steht, so folgt dass ihre Breite stets gleich Null anzunehmen ist.

§. 15. Stellt ferner M auf dem Meridiane Psa den Ort eines Erdbewohners mit der geographischen Breite Ma vor, so culminirt für ihn und alle Bewohner auf der Taghälfte des Meridians die $\odot$ im Momente, wo der Figur gemäss, der Meridian durch die $\odot$ geht und diese eine

$$Æ = DCa$$
$$\delta = aCs$$

besitzt. Liessen wir aber in diesem Momente die Erdkugel sich mit ihrer Axe senkrecht auf die Ekliptik stellen, und zugleich sich so stellen, dass die Ebene DPC mit der Ebene DPC zusammenfiele,

so käme der Meridian PMa in eine Lage $P_{,}M_{,}s_{,}$ in der Weise, dass P auf $P_{,}$, M auf $M_{,}$, a auf $s_{,}$ fiele, und der Winkel $DCs_{,}$ gleich dem Winkel DCa gleich der Æ der $\odot$ in der ersten Stellung der Erde wäre. Da die $\odot$ diese Bewegung nicht mit machen, sondern ruhig ihren Ort, den sie am gedachten Tage einnimmt, beibehalten soll, so ist klar, dass in der neuen Lage $M_{,}$ des Beobachters diese $\odot$ in dem Momente, wo sie ihm in M culminirte, nun nicht culminiren kann. Für diese neue Lage der Erde ist für denselben Bewohner die Culmination der $\odot$ schon vorüber; für ihn würde eine Sonne culminiren, die in der Geraden $Cs_{,}$ stände und um den Bogen $ss_{,}$ in der Richtung der Erdrotation verschoben wäre. Legen wir dagegen durch die Axe $CP_{,}$ und die $\odot$ einen Meridian $P_{,}Cs$, so ist klar, dass dem Beobachter in $M_{,}$ bei der neuen Lage der Erde die $\odot$ im Meridian erscheint, wenn dieser in die Lage $P_{,}s$ kommt, das heisst aber Nichts weiter als: dem Beobachter auf der Erde mit einer Erdaxe senkrecht zur Ekliptik gedacht, culminirt die wirkliche Sonne an dem betreffenden Tage etwas früher als dem Beobachter auf der Erde mit schiefer Axe. Denn auf letzterer muss sein Meridian um aus der Stellung $PC\Upsilon$ in die Stellung $PCsa$ zu gelangen, den Winkel DCa beschreiben, bei ersterer aber gelangt er aus der Stellung $P_{,}C\Upsilon$ in der der Υ culminirte, zur Culmination der Sonne, wenn er sich um den Winkel DCs dreht, welcher Winkel um die Grösse $sCs_{,}$ kleiner ist wie DCa. Im Momente der Culmination der $\odot$ bei der fingirten Stellung der Erde, wo der Meridian des Beobachters die Lage $P_{,}M_{,}s$ einnimmt, ist demnach die neue Rectascension gleich der Länge der $\odot$ gleich

$$L = DCs_{,} - sCs_{,} = \text{Æ} - sCs_{,},$$

die neue Declination aber gleich der Breite gleich 0. Dies veränderte Erscheinen der $\odot$ wollen wir nun einer näheren mathematischen Betrachtung unterwerfen, denn es hängt der Winkel $sCs_{,}$, den wir mit $\Delta\alpha_{,}$ bezeichnen wollen, von gewissen Grössen ab. Zu dem Ende beachten wir das sphärische Dreieck saF. In ihm ist

$$\begin{aligned} aF &= 180^0 - \text{Æ} \\ sF &= 180^0 - L \\ \sphericalangle\, sFa &= \varepsilon = \text{„Schiefe der Ekliptik"} \\ saF &= 90^0 \\ sa &= \delta \end{aligned}$$

mithin

$$\cos(180 - L) = \cos(180 - \text{Æ}) \cos\delta + \sin(180 - \text{Æ}) \sin\delta \cos sa(F)$$

oder

$$\cos(180 - L) = \cos(180 - \text{Æ}) \cos\delta$$

oder

$$\cos\delta = \frac{\cos L}{\cos AR}.$$

Ebenso in demselben Dreieck:

$$\cos\delta = \cos L \cos AR + \sin L \sin AR \cos\varepsilon,$$

somit

$$\cos L = \cos L \cos^2 AR + \sin L \sin AR \cos AR \cos\varepsilon$$

oder nach einiger Reduktion

$$\operatorname{cotg} L = \operatorname{cotg} AR \cos\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$\operatorname{tang} AR = \operatorname{tang} L \cos\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welche Gleichungen benutzt werden können, um zu einer gegebenen Rectascension die zugehörige Länge oder umgekehrt zu einer gegebenen Länge die zugehörige Rectascension zu finden.

Setzen wir also

$$L - AR = \Delta\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

d. h.

$$AR = L - \Delta\alpha,$$

so geht die Gleichung (2) über in

$$\operatorname{tang}(L - \Delta\alpha,) = \operatorname{tang} L \cos\varepsilon$$

oder:

$$\frac{\operatorname{tang} L - \operatorname{tang}\Delta\alpha,}{1 + \operatorname{tang} L \operatorname{tang}\Delta\alpha,} = \operatorname{tang} L \cos\varepsilon$$

oder nach einiger Reduktion:

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha, = (1 - \cos\varepsilon)\frac{\operatorname{tang} L}{1 + \cos\varepsilon \operatorname{tang}^2 L} \quad \ldots \quad (I)$$

Die Discussion dieser Gleichung ergiebt folgenden bemerkenswerthen Zusammenhang zwischen L und $\Delta\alpha,$. Lassen wir L von 0^0 bis 360^0 zunehmen, d. h. lassen wir die Erde einen vollen Umlauf um die ⨀ vollenden, so wird $\operatorname{tang}\Delta\alpha,$ und hiermit $\Delta\alpha,$ viermal gleich Null; unsere ⨀ wird viermal des Jahres für beide oben bezeichneten Erdstellungen zugleich im Meridian erblickt, und findet der Mittag für einen Bewohner auf der wirklichen Erde mit schiefer Axe und der fingirten mit senkrechter Axe viermal des Jahres in demselben Momente statt, nämlich

für $L = 0^0$ zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums
» $L = 90$ » » » Sommersolstitiums
» $L = 180$ » » » Herbstäquinoktiums
» $L = 270$ » » » Wintersolstitiums.

Es fragt sich weiter, welche Maximal- und Minimalwerthe unsere Gleichung (I) für $\operatorname{tang}\Delta\alpha,$ mithin auch für $\Delta\alpha,$ liefert. Differen-

ziren wir zu dem Ende die Gleichung mit Weglassung des constanten Factors $(1 - \cos\varepsilon)$ so ergiebt sich

$$\frac{d(\tang \varDelta\alpha_,)}{dL} = \frac{(1+\cos\varepsilon \tang^2 L)\frac{1}{\cos^2 L} - \tang L \frac{2\cos\varepsilon \tang L}{\cos^2 L}}{(1+\cos\varepsilon \tang^2 L)^2}$$

oder

$$\frac{d(\tang \varDelta\alpha_,)}{dL} = \frac{1-\cos\varepsilon \tang^2 L}{\cos^2 L\,(1+\cos\varepsilon \tang^2 L)^2},$$

welcher Ausdruck gleich Null gesetzt, die Bedingungsgleichung

$$\tang^2 L = \frac{1}{\cos\varepsilon}$$

oder

$$\tang L = \sqrt{\sec\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

liefert. Nehmen wir

$$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 0''$$

an, so ist

$$\log\sec\varepsilon = 0{,}0374376$$

mithin

$$\log\tang L = 0{,}0187188,$$

demgemäss L nun die Werthe:

$L_1 = 46^0\ 14'$; $L_2 = 133^0\ 46'$; $L_3 = 226^0\ 14'$; $L_4 = 313^0\ 46'$

bekommt.

Rechnen wir 365 Tage als Zeit des Umlaufs der Erde um die ☉, so entspricht diesen vier Werthen eine Zeit

$T_1 = 46{,}9$ Tagen; $T_2 = 135{,}6$ Tagen

$T_3 = 229{,}9$ » ; $T_4 = 318{,}1$ »

Demnach fallen die Maximal- bezw. Minimalwerthe von $\varDelta\alpha_,$ wenn vom 1. Januar an gerechnet der 21. März der 80. Tag ist, auf den

126,9. Tag ; 215,6. Tag

309,9. » ; 398,1. » gleich 33,1. T. d. folg. Jahrs

oder den

7. Mai; 3—4. August; 6. Nov.; 2. Februar des folgenden Jahrs.

Um zu sehen, welchen absoluten Werth diese Maxima und Minima von $\varDelta\alpha_,$ bekommen, setzen wir einen der obigen vier Werthe von L z. B. $L_1 = 46^0\ 14'$ in die Gleichung (I) ein. Es giebt dies:

$$\tang\varDelta\alpha_, = (1-\cos\varepsilon)\frac{\tang 46^0\ 14'}{1+(\tang 46^0\ 14')^2\cos\varepsilon}$$

wonach die logarithmische Berechnung für $\varDelta\alpha_,$ einen Winkelwerth

$$\varDelta\alpha_, = \mathbf{2^0\ 14'\ 45''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und einen Zeitwerth

$$\varDelta\alpha_, = \mathbf{9^m\ 39^s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5_*)$$

liefert.

§. 16. Gehen wir bei unserer Betrachtung von der Stellung der fingirten Erde aus, so wird einem Bewohner die Sonne culminiren, wenn sein Meridian aus der Lage P,DC Fig. 21 in die Lage P,sS gelangt ist und stellte sich die Erdaxe momentan in die Stellung CP, so würde dieser Meridian P,s nicht durch den Punkt a des Aequators laufen, sondern da $DCs < DCa$ ist in einem etwas weiter von F entfernten Punkte den Aequator durchschneiden, d. h. es würde dem Beobachter auf der Erde mit schiefer Axe die Culmination der ⊙ noch bevorstehen. Demgemäss können wir unser bisheriges Resultat in dem Satze zusammenfassen, „dass einem Beobachter auf der fingirten Erde „die ⊙ früher wie einem auf der Erde mit schiefer Axe culminirt, „wenn $L <$ Æ und später wenn $L >$ Æ ist oder

früher wenn $\Delta\alpha$, negativ
später » $\Delta\alpha$, positiv

„ist; dass dagegen das Umgekehrte eintritt, wenn man von der Stellung „der Erde mit schiefer Axe zu der der fingirten Erde übergeht."

Hierbei ist, wenn wir blos auf die numerischen Werthe von $\Delta\alpha$, sehen, es ganz gleichgiltig wie wir sonst die Erde um die Sonne führen, denn unsere Gleichung (I) enthält keine Grösse, die auf die Natur der Curve, welche wir als Erdbahn annehmen könnten, hinwiese. Wenn wir aber, wie es auf der vorigen Seite geschah, die Zeiten T berechnen welche einem bestimmten $\Delta\alpha$, entsprechen, dann stehen wir daran uns entscheiden zu müssen, wie wir die Erdbahn annehmen wollen. Wir zählten bei dieser Berechnung im Momente, wo die ⊙ im ♈ Punkte stand, Null, und nahmen an, dass die Erde in 365 Tagen um die Sonne liefe; wir setzten ferner in Gedanken die Proportion an: $\frac{L}{360} = \frac{T}{365}$ oder in Zahlen mit Benutzung eines der Werthe L

$$\frac{46^0 14'}{360^0} = \frac{T}{365}$$

und berechneten so

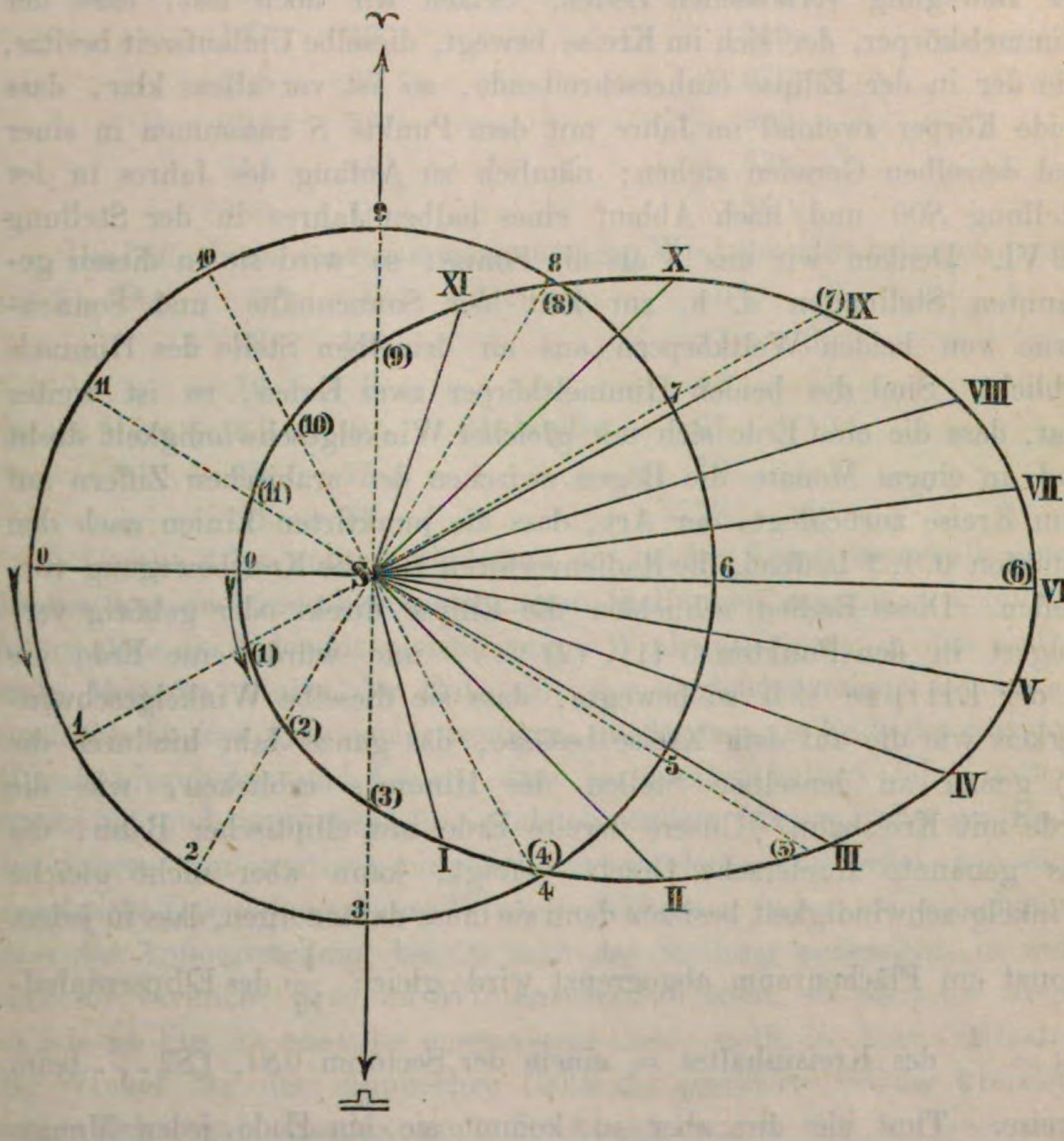
$$T = 46{,}9 \text{ Tage,}$$

nach welcher Zeit von der Frühlingsnachtgleiche an gerechnet $\Delta\alpha$, seinen grössten Werth erreichte. Diese Berechnung setzt aber voraus, dass wir die Länge L der Zeit T proportional veränderlich ansehen wollen, was offenbar nur dann statthaft ist, wenn wir die Erde in einem **Kreise** um die Sonne herum führen. Müsste sie sich aber in einer Ellipse bewegen, dann würde voraussichtlich am 46,9. Tage nach der Frühlingsnachtgleiche $\Delta\alpha$, nicht wieder ein Maximum werden.

Richten wir aber unser Augenmerk jetzt auf die Form der Erdbahn, so können wir die weitere wichtige Frage stellen:

welche veränderte scheinbare Stellung nimmt die wahre Sonne am Himmel ein, wenn wir sie einmal von einer Erde mit Kreisbahn und einmal von einer Erde mit elliptischer Bahn aus beobachten? Zur Lösung dieser Frage betrachten wir zunächst die Figur 22.

Figur 22.



In ihr ist eine Ellipse dargestellt, deren kleine Axe sich zur grossen wie 3:4 verhält; die Entfernung der beiden Brennpunkte, vom Mittelpunkte der Ellipse ist demnach gleich $\sqrt{7}$ und das Verhältniss dieser Strecke zur halben grossen Axe oder das, was der Astronom insbesondere „Excentricität“ nennt, gleich $\frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}6614$. Der

Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist gleich $a.b.\pi = 4.3.3{,}1415$ und folgt hieraus, dass wenn wir um S neben der Ellipse auch einen Kreis beschreiben, dessen Flächeninhalt gleich dem der Ellipse ist, wir seinen Radius $S0$ gleich $\sqrt{a.b} = \sqrt{3.4}$ zu wählen haben. Denken wir nun gleichzeitig von 0 aus in der Richtung der Pfeile auf der Ellipse und auf dem Kreise zwei Himmelskörper sich bewegen, so müssen diese vor allem das Keplersche Gesetz befolgen, demgemäss die, vom Radiusvector beschriebenen, Flächenräume sich verhalten wie die während der Bewegung verflossenen Zeiten. Setzen wir noch fest, dass der Himmelskörper, der sich im Kreise bewegt, dieselbe Umlaufszeit besitze, wie der in der Ellipse einherschreitende, so ist vor allem klar, dass beide Körper zweimal im Jahre mit dem Punkte S zusammen in einer und derselben Geraden stehen: nämlich zu Anfang des Jahres in der Stellung $S00$ und nach Ablauf eines halben Jahres in der Stellung $S6$ VI. Denken wir uns S als die Sonne, so wird sie in diesen genannten Stellungen d. h. zur Zeit der Sonnennähe und Sonnenferne von beiden Weltkörpern aus an derselben Stelle des Himmels erblickt. Sind die beiden Himmelskörper zwei Erden, so ist weiter klar, dass die eine Erde sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit dreht und in einem Monate die Bögen zwischen den arabischen Ziffern auf dem Kreise zurücklegt, der Art, dass die punktirten Linien nach den Punkten 0, 1, 2 laufend, die Radienvectoren für die Kreisbewegung vorstellen. Diese Radien schneiden die Ellipse direkt oder gehörig verlängert in den Punkten 0 (1), (2) .... und würde eine Erde die in der Ellipse sich so bewegte, dass sie dieselbe Winkelgeschwindigkeit wie die auf dem Kreise besässe, das ganze Jahr hindurch die ⊙ genau an denselben Stellen des Himmels erblicken, wie die Erde mit Kreisbahn. Unsere zweite Erde mit elliptischer Bahn, die das genannte Keplersche Gesetz befolgt, kann aber nicht gleiche Winkelgeschwindigkeit besitzen denn sie muss dafür sorgen, dass in jedem Monat ein Flächenraum abgegrenzt wird gleich $\frac{1}{12}$ des Ellipseninhaltes $= \frac{1}{12}$ des Kreisinhaltes = einem der Sectoren $0S1$, $1S2$ . . . beim Kreise. Thut sie dies aber so kommt sie am Ende jeden Monats nicht in den mit (1), (2), . . . bezeichneten Punkten, sondern in den mit römischen Ziffern bezeichneten Punkten I, II . . . . ., an. Eine Methode, die wir im § 18 hernach näher angeben werden, weist ihr nämlich und der Erde mit Kreisbahn am Ende der 12 Monate angenähert folgende Winkel von 0 oder dem Perihel aus gerechnet, an:

Erde mit elliptischer Bahn		Erde mit Kreisbahn
0°	0′	0° 0′
108	15	30
136	5	60
151	40	90
162	25	120
171	30	150
180	0	180
188	30	210
197	35	240
208	20	270
223	55	300
251	45	330
360	0	360

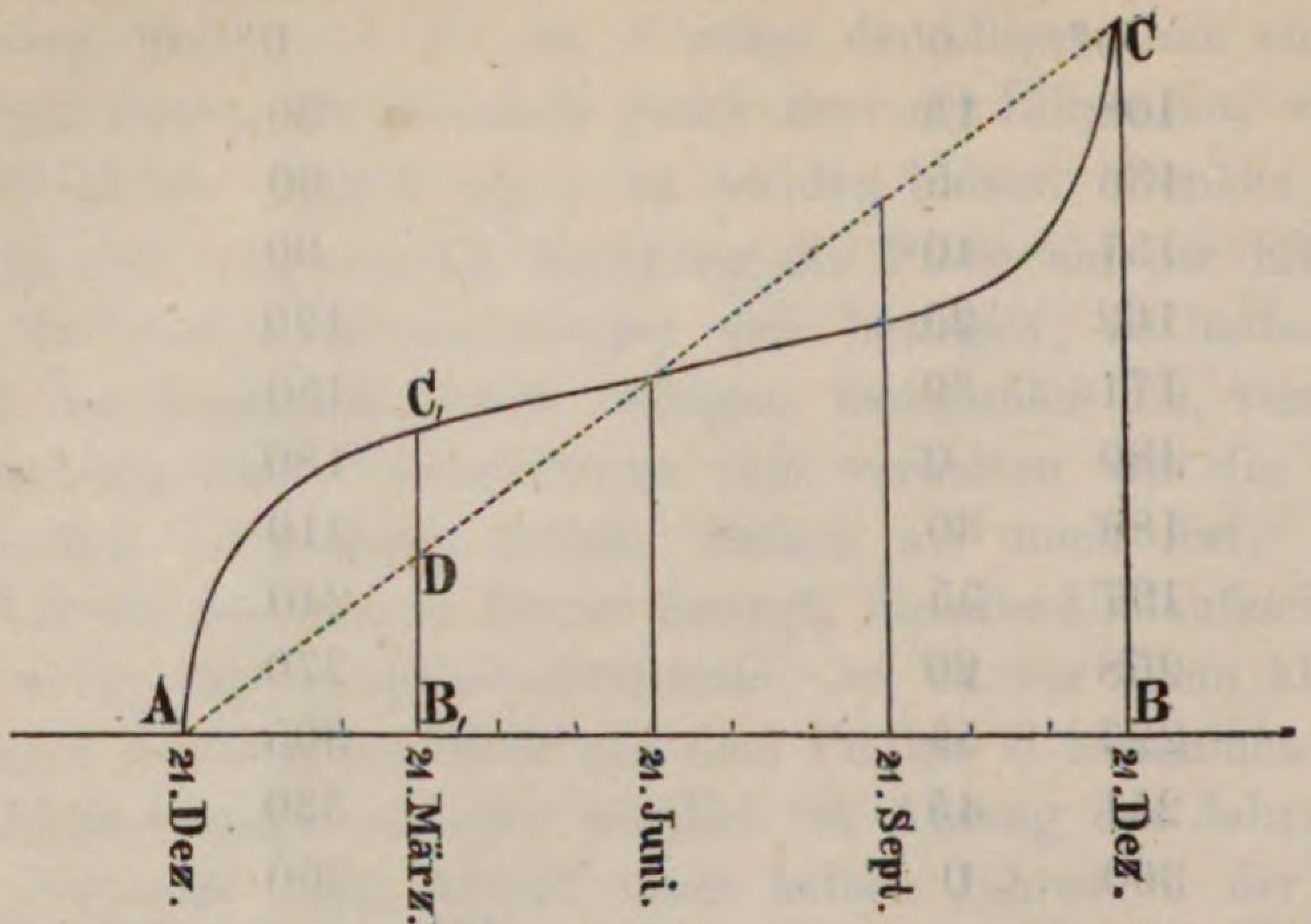
Die Differenzen der zusammengehörigen Winkelwerthe betragen daher

am 21. Dec.	0°	0′	21. Juni	0°	0′
	+ 78	15′		— 21	30
	+ 76	5		— 42	25
» 21. März	+ 61	40	21. Septbr.	— 61	40
	+ 42	25		— 70	5
	+ 21	30		— 78	15

Daraus folgt nothwendig, dass die beiden Erden innerhalb eines Jahres nur in den oben bezeichneten Stellungen zusammen kommen, ferner dass die Erde mit gleichförmiger Winkelbewegung in den ersten sechs Monaten hinter der Erde mit der ungleichförmigen Bewegung zurückbleibt und zwar immer weniger, um letztere am Ende des sechsten Monats einzuholen und ferner, dass im zweiten halben Jahre erstere voraus ist und zwar ebenfalls in abnehmendem Maasse, um am Ende des Jahres von letzterer eingeholt zu werden. Entwerfen wir eine graphische Darstellung dieser Winkelverhältnisse, indem wir annehmen, dass die Anfangsstellung bei 00 auch der Stellung entspricht, in welcher die wirkliche Erde im Wintersolstitium steht, so sieht die Sache so wie in Fig. 23 aus: die ausgezogene Curve stellt in ihren Ordinaten die Winkel bei der elliptischen Bahn die punktirte bei der kreisförmigen Bahn vor. Das Maximum der Abweichungen fällt der Zeichnung gemäss zwischen den 21. Dec. und 21. März, ebenso zwischen den 21. Septbr. und 21. December, etwa auf den 6. Februar und 6. November.

Wir wissen nun, dass die „Längen“ Winkel sind, die in der Ekliptik vom Frühlingspunkte aus in der Richtung der Bewegung der Erde gezählt werden. Mithin gehen die Winkel der Fig. 22 sofort in „Längen“ und zwar „Längen der Erde“ über, wenn wir zu ihnen 90° hinzuaddiren und wären die zusammengehörigen Längen der beiden Erden demnach

Figur 23.



bei elliptischer Bahn					bei kreisförmiger Bahn			
für Punkt		0	90°	0′	für Punkt		0	90° 0′
»	»	I	198	15	»	»	1	120
»	»	II	226	5	»	»	2	150
»	»	III	241	40	»	»	3	180
»	»	IV	252	25	»	»	4	210
»	»	V	261	30	»	»	5	240
»	»	VI	270	0	»	»	6	270
»	»	VII	278	30	»	»	7	300
»	»	VIII	287	35	»	»	8	330
»	»	IX	298	20	»	»	9	360
»	»	X	313	55	»	»	10	390 = 360 + 30
»	»	XI	341	45	»	»	11	420 = 360 + 60
»	»	XII	450	0	»	»	12	450 = 360 + 90

Bezeichnen wir die Winkel, die die Erdstellungen vom Wintersolstitium aus messen bei den beiden Erden mit

$$\lambda_{,,} \text{ und } \lambda_{,}$$

Die Winkel für die Erden vom Frühlingspunkt aus gerechnet mit

$$l_{,,} \text{ und } l_{,}$$

so wäre demnach

$$l_{,,} = \lambda_{,,} + 90$$

$$l_{,} = \lambda_{,} + 90.$$

Wollen wir aus diesen Längen aber die Längen der Sonne ableiten, so müssen wir, wie wir S. 63 sahen, zu $l_{,,}$ und $l_{,}$ 180° zu $\lambda_{,,}$ und $\lambda_{,}$ aber 270° hinzufügen. Demgemäss bestehen, wenn wir die beiden Längen der Sonne mit $L_{,,}$ und $L_{,}$ bezeichnen, die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} L_{\prime\prime} = \lambda_{\prime\prime} + 270^0 \\ L_{\prime} = \lambda_{\prime} + 270^0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und es leuchtet nunmehr ein, dass $L_{\prime\prime}$ und $L_{\prime}$ einerlei sein können mit dem Winkel, der oben bei der Figur 21 allgemein mit L bezeichnet wurde, denn Alle diese Winkel werden in demselben Sinne vom ♈ aus in der Ebene der Ekliptik gezählt.

Sofort wollen wir uns weiter merken, dass man die Längen $L_{\prime\prime}$ die „wahren", die Längen $L_{\prime}$ aber die „mittleren" zu nennen pflegt.

Hat demnach unsere frühere Betrachtung in §. 15 einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{AR}$ und L nachgewiesen und wären wir im Stande einen Zusammenhang zwischen $L_{\prime\prime}$ und $L_{\prime}$ zu erkennen, so würde da für L ein $L_{\prime\prime}$ geschrieben werden darf, es uns nunmehr auch möglich sein, eine Beziehung zwischen $\mathcal{AR}$ und $L_{\prime\prime}$ und sodann zwischen $\mathcal{AR}$ und $L_{\prime}$ aufzufinden.

§. 17. Wir haben bis jetzt die Sonne von vier verschiedenen Erden aus betrachtet. Bei zweien derselben liessen wir die Bahn, welche der Mittelpunkt bei jeder beschreiben musste, eine beliebige sein und fragten nur: wenn beide Erden irgend eine Bahn beschreiben (aber selbstverständlich um weitere Discussionen abzuschneiden beide dieselbe), die eine aber hierbei mit ihrer Axe senkrecht auf die Ebene der Bahn, die andere schief auf letztere gestellt ist: wie verschieden erblicken beide Erden die wahre Sonne? Den beiden andern Erden liessen wir umgekehrt eine beliebige Rotationsaxe (aber beiden natürlich dieselbe) zukommen: verlangten, dass die eine Erde in einem Kreise die andere in einer Ellipse laufen solle, und fragten dann, wie erscheint die ⨀ zwei solchen Erden? Wir setzten also voraus eine

Erde	„1"	mit	beliebiger Bahn	und	senkrechter Axe
»	„2"	»	»	»	schiefer »
»	„3"	»	Kreisbahn	»	beliebiger »
»	„4"	»	Ellipsenbahn	»	» »

Da nun aber bei „3" und „4" die Axe beliebig ist, so können wir sie wie bei „1" als eine senkrechte annehmen; da ferner bei „1" und „2" die Bahn beliebig ist, so können wir sie wie bei „4" als eine Ellipse annehmen. Hiermit wird aber „4" mit „1" identisch und wir haben anstatt vier nur drei verschiedene Erden, nämlich eine

Erde	„I"	mit	Kreisbahn	und	senkrechter Axe	
»	„II"	»	Ellipsenbahn	»	» »	
»	„III"	»	Ellipsenbahn	»	schiefer »	(unt. $66\frac{1}{2}^0$)

Bei der Drehung der Erde „II" und „III" um ihre Axen gilt da für L ein $L_{\prime\prime}$ geschrieben werden darf, die Gleichung

$$\Delta\alpha_{\prime} = L_{\prime\prime} - \mathcal{AR}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

bezeichnen wir ebenso den Unterschied im Winkelstand der ☉ je nachdem sie von „I" oder „II" aus betrachtet wird mit $\varDelta\alpha_{\prime\prime}$, so ist

$$\varDelta\alpha_{\prime\prime} = L_{\prime} - L_{\prime\prime} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

Von diesen drei Erden muss ohne Zweifel die Erde „III" den Namen „wahre Erde" führen. Da sich ferner bezüglich unserer Frage nach dem Erscheinen der Sonne die Erde „I" am weitesten von „III" entfernt und die Winkelverschiedenheit zwischen diesen beiden Erden gleich

$$\varDelta\alpha = \varDelta\alpha_{\prime} + \varDelta\alpha_{\prime\prime} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

ist, so dürfte die Erde „II" den Namen mittlere Erde führen. Mit Rücksicht aber auf eine andere Auffassung, die wir noch zu bezeichnen haben, müssen wir der Erde „I" mit Kreisbahn und senkrechter Axe den Namen „mittlere Erde" geben.

Setzen wir in (9) die Werthe von (7) und (8) für $\varDelta\alpha_{\prime}$ und $\varDelta\alpha_{\prime\prime}$ ein, so ergiebt sich die bedeutungsvolle Gleichung

$$\varDelta\alpha = L_{\prime} - AR \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (II)$$

welche in Worten ausgedrückt den Satz enthält:

„der Unterschied im Winkel, welchen der Meridian eines „Beobachters beschreibt, wenn er einmal auf der mittleren „Erde und einmal auf der wahren Erde vom Frühlingspunkt „aus eine Drehung bis zur ☉ vollbringt, ist gleich dem „Winkel: „mittlere Länge" der ☉ (= $L_{\prime}$) weniger der „wahren Rectascension" derselben (= AR).

Hiermit sind wir aber an dem Punkte angelangt, wo uns die Bedeutung dieses ganzen Kunstgriffes der Astronomie klar werden kann. Die Winkel $L_{\prime}$ werden nämlich von einer Erde beschrieben mit Kreisbahn d. h. einer Erde mit gleichförmiger jährlicher Winkelgeschwindigkeit, und zugleich einer Erde deren Axe senkrecht auf der Ekliptik steht. Denken wir eine solche Erde um diese Axe in Rotation, so ist klar, dass die Tage, die diese Erde bekommt, einander völlig gleich sein werden, wie uns unsere Betrachtungen im ersten Capitel schon gezeigt haben. Einen Tag, den eine solche fingirte Erde erhält, d. h. die Zeit, welche verfliesst vom Momente wo der Meridian eines Beobachters durch die wahre Sonne geht bis zur nächsten Culmination: diesen Tag pflegt der Astronom einen

„mittleren Sonnentag"

zu nennen. Es ist daher möglich einen Mechanismus zu construiren, der mit einer gleichförmigen Bewegung die genannte gleichförmige Erdbewegung nachzuahmen im Stande ist, der $0^h\ 0^m\ 0^s$ zeigt im Momente, wo diese Erde Mittag hat und von diesem bis zum nächsten Mittage 24 gleiche Stunden abmisst. Dieser Mechanismus ist aber nichts anderes als unsere bürgerliche Uhr, die Taschenuhr, die Wanduhr,

deren Einrichtung wir im ersten Kapitel kennen lernten. Die Zeit, die sie angiebt, nennen wir die

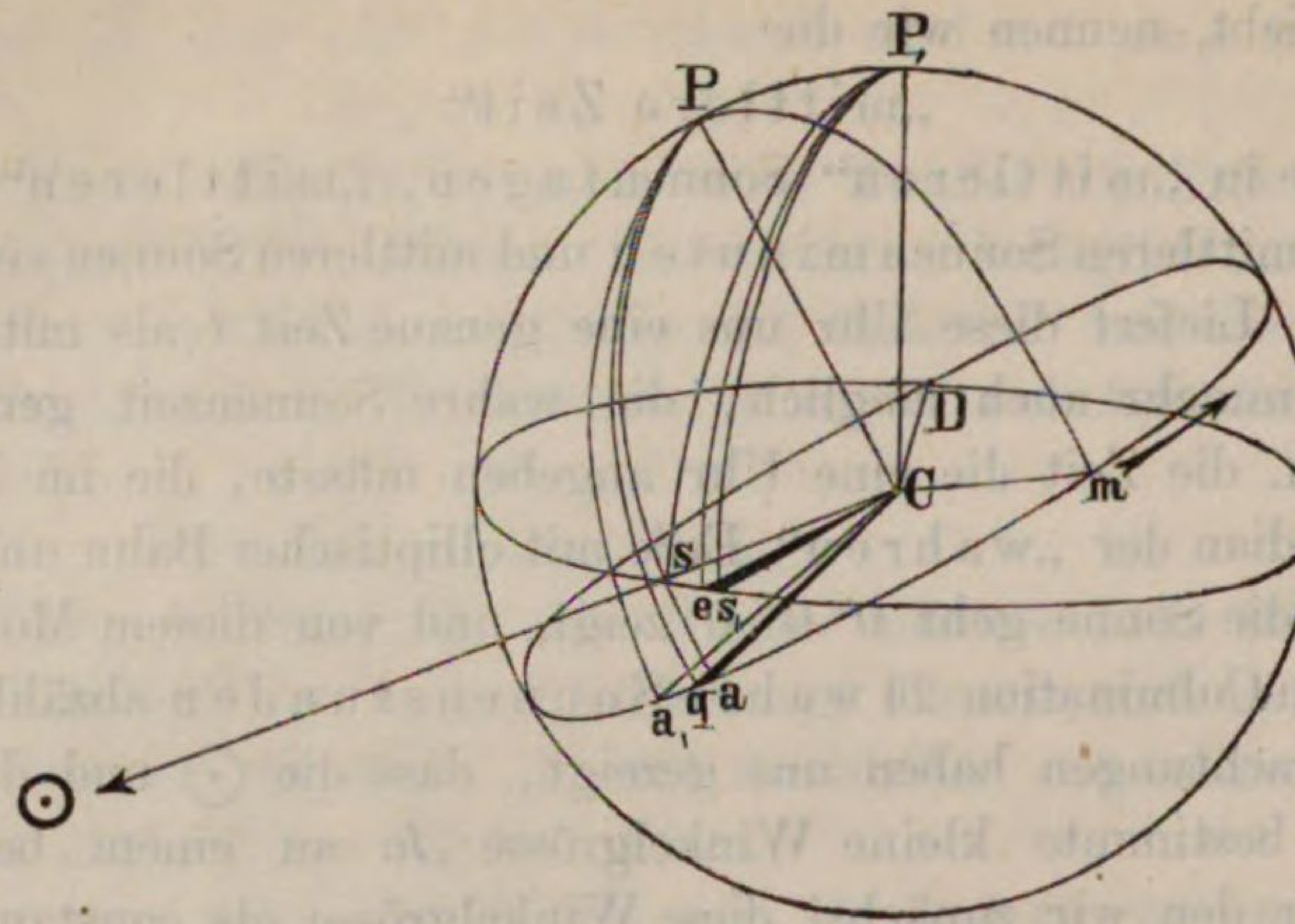
„mittlere Zeit“

und wird sie in „mittleren“ Sonnentagen, „mittleren“ Sonnenstunden, mittleren Sonnenminuten und mittleren Sonnensecunden angegeben. Liefert diese Uhr uns eine genaue Zeit t als mittlere Zeit, so ist es nunmehr auch möglich, die wahre Sonnenzeit genau anzugeben, d. h. die Zeit die eine Uhr angeben müsste, die im Momente, wo ein Meridian der „wahren“ Erde mit elliptischer Bahn und schiefer Axe durch die Sonne geht $0^h\ 0^m\ 0^s$ zeigt, und von diesem Momente bis zur nächsten Culmination 24 wahre Sonnenstunden abzählt. Denn unsere Betrachtungen haben uns gezeigt, dass die ⊙ und die ○ um eine ganz bestimmte kleine Winkelgrösse $\Delta\alpha$ an einem bestimmten Tage — für den wir zunächst diese Winkelgrösse als constant voraussetzen — auseinander sind. Verwandeln wir diese durch Division mit 15 in eine Zeitgrösse und bringen sie als Correction mit dem nöthigen Vorzeichen an t an, so ist $t + \frac{\Delta\alpha}{15}$ die gesuchte genaue „wahre Zeit“.

Wenn wir hiermit nun den Zusammenhang zwischen wahrem und mittlerem Sonnentag und allgemein zwischen wahrer und mittlerer Zeit vorläufig erfasst haben, so ist es doch dringend nothwendig, den Begriff dieser beiden Zeiten noch in besonderer Weise zu geben, da hiermit das Vorausgehende noch verallgemeinert, und auch für das Folgende vielfach eine Erleichterung gewonnen wird. Wir betrachten zu dem Ende unsere Figur 24, die im Anschluss an die Figur 21 entworfen wurde. Dieser gemäss nehmen wir vom Frühlingspunkte aus gerechnet eine Länge der Sonne im zweiten Quadranten an, wonach $L_{\prime\prime}$ und $L_{\prime}$ zwischen 90^0 und 180^0 und $\lambda_{\prime\prime}$ und $\lambda_{\prime}$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) zwischen 180^0 und 270^0 fällt. Innerhalb dieser Grenzen lehrt aber die Figur 23, dass die Sonne mit elliptischer Bahn hinter der mit kreisförmiger Bahn zurück ist. Deutet demnach Cs in Fig. 24 die Richtung nach der ⊙ an, so wird die Sonne *) mit Kreisbahn etwa in der Richtung Ce stehen, und denken wir den Meridian eines Beobachters für beide Erden mit schiefer und

*) Wir nehmen hier an, die Sonne drehe sich einmal in einer elliptischen Bahn und das anderemal in einer Kreisbahn, indem wir auf diese Weise mit der Zeichnung dieser Verhältnisse leichter zum Ziele kommen. Liesse man sich die Erde wie seither drehen, so würde die Figur zu undeutlich werden. Wir rathen jedoch, die Vorstellung mit der Erde auch in grösserem Maasstabe zu zeichnen, um zur Überzeugung zu gelangen, dass sämmtliche Winkelverhältnisse dieselben bleiben.

Figur 24.



senkrechter Axe aus der Anfangslage PCD und P,CD in gleichförmiger Bewegung um PC und P,C, so kommt der Meridian **gleichzeitig** an:

bei der Rotation um PC	bei der Rotation um P,C
im Punkte a und s	im Punkte $s,$
» » q	» » e
» » $a,$	» » s

demzufolge

$$\measuredangle\, aCD = s,CD$$
$$qCD = eCD$$
$$a,CD = sCD$$

sein muss.

Hierbei ist aber

$eCD = L,$ die „mittlere Länge“
$sCD = L_{\prime\prime}$ » „wahre Länge“
$aCD = Æ$ » „wahre Rectascension“

ferner

$$sCs, = aCa, = \Delta\alpha,$$
$$eCs = qCa, = \Delta\alpha_{\prime\prime}$$

und demgemäss $eCs, = qCa =$ der algebraischen Summe $[\Delta\alpha,] + [\Delta\alpha_{\prime\prime}]$ mithin da $\Delta\alpha, = L_{\prime\prime} - Æ$ wegen $L_{\prime\prime} < Æ$ negativ und $\Delta\alpha_{\prime\prime} = L, - L_{\prime\prime}$ positiv ist

$$eCs, = qCa = -\Delta\alpha, + \Delta\alpha_{\prime\prime}.$$

Dieser kleine Winkel $eCs, = qCa$ in der Ekliptik und im Aequator gelegen ist demnach nichts anderes wie die Differenz $L, - Æ$ oder die mittlere Länge weniger der wahren Rectascension.

Man pflegt nun, vom Vorzeichen vorläufig abgesehen:

$\varDelta\alpha_{,}$ mit dem Namen der „**Reduktion auf die Ekliptik**"
$\varDelta\alpha_{,,}$ » » » » „**Mittelpunktsgleichung**"
$\varDelta\alpha$ » » » » „**Zeitgleichung**"

zu bezeichnen, wobei selbstverständlich, wenn $\varDelta\alpha$ durch die Summe $\varDelta\alpha_{,} + \varDelta\alpha_{,,}$ ausgedrückt wird, beiderseits entweder nur Winkel- oder nur Zeitgrössen angenommen werden können. Mit Rücksicht auf diese Nomenclatur lassen sich nun folgende Sätze zusammenstellen, deren Richtigkeit sich einfach aus dem Anblicke unserer Fig. 24 ergiebt.

Erster Satz. „Der Ort der wahren Sonne s in der Ekliptik kann „für die wahre Erde ersetzt werden, d. h. erscheint „mit s zu gleicher Zeit im Meridian durch einen Punkt a „im Aequator, dessen Rectascension gleich der wahren „Länge $L_{,,}$ plus der „Reduktion auf die Ekliptik" „$\varDelta\alpha_{,}$ ist.

Zweiter Satz. „Der Ort der mittleren Sonne e in der Ekliptik für „die mittlere Erde kann durch einen Punkt q für „die wahre Erde im Aequator ersetzt werden, wenn „die Rectascension dieses letzteren gleich der mittleren „Länge $L_{,}$ des ersteren ist.

Dritter Satz. „Da der Punkt e sich gleichförmig auf der Ekliptik „verschiebt und durch den Punkt q im eben bezeich- „neten Sinne ersetzt werden kann, so leuchtet ein, „dass auch q sich gleichförmig bewegt, und die „Rectascension von q genau proportional der Zeit „sich ändert.

Vierter Satz. „Es ergiebt sich hieraus aber weiter, dass für die „wahre Erde der Punkt q geradezu als „mittlere „Sonne" betrachtet werden kann, und dass somit die „Verschiedenheiten in der Erscheinung, je nachdem „man die wahre Sonne einmal von der wahren und „einmal von der mittleren Erde aus erblickt, identisch „sind mit den Verschiedenheiten, die die wahre Erde „allein wahrnimmt, je nachdem sie die wahre Sonne s „in der Ekliptik und den Punkt q als mittlere Sonne „im Aequator ansieht.

Dieser vierte Satz enthält in kurzen Worten den bedeutungsvollen Zusammenhang unserer Auffassung mit der, die gewöhnlich in den Lehrbüchern beliebt wird. Unsere Darstellung ging nur von Erdbewegungen aus, und liessen wir die ⊙ ruhig stehen. Wurde die letztere von der wahren Erde aus gesehen, so galt sie uns als wahre Sonne, liefen wir aber mit der mittleren Erde um dieselbe, so wurde sie uns zur mittleren Sonne. Die andere Auffassung lässt blos eine

Erde, die wahre Erde zu, die um sich herum aber zwei Sonnen laufen sieht, die wahre Sonne ($= s$) in der Ekliptik mit ungleicher Winkelbewegung, die mittlere ($= q$) im Aequator mit gleichförmiger Winkelbewegung. Da nach unserer Auffassung die beiden Erden vom Perihel oder vom Wintersolstitium aus ihre gemeinsame Wanderung antreten, so leuchtet ein, dass wir die Punkte s und q oder was nach dem ersten Satze auch einerlei ist, die Punkte a und q im Momente des Wintersolstitiums gleichzeitig in denselben Meridian fallend annehmen müssen.

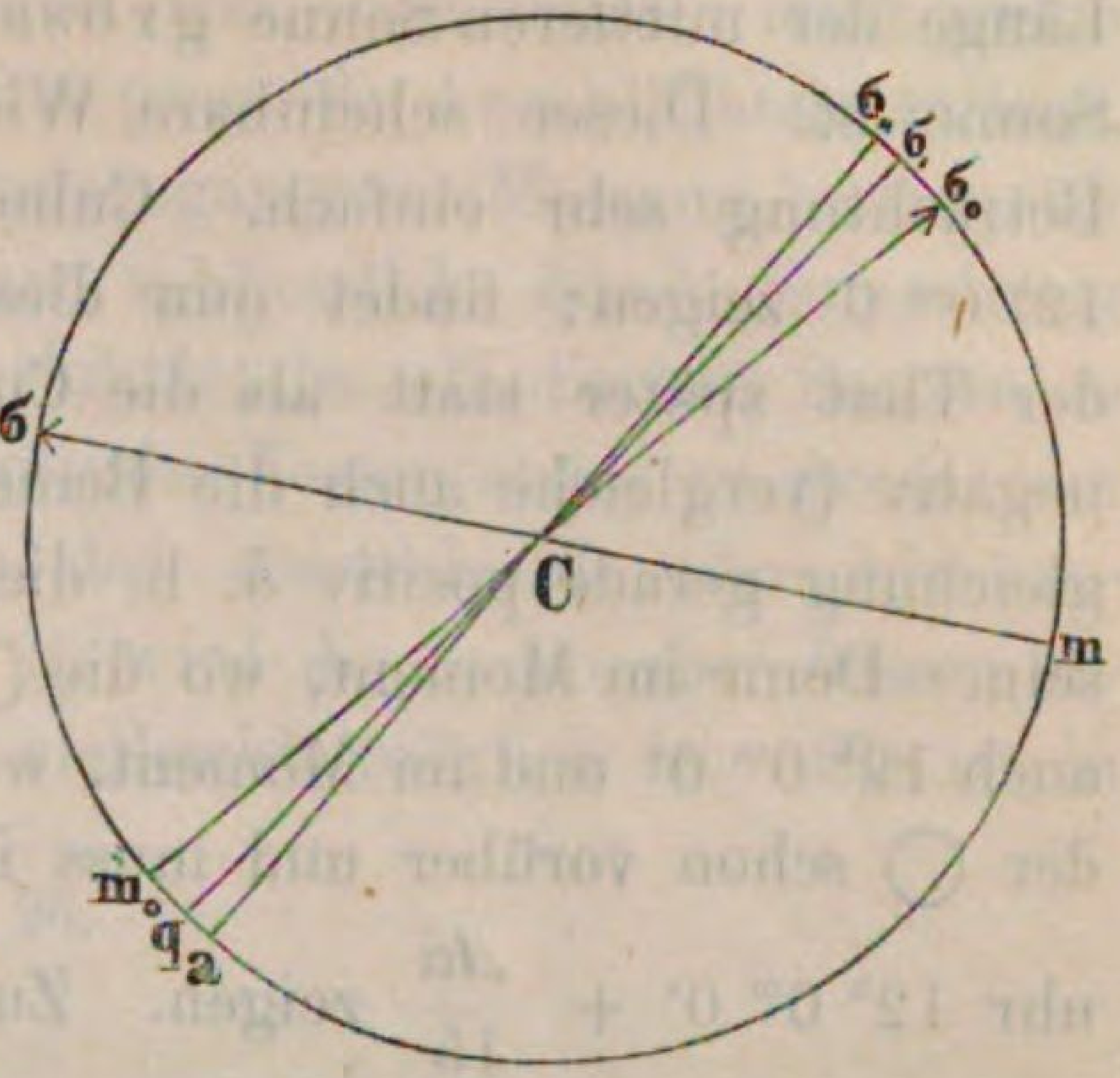
Die Punkte s, a und q ändern nach unserer bisherigen Annahme ihre Lage nur sprungweise von Tag zu Tag. In Wirklichkeit aber ist dies nicht der Fall, und muss vielmehr eine continuirliche Veränderung der wahren Länge, der wahren Rectascension und mittleren Länge angenommen werden. Traf demnach der Meridian eines Beobachters die ⨀ und die ◯ im Momente des wahren Mittags und im Momente des mittleren Mittags mit einer wahren Rectascension gleich AR und einer mittleren Länge gleich L, an, so wird im Momente, wo der betreffende Meridian in die Lage PCm, Fig. 24, gekommen ist, erstere zu $AR + \Delta AR$ letztere zu $L, + \Delta L,$ geworden sein, wobei der Natur der Sache gemäss ΔAR und $\Delta L,$ stets positive Zuwüchse sind. Wäre diese Aenderung nicht erfolgt, so würden die Winkel, die der Meridian PCm mit den beiden Sonnen im Momente, wo er die bezeichnete Lage einnimmt, um die Grössen ΔAR und $\Delta L,$ grösser ausgefallen sein. Man pflegt nun einen Winkel, den ein Meridian eines Beobachters mit einem zweiten durch irgend einen Stern oder Punkt des Himmels gelegten Meridian bildet, wenn man von ersterem der Rotation entgegengesetzt bis zu letzterem rechnet den „Stundenwinkel" dieses Sterns oder Punkts zu nennen, und ist demnach in unserer Figur 24

$aCm = t_w$ der Stundenwinkel der ⨀
$qCm = t_m$ » » » ◯

Denken wir, Fig. 25, im Momente des wahren Mittags den Meridian in der Lage Cm_0, so würde, wenn wir für die wahre Sonne eine Aequatorealsonnenuhr voraussetzten, der Mittagsschatten derselben nach $C\sigma_0$ fallen und müsste bei σ_0 ein 0^h (12^h) geschrieben werden. Bliebe die Sonne genau stehen, so würde das Zifferblatt mit dem 0^h Strich bei der Lage Cm des Meridians auf $C\sigma$ fallen und von σ rückwärts auf dem Zifferblatte bis nach σ_0 hin, gemäss der eben gemachten Bemerkung auf dem Zifferblatt ein $\left(\frac{t + \Delta AR}{15}\right)^h$ als wahre Sonnenzeit abgelesen werden. Geht aber die wahre Sonne mit: kommt sie innerhalb dieser Zeit nach a, so wirft sie ihren Schatten nicht nach σ_0 sondern nach $\sigma_{,,}$ und es leuchtet

nunmehr ein, dass, wenn wir den Schatten der wahren Sonne, wie sie in Bewegung ist, als Zeiger auf dem Zifferblatte des Aequators betrachten, vom Punkte σ nach $\sigma_{,,}$ hin nicht ein Winkel $(t_w + \Delta A\!\!\!R)^0$ sondern nur t_w^0 abgelesen wird, dem dann auch nur die Zeit $\left(\frac{t_w}{15}\right)^h$ entspricht, welche Zeit, da sie von der wahren Sonne auf einer Sonnenuhr angegeben wird, aber offenbar die eigentliche „wahre Sonnenzeit", ist. Hätten wir anstatt der wahren Sonne die mittlere leuchtend gedacht und die Aequatorealsonnenuhr für ihre Anzeigen bestimmt,

Figur 25.



so würde, wenn sie bei der Stellung Cm des Meridians in q steht, ihr Schatten auf $C\sigma$, fallen, und würde der Winkel, der von σ nach σ, auf dem Zifferblatte abgelesen wird, in Zeit verwandelt, das sein was wir „mittlere Sonnenzeit" zu nennen haben. Da der Winkel $\sigma C \sigma_{,,} = mCa$ und der Winkel $\sigma C \sigma_{,} = mCq$ ist, so gelten nun folgende wichtige Definitionen:

1) „die wahre Sonnenzeit ist gleich dem Stundenwinkel „der wahren Sonne dividirt durch 15.

2) „Die mittlere Sonnenzeit ist gleich dem Stunden- „winkel der mittleren Sonne dividirt durch 15."

An diesen Definitionen wollen wir bei allen unseren weiteren Entwickelungen festhalten, da sie uns das Verständniss der letzteren wesentlich erleichtern werden.

§. 18. Wir haben schon erwähnt, dass man die Differenz $\Delta\alpha = (L_{,} - A\!\!\!R)$ mit dem Namen „Zeitgleichung" bezeichnet, wobei mit Rücksicht auf diese Benennung die Differenz meistens als eine Zeitgrösse aufzufassen, und zu dem Zwecke mit 15 zu dividiren ist. In Bezug auf die weitere Thatsache aber, dass man sich daran gewöhnt hat unter

„Zeitgleichung"

die Differenz Mittlere **Zeit** weniger der wahren **Zeit** zu verstehen, muss nicht $\frac{L_{,} - A\!\!\!R}{15}$ sondern

$$-\frac{L_{,} - A\!\!\!R}{15} = \frac{A\!\!\!R - L_{,}}{15}$$

als Zeitgleichung aufgefasst werden.

Es folgt daraus, dass die Zeitgleichung — im Folgenden einfach mit „ZG" bezeichnet — gerade negativ, und demgemäss die mittlere **Zeit** kleiner wie die wahre ausfällt, wenn $L_{,} > \text{Æ}$ d. h. die Länge der mittleren Sonne grösser wie die Rectascension der wahren Sonne ist. Dieser scheinbare Widerspruch lösst sich durch folgende Betrachtung sehr einfach. Culminirt die ⊙ so muss die Sonnenuhr $12^h\ 0^m\ 0^s$ zeigen; findet nun diese Culmination falls $\text{Æ} > L_{,}$ ist in der That später statt als die Culmination der ○, ist also $L_{,} - \text{Æ}$ negativ (vergleiche auch die Bemerkung auf S. 68), so muss die Zeitgleichung gerade positiv d. h. die mittlere **Zeit** grösser wie die wahre sein. Denn im Moment, wo die ○ culminirt, zeigt die mittlere Zeituhr auch $12^h\ 0^m\ 0^s$ und im Moment, wo die ⊙ culminirt ist die Culmination der ○ schon vorüber und muss in diesem Momente die mittlere Zeituhr $12^h\ 0^m\ 0^s + \frac{\Delta\alpha}{15}$ zeigen. Zu derselben Einsicht würde man auch unmittelbar durch den Anblick der Figuren 24 und 25 gelangen.

Dies vorausgeschickt haben wir demnach die Gleichungen

$$ZG = MZ - WZ \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

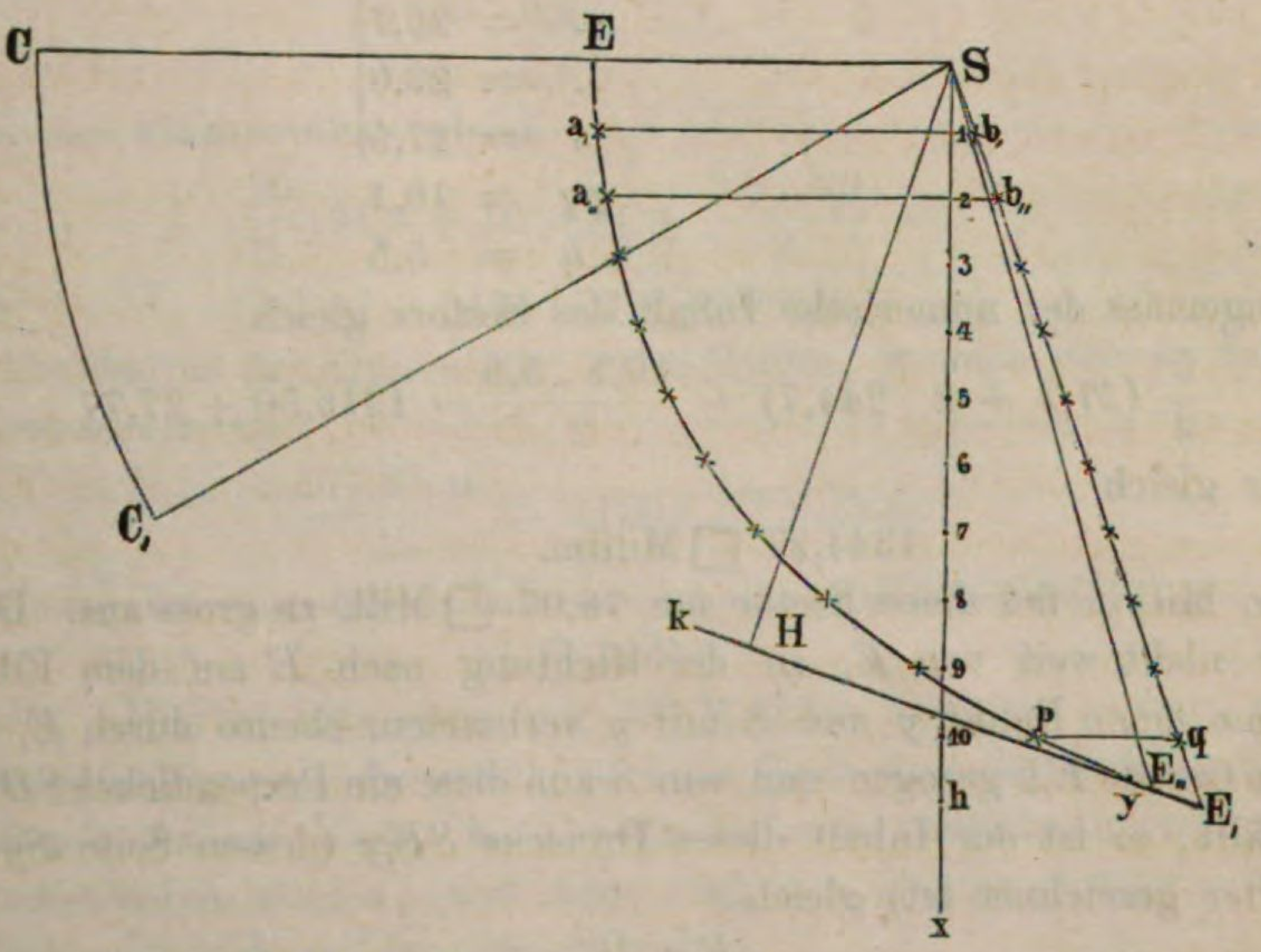
$$\left.\begin{aligned} MZ &= WZ + ZG \\ WZ &= MZ - ZG \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo in den Gleichungen (10) das ZG natürlich mit dem richtigen, aus Gleichung (III) sich ergebenden, Vorzeichen einzusetzen ist.

Es kommt uns nun darauf an, etwas Genaueres über die Zeitgleichung zu erfahren. Denn wenn wir die MZ aus der wahren Zeit oder umgekehrt die WZ aus der mittleren Zeit ableiten wollen, so wird, wenn die gegebene Zeit genau ist, die Genauigkeit der gesuchten nur noch von der genauen Kenntniss der ZG abhängen. Beachten wir zu dem Ende nun ein Zweifaches, nämlich erstens, dass wir angenommen haben, es fiele das Wintersolstitium genau mit der ⊙ Nähe und das Sommersolstitium genau mit der ⊙ Ferne zusammen und zweitens: dass unsere angenommene elliptische Erdbahn zunächst eine willkürliche war, die ohne Zweifel von der richtigen abweicht. Beachten wir ferner, dass es noch einer Angabe bedarf, wie wir oben zu den in gleichen Zeiten beschriebenen gleichen Flächenräumen auf der Ekliptik gelangten. Letzteren Gegenstand wollen wir zuerst besprechen. Handelt es sich hierbei, wie im Vorausgehenden nur um ein Schema, das die Fig. 22 darstellte, und ist die Excentricität wie hierin angenommen nicht zu klein, z. B. gleich der Excentricität der oben betrachteten Ellipse mit Axen gleich 4:3, so kann ein in vielen Fällen genügender praktischer Weg betreten werden. Um unsere Fig. 22 zeichnen zu können, war es nothwendig die 12 Sektoren der

Ellipse unter sich gleich zu machen und zwar jeden gleich einem $\frac{1}{12}$ der Kreisfläche. Zu dem Ende wurde Kreis und Ellipse erst auf einen grossen Zeichenbogen gezeichnet und $\frac{1}{12}$ des Kreises abgegrenzt. Sodann wurde der erste Sector der Ellipse dem Augenscheine nach jenem möglichst gleich gemacht, und in eine passende Anzahl Theile zerlegt, deren Flächeninhalt einfach nach vorausgegangener Messung bestimmter Linien berechnet werden konnte um schliesslich durch Summirung dieser einzelnen Theile den Gesammtinhalt des elliptischen Sectors zu finden. Zeigte sich hierbei der elliptische Sector etwas zu gross oder zu klein, so liess sich leicht noch das abzuziehende oder hinzuzuaddirende Stück finden. Die Figur 26 wird die Sache aber besser erläutern, wie es durch Worte allein vielleicht möglich ist. Sie ist in

Figur 26.



doppelt so grossem Maassstabe gezeichnet, wie die Fig. 22 und ist der Radius $CS = C,S$ des Kreises gleich 69,6 Millim., mithin die Fläche des Kreissectors gleich

$$F = \frac{69{,}6^2 \cdot \pi}{12} = 1268{,}2 \ \square \text{ Millim.}$$

Nun wurde eine Senkrechte Sx auf SC errichtet und von S aus auf ihr allemal 5 Millimeter hintereinander abgetragen, so dass die Strecken S-1, 1-2, 2-3, ... 9-10 alle gleich 5^{mm} wurden; durch diese Punkte wurden dann zu SC Parallelen wie $a,b,$, $a_{,,}b_{,,}$ . . . . pq gelegt, so dass der ganze vorläufig abgemessene elliptische Sector $ESE,$

in lauter Paralleltrapeze (natürlich unter der Annahme, dass die Bogen $Ea,$, $a,a,,$ als gerade Linie anzusehen sind) zerfiel, und noch ein Dreieckchen $pqE,$ übrig blieb, dessen Basis gleich pq und Höhe gleich der Strecke $10\text{-}h$ angenommen werden musste, die wir einfach mit h bezeichnen wollen. Der Gesammtinhalt des Sectors war daher:

$$\frac{5}{2}\left[ES + 2\ (a,b, + a,,b,, \ldots\ldots\ldots) + pq)\right] + \frac{pq\,.\,h}{2}.$$

Die Ausmessung ergab aber

$$\begin{array}{rcl} ES &=& 27{,}1 \text{ Millim.} \\ a,b, &=& 28{,}5 \\ a,,b,, &=& 29{,}7 \\ . &=& 30{,}3 \\ . &=& 30{,}3 \\ . &=& 29{,}8 \\ . &=& 28{,}9 \\ . &=& 26{,}7 \\ . &=& 23{,}0 \\ . &=& 17{,}5 \\ pq &=& 10{,}1 \\ h &=& 5{,}5 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \text{»} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Summe} = 244{,}7$$

demgemäss der numerische Inhalt des Sectors gleich

$$\frac{5}{2}\,(37{,}2 + 2\,.\,244{,}7) + \frac{10{,}1\,.\,5{,}5}{2} = 1316{,}50 + 27{,}77$$

oder gleich

$$1344{,}27 \ \square \text{ Millim.}$$

war. Mithin fiel dieser Sector um 76,07 □ Mill. zu gross aus. Denken wir nicht weit von $E,$ in der Richtung nach E auf dem Ellipsenbogen einen Punkt y und S mit y verbunden, ebenso durch $E,$ und y eine Gerade E,k gezogen und von S auf diese ein Perpendickel $SH = H$ gefällt, so ist der Inhalt dieses Dreiecks SE,y (dessen Seite Sy nicht weiter gezeichnet ist) gleich

$$\frac{E,y\,.\,H}{2},$$

und da die Höhe H gleich 43,6 Millim. gefunden wurde, so besteht die Bedingungsgleichung

$$\frac{E,y\,.\,43{,}6}{2} = 76{,}07$$

woraus sich

$$E,y = 3{,}5 \text{ Mill.},$$

ergiebt. Tragen wir diesen Werth von E,y in der Richtung nach y ab, dann kommen wir auf einen Punkt $E,,$ der mit S verbunden, die gesuchte Lage des Radiusvectors bestimmt, wonach zwischen diesem und der Linie SE ein Winkel von nahe 107^0 erhalten wird.

Auf S. 71 hatten wir für diesen Winkel des ersten Ellipsensectors 108°15′ gefunden, welcher Winkel an einer nahe dreimal so grossen Zeichnung nach der oben mitgetheilten Manier gefunden wurde und demgemäss als ein genauerer angesehen werden muss. Die Messungen für den Ellipsensector, wenn in der Richtung Sx allemal 20 Millim. abgegrenzt wurden, ergaben bei dieser grossen Zeichnung:

$$\begin{aligned} ES &= 81{,}2 \\ a_{,}b_{,} &= 85{,}4 \\ . &= 87{,}9 \\ . &= 87{,}5 \\ . &= 83{,}0 \\ . &= 75{,}2 \\ . &= 60{,}7 \\ . &= 39{,}6 \\ pq &= 9{,}8 \\ h &= 4{,}0 \end{aligned} \qquad \text{(85,4 bis 39,6:) Summe gleich } 519{,}3$$

mithin den Flächeninhalt gleich

$$\frac{20}{2}(91{,}0 + 1038{,}6) + \frac{9{,}8 \,.\, 4{,}0}{2}$$

gleich 11315,6 □ Millim.

Der Radius des Kreises war 207,8 Millim., wonach sich der Inhalt des Kreissectors zu

$$\frac{207{,}8^2 \,.\, \pi}{12} = 11304 \ \square \text{ Millim.}$$

berechnete, der von dem Inhalt des erhaltenen Ellipsensectors nur um

11 □ Mill.

abweicht. Hierbei haben wir nur die Methode andeuten wollen, ohne zu behaupten, gerade die zweckmässigste Zerlegung der Flächenräume getroffen zu haben. Diese wird vielmehr auch vielfach anders vorgenommen werden können, und muss man sich überhaupt hierbei nach der vorliegenden Form des Sectors richten.

§. 19. Hätte die Erdbahn eine so bedeutende Excentricität wie unsere Ellipse in Fig. 22, oder auch eine bis zu einer gewissen Grenze hin kleinere, so würden wir auf dem angegebenen Wege nahezu zu den betreffenden elliptischen Sectoren und hiermit zu den wahren Längen $L_{,,}$ der Sonne oder der Erde im Gegensatze zu den mittleren Längen $L_{,}$ die unmittelbar durch den Kreis gegeben sind, gelangen können. Da aber die Excentricität der Erdbahn nicht wie oben 0,6614 sondern nur 0,0167 beträgt, mithin, wenn die halbe grosse Axe der Ellipse durch 100 Ctm. repräsentirt wird, die kleine Axe gleich 99,9 Ctm. angenommen werden muss, weicht diese Ellipse so wenig von einem Kreise ab, dass eine Zerlegung ersterer nach obiger Methode zu keinem

genügenden Resultate führt. Es wird daher nothwendig, das sogenannte

„Keplersche Problem“

zu lösen, welche Lösung wir nun soweit geben werden als es hier wünschenswerth erscheinen muss. Wir verweisen hier insbesondere auf die Lehrbücher: Duhamel, Lehrbuch d. analytischen Mechanik, herausg. von Schlömilch 2. Aufl. Bd. II. S. 47. Ferner: Dienger, Differential- und Integralrechnung Bd. I. 2. Aufl. S. 238 und auf Brünnow, sphärische Astronomie 3. Aufl. S. 93 u. f.

Werfen wir einen Blick auf unsere Figur 22, so haben wir zwei Erden rotiren lassen, beide von 0 aus in der Richtung des Pfeils, die eine auf dem Kreise, die andere in der Ellipse. Erstere beschrieb mit dem Radiusvector an S vom Wintersolstitium aus gerechnet, Winkel die wir auf S. 72 mit $\lambda_{,}$, letztere dagegen Winkel die wir mit $\lambda_{,,}$ bezeichnet haben. Man nennt nun einen beliebigen derartigen Winkel $\lambda_{,}$ die „mittlere Anomalie“ und den ihm nach dem Keplerschen Gesetze entsprechenden Winkel $\lambda_{,,}$ bei der Ellipse die „wahre Anomalie;“ und ist

$$\lambda_{,,} = \Phi(\lambda_{,})$$

d. h. es ist $\lambda_{,,}$ eine bestimmte Funktion von $\lambda_{,}$. Um diese Funktion zu erhalten, kann man folgenden Weg einschlagen. Rechnet man die Bewegung des wahren Planeten vom Perihel aus, so beschreibt sein Radiusvector ϱ einen elliptischen Sector, dessen Flächeninhalt nach Polarcoordinaten durch das bestimmte Integral

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_{,,}} \varrho^2 d\lambda_{,,} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

dargestellt wird, wobei sich ϱ durch $\lambda_{,,}$, die halbe grosse Axe a, die Excentricität e und den Excentricitätswinkel φ ausdrücken lässt, wenn e den Quotienten: Entfernung ε eines Brennpunkts vom Mittelpunkt, dividirt durch die halbe grosse Axe a, und φ den Winkel am Endpunkt der kleinen Halbaxe b bedeutet, der von dieser und einer vom Brennpunkt nach jenem Endpunkt gezogenen Geraden ($= a$) eingeschlossen wird. Es ist nämlich dann nach den Lehren der analytischen Geometrie der Ebene

$$\varrho = \frac{b^2}{a + \varepsilon \cos \lambda_{,,}},$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit a dividirt und beachtet dass

$$b = a \cos \varphi$$

ist auch

$$\varrho = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos \lambda_{,,}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

welcher Ausdruck ins Quadrat erhoben, und in das Integral (11) eingesetzt

$$F = \frac{a^2 \cos^4\varphi}{2} \int_0^{\lambda_{,,}} \frac{d\lambda_{,,}}{(1+e\cos\lambda_{,,})^2}$$

liefert.

Anstatt des Ausdrucks (12) für ϱ lässt sich aber auch folgender setzen

$$\varrho = a\,(1 - e\cos\psi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

worin ψ einen Hilfswinkel bedeutet, der mit $\lambda_{,,}$ zugleich Null wird und für den sich gemäss der Gleichung

$$a(1 - e\cos\psi) = \frac{a\cos^2\varphi}{1+e\cos\lambda_{,,}}$$

oder

$$e\cos\psi = 1 - \frac{\cos^2\varphi}{1+e\cos\lambda_{,,}}$$

der

$$\cos\psi = \frac{\cos\lambda_{,,}+e}{1+e\cos\lambda_{,,}}$$

ergiebt, so dass auch:

$$\cos\lambda_{,,} = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\sin\lambda_{,,} = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(1-e^2)\sin^2\psi}}{1 - e\cos\psi}$$

oder

$$\sin\lambda_{,,} = \frac{\cos\varphi \,.\, \sin\psi}{1 - e\cos\psi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und

$$\tang\lambda_{,,} = \frac{\cos\varphi \,.\, \sin\psi}{\cos\psi - e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wird, eine Gleichung die $\lambda_{,,}$ berechnen liesse, wenn nur ψ bekannt wäre.

Differenziren wir die beiden Ausdrücke (12) und (13) für ϱ, so ergiebt sich:

$$d\varrho = a\,.\cos^2\varphi \frac{e\,.\sin\lambda_{,,}}{(1+e\cos\lambda_{,,})^2}\,d\lambda_{,,}$$

und

$$d\varrho = a\,.\,e\,.\sin\psi\,.\,d\psi$$

d. h.

$$d\lambda_{,,} = \frac{\sin\psi\,(1+e\,.\cos\lambda_{,,})^2}{\cos^2\varphi\,\sin\lambda_{,,}}\,d\psi$$

welcher Ausdruck für $d\lambda_{,,}$ in obiges Integral eingeführt,

$$F = \frac{a^2 \cos^4\varphi}{2} \int_0^{\psi} \frac{\sin\psi}{\cos^2\varphi \,.\, \sin\lambda_{,,}} d\psi$$

oder, wenn wir hierin für $\sin\lambda_{,,}$ den Werth aus (15) setzen und reduciren:

$$F = \frac{a^2 \cos\varphi}{2} \int_0^{\psi} (1 - e\cos\psi)\, d\psi \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

liefert, wobei die willkürliche Grenze $\lambda_{,,}$ durch die willkürliche Grenze ψ ersetzt worden ist. Führen wir die Integration aus, so erhalten wir

$$F = \frac{a^2 \cos\varphi}{2} (\psi - e \sin\psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Unser elliptischer Sector, dessen Flächeninhalt bei gegebenem Winkel ψ somit berechnet werden könnte, ist aber auch gleich dem Kreissektor bei der mittleren Erde, und bezeichnen wir die Umlaufszeit mit T, den Zeitpunkt wo der Planet vom Wintersolstitium aus seinen Weg antrat, mit $\varDelta$, und mit τ einen weiteren Zeitmoment, entsprechend einem Winkel ψ, so ist der betreffende Kreissector

$$\frac{\pi \,.\, a \,.\, b}{T} (\tau - \varDelta),$$

oder wenn man beachtet, dass $b = a \,.\, \cos\varphi$ ist auch

$$\frac{\pi \,.\, a^2 \cos\varphi}{T} (\tau - \varDelta) = \frac{a^2 \cos\varphi}{2} (\psi - e\sin\psi)$$

oder

$$\frac{2\pi}{T} (\tau - \varDelta) = \psi - e\sin\psi \,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber nichts anderes vor als unseren obigen Winkel $\lambda_{,}$ oder die mittlere Anomalie, und ist demgemäss nun

$$\lambda_{,} = \psi - e\sin\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

eine Gleichung, die den Zweck hat aus einem beliebig anzunehmenden $\lambda_{,}$ und dem gegebenen e den Hilfswinkel ψ zu bestimmen. Da aber ψ einmal direkt und zugleich dessen Sinus auf der rechten Seite vorkommt, so wird die Lösung dieser Aufgabe nicht ohne Weiteres sondern erst durch eine Reihenentwickelung gelingen, die wenn nach Potenzen von e geordnet wird, sich als

$$\psi = \lambda_{,} + e\sin\lambda_{,} + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\lambda_{,} + \frac{1}{8} e^3 (3\sin 3\lambda - \sin\lambda_{,}) \quad . \; . \quad (20)$$

gestaltet, und ist somit begreiflich, wie aus der mittleren Anomalie $\lambda_{,}$ der Hilfswinkel ψ bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit bestimmt werden kann. Gehen wir zum Beispiel successiv bis zum vierten Gliede dieser Reihe vor, so ist

für $L_, = 30^0$
$\psi_, = 30^0\ 0'\ 0''$
$\psi_{,,} = 30^0 + 28'\ 42'',3 = 30^0\ 28'\ 42'',3$
$\psi_{,,,} = 30^0 + 28'\ 42'',3 + 24'' = 30^0\ 29'\ 6''$
$\psi_{,,,,} = 30^0 + 28'\ 42'',3 + 25'' + 0'' = 30^0\ 29'\ 6''$

d. h. schon beim Abbruch mit dem dritten Gliede erreichen wir einen hinlänglich genauen Werth für ψ, da der Zuwachs, der durchs vierte Glied noch hinzukäme, gleich Null gesetzt werden kann. Achten wir aber zunächst erst darauf, wie die Werthe des zweiten, dritten etc. Glieds berechnet werden müssen. Die Grösse e ist ein Quotient gleich der linearen Excentricität dividirt durch die halbe grosse Axe. Die mit diesem Quotienten e multiplicirten Sinusgrössen sind einfache numerische Werthe und haben keine Bedeutung von Winkelgrössen. Daraus folgt nun, dass wir z. B. durch das Produkt von $e \,.\, sin\, \lambda_,$ überhaupt keine Winkelgrösse bekommen. Denken wir aber die betreffenden Glieder mit 1 dividirt, so stellt das Produkt $e\ sin\, \lambda_,$ das Verhältniss eines Bogens gleich $e \,.\, sin\, \lambda_,$ zum Bogen gleich 1 vor und da zu einem Bogen gleich 1 der bekannte Winkel

$$57^0\ 17'\ 44'',8 = 206264''8$$

gehört, so gehört zum Bogen $e\ sin\, \lambda$ der Winkel

$$206264'',8 \,.\, (e\ sin\, \lambda_,)$$

d. h. wir müssen uns bei der Ausrechnung überall an die Glieder mit e den constanten Fctor 206264,8 hinzudenken. Das dritte Glied heisst desshalb eigentlich $\frac{1}{2} \,.\, 206264'',8\ e^2\ sin\, 60^0$ dessen logarithmische Ausrechnung den Werth 24'' ergiebt.

Es ist hiernach klar, dass wenn die mittlere Anomalie $\lambda_,$ gegeben wird, mit Hilfe obiger Reihe sich der Hilfswinkel ψ berechnen lässt. Kennen wir aber den Winkel ψ, so ist weiter klar, wie durch Einführung dieses Winkels ψ in die obige Gleichung (16) das $tang\, \lambda_{,,}$ und hiermit $\lambda_{,,}$ als die w a h r e A n o m a l i e gefunden werden kann. Für unseren gewählten Werth $\lambda_, = 30^0$ würde demnach

$$tang\, \lambda_{,,} = \frac{sin\,(30^0\ 29'\ 6'')\, \sqrt{1-e^2}}{cos\,(30^0\ 29'\ 6'') - 0{,}0167}$$

sein, da $cos\, \varphi = \sqrt{1-e^2}$ ist. Setzen wir diese Grösse für die Erdbahn gleich 1, so berechnet sich an der Hand siebenstelliger Logarithmen

$$log\ tang\, \lambda_{,,} = 0{,}7783882$$

und hiernach

$$\lambda_{,,} = 30^0\ 58'\ 40''.$$

Man begreift also wie man auf diesem Umwege schliesslich zu den Werthen von $\lambda_{,,}$ gelangen kann. Um jedoch dieses Ziel direkt zu erreichen, hat man versucht eine Reihe zu erhalten, in der die

Werthe von $\lambda_,$ und die Sinus der vielfachen Werthe von $\lambda_,$ stehen, und welche Reihe dann bis zu einem gewissen Gliede benutzt den Werth von $\lambda_{,,}$ direkt liefert. Diese Reihe ist:

$$\lambda_{,,} = \lambda_, + 6918'',37 \; sin\, \lambda_, + 72'',52 \; sin\, 2\lambda_, + 1'',05 \; sin\, 3\lambda_, + \; \ldots \quad (21)$$

Setzen wir hierin für $\lambda_,$ z. B. 30^0, so folgt, wenn wir die drei ersten Glieder allein berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \lambda_{,,} &= 30^0 + 6918'',37 \, \frac{1}{2} + 72'',52 \, . \, 0,866 \\ &= 30^0 + 3521'',98 \\ &= 30^0 \, 58' \, 42'' \end{aligned}$$

welches mit unserem eben auf anderem Wege gefundenen Werthe genügend übereinstimmt. Man findet diese Reihe entwickelt in Brünnow's „Sphärischer Astronomie" 3. Aufl. S. 95 und wird erhalten wenn man in der allgemeinen Reihe:

$$\lambda_{,,} = \lambda_, + 2\, e \; sin\, \lambda_, + \frac{5}{4} e^2 \; sin\, 2\lambda_, + \frac{13}{12} e^3 \; sin\, 3\lambda_, + \; \ldots .$$

für e den Werth 0,01677 einsetzt, ein Werth der fürs Jahr 1850 der absolut genaue ist. Die Glieder, welche auf $\lambda_,$ folgen zusammengenommen bilden nun das, was man in der Astronomie die

„Mittelpunktsgleichung"

nennt und versteht man darunter also die Summe der Grössen, die zur mittleren Anomalie hinzugefügt werden müssen, um die wahre zu erhalten.

Führen wir in Gl. (21) für $\lambda_{,,}$ und $\lambda_,$ die aus der Gl. (6) sich ergebenden Werthe $(L_{,,} - 270^0)$ und $(L_, - 270^0)$ ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} L_{,,} = L_, + 6918'',37 \; sin\, (L_, - 270^0) + 72'',52 \; sin\, 2\, (L_, - 270^0) + \\ + 1'',05 \; sin\, 3\, (L_, - 270^0) + \; \ldots . \end{aligned}$$

oder

$$L_{,,} = L_, + 6918'',37 \; cos\, L_, - 72'',52 \; sin\, 2L_, - 1'',05 \; cos\, 3L_, \ldots \quad (22)$$

und wird eine einfache Betrachtung zur Ueberzeugung führen, dass auch die Summe der Glieder die rechts auf $L_,$ folgen nichts anderes bedeutet als das, was wir soeben mit dem Namen Mittelpunktsgleichung bezeichnet haben. Da aber $L_{,,} - L_,$ nach unserer früheren Bezeichnung gleich $- \varDelta\alpha_{,,}$ zu setzen ist, so ergiebt sich wie wir schon S. 77 angegeben haben, dass $\varDelta\alpha_{,,}$ der negative Werth der Mittelpunktsgleichung ist.

§. 20. Unserer vorausgehenden Betrachtung gemäss ist

$$ZG = - (\varDelta\alpha_, + \varDelta\alpha_{,,})$$

von welchen beiden Summanden wir $\varDelta\alpha_{,,}$ soeben genauer kennen gelernt haben. Um in ähnlicher Weise einen Ausdruck für $\varDelta\alpha_,$, das übrigens nach der Gleichung (I) S. 66 unmittelbar berechnet werden könnte, zu finden, benutzen wir am einfachsten die Gleichung (2) bei der eine Reihenentwickelung

$$AR = L_{,,} - tang\,\frac{^2\varepsilon}{2}\,sin\,2L_{,,} + \frac{1}{2}\,tang\,\frac{^4\varepsilon}{2}\,sin\,4L_{,,} \;.\;.\;.\;.$$

oder

$$L_{,,} = AR + tang\,\frac{^2\varepsilon}{2}\,sin\,2L_{,,} - \frac{1}{2}\,tang\,\frac{^4\varepsilon}{2}\,sin\,4L_{,,} \;.\;.\;.\;.$$

oder nach Einführung des numerischen Werthes von ε

$$L_{,,} = AR + 8891'',56\;sin\,2L_{,,} - 191'',65\;sin\,4L_{,,} \;.\;.\;.\;.\quad (23)$$

liefert. In dieser Gleichung pflegt man die auf AR folgende Summe der einzelnen Glieder mit dem Namen der

„Reduktion auf die Ekliptik"

zu berechnen und versteht darunter also diejenige Grösse, die zur Rectascension hinzugefügt werden muss, um die zugehörige Länge zu finden. Da nun $\Delta\alpha_{,} = L_{,,} - AR$ ist, so folgt wie wir auch schon S. 77 angaben, dass $\Delta\alpha_{,}$ gleich der Reduktion auf die Ekliptik ist. Da ferner $L_{,,}$ nur um $\Delta\alpha_{,,}$ von $L_{,}$ abweicht, so dürfen wir uns hier zunächst einmal erlauben in der Reihe (23) rechts anstatt $L_{,,}$ ohne Weiteres $L_{,}$ zu setzen; setzen wir dann für $L_{,,}$ links den Werth aus Gl. (22) und beachten die Definition der Zeitgleichung von S. 79, so wird letztere nach einiger Reduction gleich

$$ZG = +\;6918'',37\;cos\,L_{,} - 8964'',08\;sin\,2L_{,}$$
$$-\;1,05\;cos\,3\,L_{,} + 191,65\;.\;sin\,4L_{,}$$

. . . .

. . . .

Verwandeln wir die Grössen rechts, die jetzt Winkelgrössen sind durch Division mit 15 in Zeitgrössen und beachten ferner, dass hierbei die Sinusse und Cosinusse höchstens den Werth 1 erreichen, so dürfen wir, um die Zeitgleichung zunächst der Hauptsache nach kennen zu lernen, uns erlauben, nur die beiden obersten Glieder beizubehalten, wonach nunmehr

$$ZG = \frac{6918,^s37}{15}\;cos\,L_{,} - \frac{8964,^s08}{15}\;sin\,2L_{,}$$

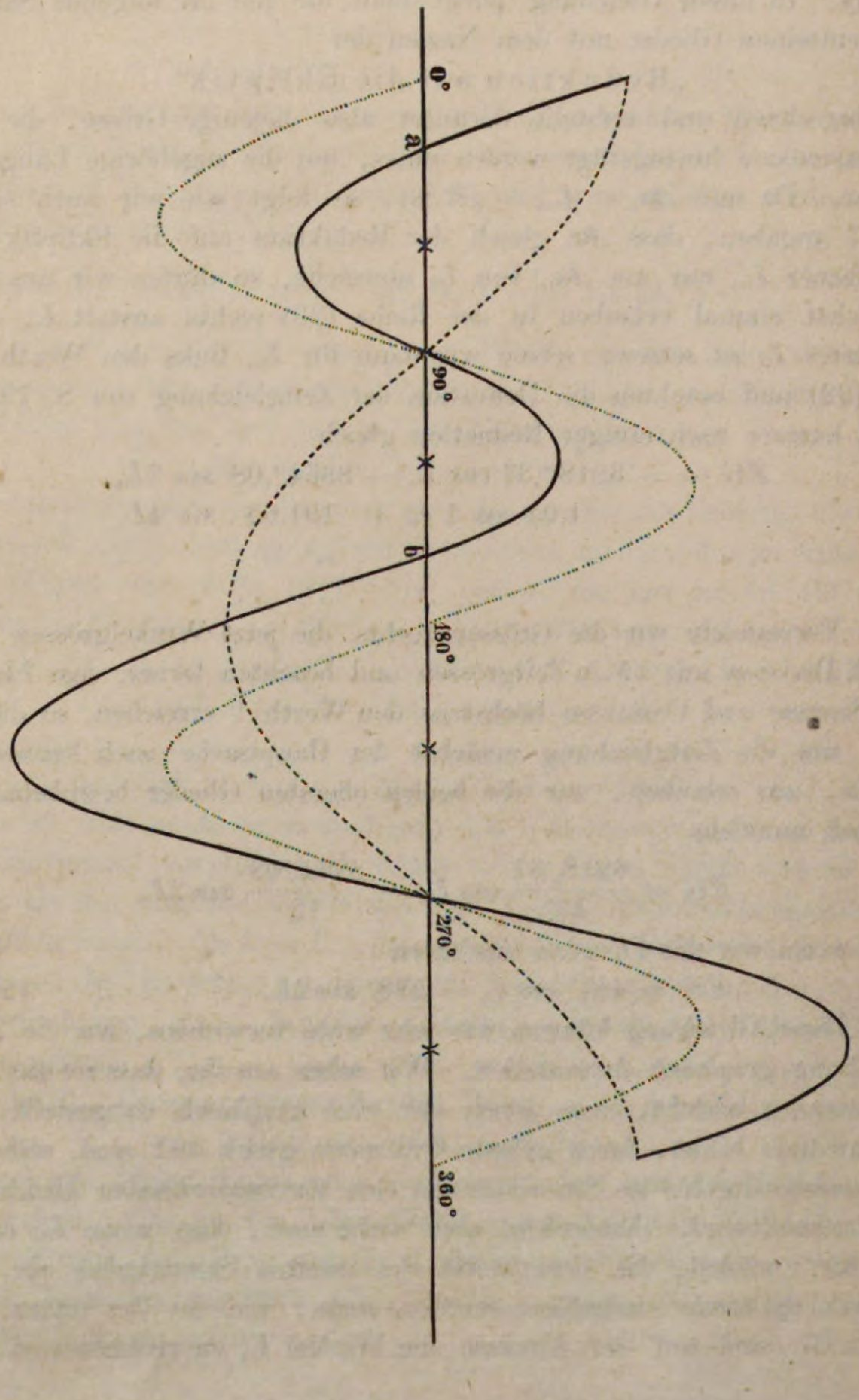
oder wenn wir die Division ausführen

$$ZG = 461^s\;cos\,L_{,} - 598^s\;sin\,2L_{,} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (24)$$

ist. Diese Gleichung können wir sehr wohl verwenden, um die Zeitgleichung graphisch darzustellen. Wir sehen aus ihr, dass sie aus zwei Summanden besteht, von denen der eine graphisch dargestellt eine Cosinuslinie bildet, deren grösste Ordinaten gleich 461 sind, während der andere durch eine Sinuslinie mit den Maximalordinaten gleich 598 versinnlicht wird. Ausserdem aber sieht man, dass wenn $L_{,}$ von 0 bis 360° wächst, die Periodicität des zweiten Summanden als eine doppelt so rasche aufgefasst werden muss, wie die des ersten. In Figur 27 sind auf der Abscisse die Winkel $L_{,}$ zu rechnen und ent-

spricht der Strecke von 1 Millimeter ein Winkel L, von drei Graden. Was die Ordinaten anlangt, so sind die Zahlen 461 und 598 mit 20 dividirt und diese Strecke gleich 1 Millimeter gesetzt worden. Die betreffenden Zahlen würden demgemäss gleich 23,0 und 29,9 also in runder Zahl 23 und 30 sein und entspricht bei den Ordinaten ein Millimeter einem Zeitwerthe von 20 Secunden.

Figur 27.



Die gestrichelte Curve stellt den Summanden

$$y' = 461 \cos L,$$

die punktirte den Summanden

$$y'' = -598 \sin 2L,$$

die ausgezogene die Zeitgleichung

$$ZG = y' + y''$$

vor und weist der Verlauf der Curve einen Werth der Zeitgleichung gleich Null auf für die Abscissen a, 90°, b und 270° oder

$$L_{,} = 22^{\circ}\,40'; \; 90^{\circ}; \; 157^{\circ}\,20; \; 270^{\circ}$$

d. h. wenn wir am 21. März $L_{,} = 0$ annehmen und das Jahr zu 365 Tagen rechnen für

$$T = 22{,}9; \; 91{,}2; \; 159{,}5; \; 273{,}7$$

oder wenn wir den 21. März als den 80. Tag ansehen am

13. April; 20. Juni; 27. August; 19. December.

Ferner lehrt der Anblick der Figur 27, dass die Curve beiderseits für $L_{,} = 90^{\circ}$ und $L_{,} = 270^{\circ}$ aus umgekehrt symmetrischen Aesten besteht, woraus folgt: dass das erste negative und erste positive Maximum ebenso das zweite negative und zweite positive Maximum je einander gleich sind. Diese Werthe treten an den mit einem Kreuzchen bezeichneten Stellen der Abscisse ein, nämlich der Zeichnung gemäss für

$$L_{,} = 55^{\circ}{,}5; \; 127^{\circ}{,}5; \; 223^{\circ}{,}8; \; 324^{\circ}{,}0$$

oder

$$T = 56{,}3; \; 129{,}2; \; 226{,}8; \; 328{,}4$$

Tagen d. h. am 16. Mai; 28. Juli; 3. November; 12. Febr.

Die zugehörigen Ordinaten dem absoluten Werthe nach sind gleich

14,2 und 42,5 Millim.

denen ein Zeitwerth von

284 und 850 Secunden oder

$4^{m}\,44^{s}$ und $14^{m}\,10^{s}$

entspricht.

§. 21. Wir hätten nun die Zeitgleichung in ihrem Verlaufe soweit kennen gelernt, als es mit Rücksicht auf die von uns zugelassenen Vereinfachungen möglich ist; aber abgesehen von dieser Zulassung ist die Sache aus einem anderen Grunde noch nicht ganz so, wie wir sie dargestellt haben, desshalb nämlich, weil wir annahmen es fiele das Wintersolstitium und das Perihel zusammen, während dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Ersteres tritt ein, wenn die Erde eine solche Stellung in ihrer Bahn bekommt, dass eine Ebene durch die Erdaxe und durch die ⊙ zugleich senkrecht auf die Ebene der Ekliptik zu stehen kommt, und zugleich das Nordende der Erdaxe eine von der ⊙ abgewendete Lage einnimmt. Den Durchschnitt dieser Verticalebene mit der Ebene der Ekliptik sahen

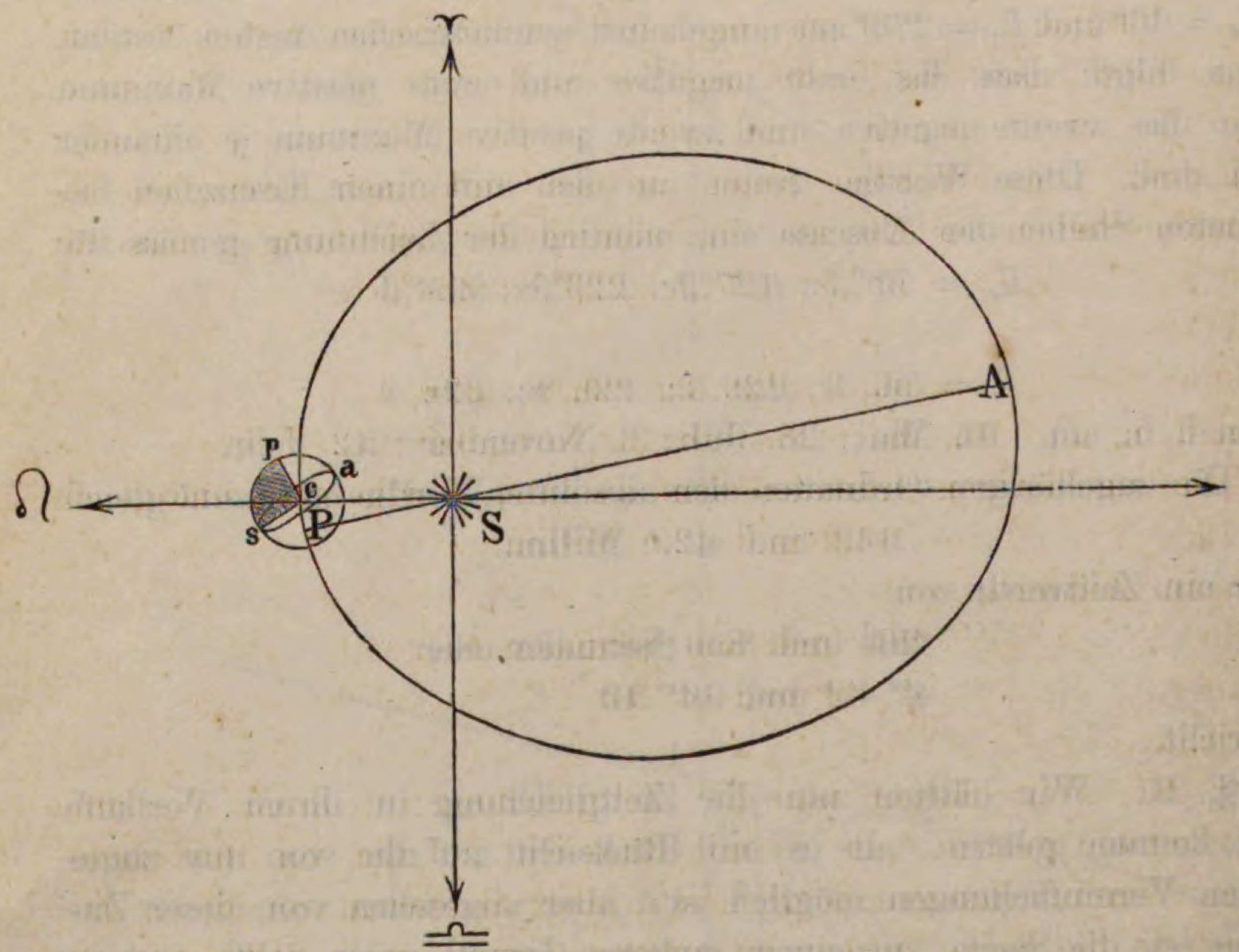
wir bis hierher als identisch mit der grossen Axe der Ellipse an und müssen nun diese Ansicht aufgeben. Denn in Wirklichkeit bildeten diese beiden Linien im Jahre 1800 einen Winkel von 9° 30′ 22″ miteinander und wächst derselbe jährlich vom ♈ aus gerechnet um 61″,7, so dass er hiernach im Jahre 1850 10° 21′ 47″ betrug.

Rechnen wir also vom Frühlingspunkte aus die Erdlängen, so ist bis jetzt angenommen worden: die Länge des Perihels sei gleich 90° während wir für 1850 nunmehr, da für dieses Jahr die Länge factisch um 10° 21′ 47″ grösser war, diese Länge gleich

100° 21′ 47″

setzen müssen. Die Sache verhält sich dann so, wie in Figur 28 dargestellt ist. Die Linien ♋♑ und ♈♎ behalten ihre Lagen unverändert bei, und fiel nach unserer bisherigen Annahme die grosse Axe

Figur 28.



der Ellipse mit ersterer zusammen, während sie doch 1850 die Lage *PA* einnahm. Das Wintersolstitium trat demnach 1850 ein, als die Erde in *c* stand und eine Ebene durch die Erdaxe *cp* durch *S* und ♋♑ gelegt zugleich senkrecht auf die Ekliptik zu liegen kam und auch der Schatten *cs* der Erdaxe in diese Verticalebene fiel; das Perihel aber war in diesem Momente noch nicht erreicht und musste die Erde hierzu erst den Weg *cP* in ihrer Bahn weiter zurücklegen. Es folgt daraus, dass wir anstatt der Gleichungen (6) auf S. 73 setzen müssen

$$L_{,,} = \lambda'' + 270 + 10^\circ\, 21'\, 47''$$
$$L_{,} = \lambda_{,} + 270 + 10^\circ\, 21'\, 47''$$

wonach die der Gleichung (22) vorausgehende Gleichung übergeht in:

$$L_{,,} = L_{,} + 6918'',37\, sin(L_{,} - 280^\circ\, 21'\, 47'') + 72'',52\, sin2\,(L_{,} - 280^\circ\, 21'\, 47)$$
$$+ 1'',05 \,.\, sin\, 3\,(L_{,} - 280^\circ\, 21'\, 47'') + \ldots\ldots$$

Nimmt man dann mit Brünnow S. 96, anstatt 10° 21′ 47″ den von Hansen und Olufsen in den „Tables du soleil" S. 1 angegebenen Werth 10° 21′ 41″ an, so liefert die Entwickelung der Sinusgrössen:

$$L_{,,} = L_{,} + 1244'',31\, sin\, L_{,} + 6805'',56\, cos\, L_{,}$$
$$- \quad 67,82 \quad sin\, 2\, L_{,} + 25,66 \quad cos\, L_{,}$$

Führt man ferner diese Werthe von $L_{,,}$ rechts in die Gleichung (23) ein, so ergiebt sich für die Zeitgleichung schliesslich der genaue Werth:

$$\left.\begin{array}{llll} ZG = & + \;\; 86^s,53\; sin\, L_{,} & & + 434^s,15\; cos\, L_{,*} \\ & - 596,64\; sin\, L_{,*} & & + \quad 1,69\; cos2L_{,} \\ & - \quad 3,77\; sin\, 3L_{,} & & - \;\; 18,77\; cos3L_{,} \\ & + \;\; 13,23\; sin\, 4L_{,} & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}\right\} \;\ldots\ldots \text{(IV)}$$

wobei selbstverständlich die Winkelgrössen durch Zeitgrössen ersetzt sind und wobei wir alle weiteren Glieder deren Coefficient an den Sinussen und Cosinussen kleiner als 1 ausfiel, weggelassen haben. Man wird erkennen, wie unsere Gleichung (24), die wir als vereinfachte Gleichung für die ZG annahmen angenähert erhalten wird, wenn wir in Gleichung (IV) nur die beiden mit einem * versehenen Glieder beibehalten, alle übrigen wegstreichen.

Eine weit genauere graphische Darstellung erhalten wir aber, wenn wir zu den beiden mit einem Sternchen versehenen Gliedern noch das Glied $86^s,53\; sin\, L_{,}$ hinzunehmen, so dass nun, wenn die Zeichnung in demselben Maassstabe wie bei der Figur 27 entworfen werden soll, und wir zu dem Ende die Coefficienten wieder vorher mit 20 dividiren, bei der Darstellung die Gleichung:

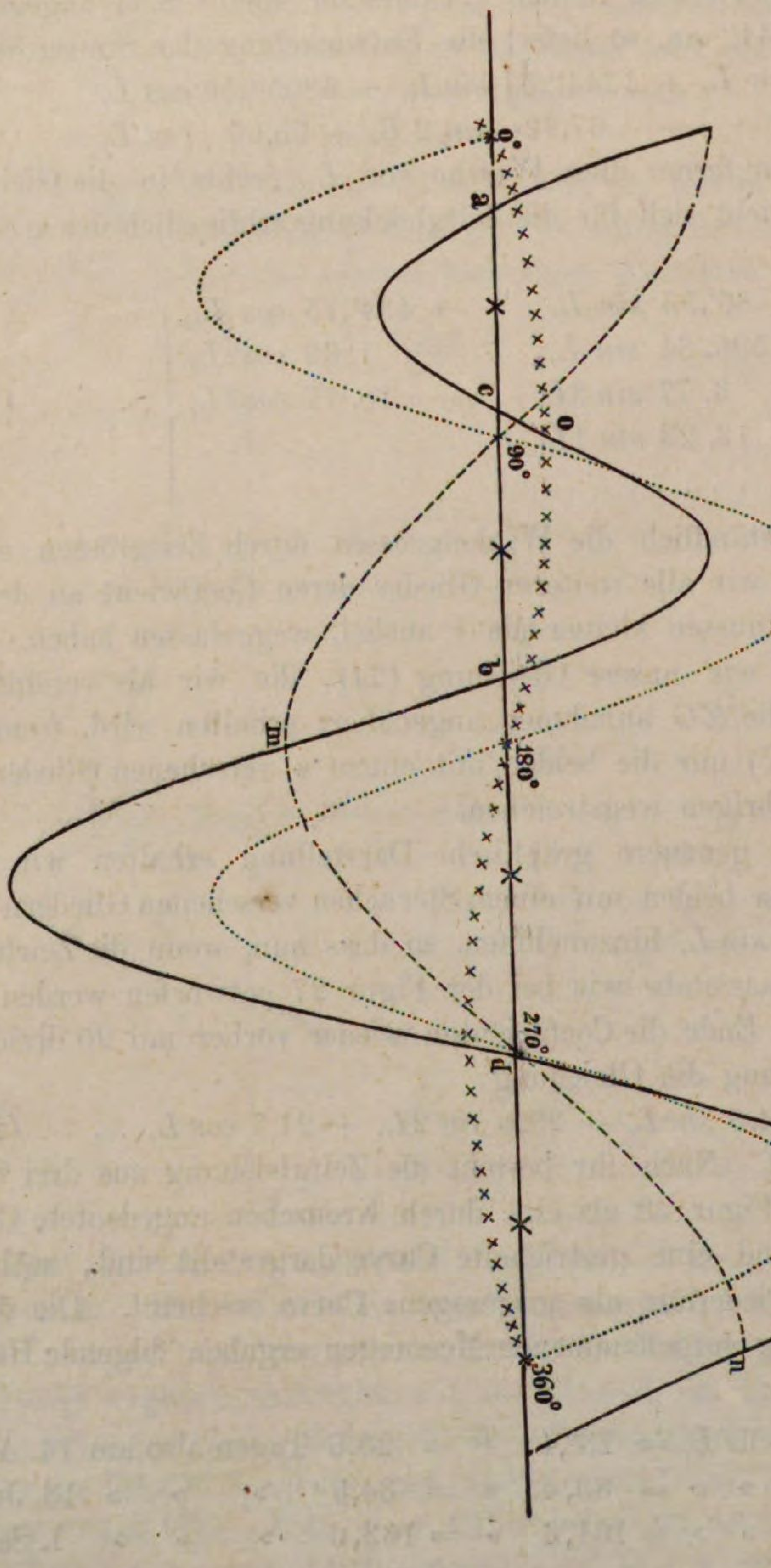
$$ZG = 4,3\; sin\, L_{,} - 29,8\; sin\, 2L_{,} + 21,7\; cos\, L_{,} \;\ldots\ldots (25)$$

zu verwenden ist. Nach ihr besteht die Zeitgleichung aus drei Summanden, die in Figur 29 als eine durch Kreuzchen angedeutete Curve, eine punktirte und eine gestrichelte Curve dargestellt sind, während die Resultante wiederum als ausgezogene Curve erscheint. Die direkt an der Zeichnung vorgenommenen Messungen ergaben folgende Hauptwerthe der ZG:

Erster Nullwerth für $L_{,}$	= 23°,4;	T	= 23,6	Tagen	also	am	14. April
Zweiter »	» » = 83,4	»	= 84,5	»	»	»	13. Juni
Dritter »	» » = 161,4	»	= 163,6	»	»	»	1. Sept.

Vierter	»	»	»	= 273, 6	»	= 277, 4	Tagen	also	am	23. Dec.
Erstes Minimum	»	»	»	= 50, 7	»	= 51, 4	»	»	»	11. Mai
Zweites	»	»	»	= 219, 6	»	= 222, 6	»	»	»	30. Octob.
Erstes Maximum	»	»	»	= 124, 2	»	= 125, 9	»	»	»	25. Juli
Zweites	»	»	»	= 324, 0	»	= 328, 5	»	»	»	12. Febr.

Figur 29.



Das astronomische Berliner Jahrbuch von 1850 weist in der That die der letzten Columne entsprechenden Daten am

$\frac{15.}{16.}$ April; $\frac{13.}{14.}$ Juni; $\frac{31. \text{Aug.}}{1. \text{Sptbr.}}$; $\frac{24.}{25.}$ Dec.; 15. Mai; 3. Nov.; 26. Juli; 11. Febr.

nach, welche mit den aus unserer in kleinem Maassstabe angefertigten Zeichnung, und in Rücksicht auf die auch jetzt noch bestehende Vereinfachung genügend übereinstimmen. Vergleichen wir weiter die Zeichnung Fig. 29 mit der der Fig. 27, so zeigen sich wesentliche Unterschiede, indem nunmehr der genauere Lauf der Zeitgleichung folgende Eigenthümlichkeiten darbietet.

1. Innerhalb Jahresfrist zeigt die Zeitgleichung keine Symmetrie ihrer absoluten Werthe beiderseits irgend eines Zeitpunkts.
2. Ein Minimum und das folgende Maximum sind einander nicht gleich, indem das

1. Minimum nach der Zeichnung	=	$3^m\ 48^s$ nach dem Jahrbuch	=	$3^m\ 55^s$
2. » » » »	=	16 40 » » »	=	16 16
1. Maximum » » »	=	6 48 » » »	=	6 10
2. » » » »	=	14 26 » » »	=	14 32

ist.

3. Denken wir in den Punkten *n*, *d*, *m* und *o* Tangenten an die ausgezogene Curve gelegt, so sind diese vier Tangenten diejenigen die am steilsten gegen die Abscissenaxe zu stehen kommen. Es folgt daraus, dass für die diesen vier Punkten entsprechenden Zeiten die „tägliche Aenderung der Zeitgleichung“ einen absolut grössten Werth erreicht, der nach Ausmessungen an der Zeichnung gegen den 27. März, 20. Juni, 15. Septb. und 25. Decb., dem Jahrbuch nach in der That genau am

31. März	gleich	$18^s,46$
20. Juni	»	12, 94
17. Septb.	»	21, 17
22. Dec.	»	29, 95

wird. Es folgt daraus

4. dass an den genannten vier Terminen zwei benachbarte wahre Sonnentage am meisten von einander abweichen.

Zum Schlusse dieser unserer Betrachtung über die wahre und mittlere Sonnenzeit wollen wir noch des im bürgerlichen Leben und in der Astronomie gebräuchlichen „Datums“ gedenken. In der Astronomie rechnet man den Tag von der oberen Culmination der Sonne an und zählt von hier bis zur nächsten Culmination von einem Mittage zum anderen durchgehend 24 Stunden. Im bürgerlichen Leben aber ist die Sache ganz anders: indem man von der Mitternacht an die Tage zählt und innerhalb dieser nicht von 0 bis 24, sondern von 0 bis 12 und dann wieder von 0 bis 12

Stunden rechnet. Man spricht desshalb im bürgerlichen Leben von „Stunden vor Mittag“ und „Stunden nach Mittag“, welche Benennung der Astronom eigentlich nicht nöthig hat. Was nun das Datum anlangt, muss bemerkt werden, dass ein Datum des astronomischen Sonnentags, der Mittags beginnt, dasselbe ist wie das Datum eines bürgerlichen Sonnentags, der 12 Stunden früher in der vorausgegangenen Mitternacht seinen Anfang nahm. Es folgt daraus, dass die Nachmittagsstunden im bürgerlichen Leben dasselbe Datum tragen wie das Datum des astronomischen Tags, dass aber die Vormittagsstunden des n. bürgerlichen Tages auf den (n—1). astronomischen Tag fallen. Der 16. Januar Nachmittags 7 Uhr bürgerlich ist demnach auch der 16. Januar 7 Uhr astronomisch; der 16. Januar Vormittags 7 Uhr ist aber astronomisch der 15. Januar 19 Uhr. Der Anfang eines neuen astronomischen Datums fällt daher 12 Stunden später als der im bürgerlichen Leben.

§. 22. Wir haben im Eingange zu diesem Abschnitte noch eine dritte Zeitart angeführt, die den Namen „Sternzeit“ trägt, eine Zeitart, die für den Astronomen vorzüglich zunächst in Betracht kommt. Da wir zur Abmessung des continuirlichen Zeitlaufs überhaupt sichtbarer Zeichen bedürfen, so bedürfen wir dieser Zeichen auch zur Eintheilung der Zeit nach Sternzeit. Den ersten grossen Abschnitt bei dieser Eintheilung oder Abmessung nennen wir einen „Sterntag“, der für sich selbstverständlich wieder in „Sternstunden“, „Sternminuten“ und „Sternsecunden“ getheilt wird. Die Sterne die hierbei in Betracht kommen sind die Fixsterne von denen wir wissen, dass sie so weit von uns entfernt liegen, dass es bezüglich des Aussehens des Fixsternhimmels ganz gleichgiltig ist ob wir die Erde jährlich um die Sonne herumwandern oder ob wir sie ruhig stehen lassen. Die jährliche Progressivbewegung bietet daher nichts Neues und Auffälliges für den Anblick des Fixsternhimmels und fragt es sich weiter, welche Erscheinungen sind mit der täglichen Drehung der Erde um ihre Axe verbunden? Diese Drehung ist eine absolut gleichförmige und folgt daraus, dass die Zeitabschnitte, die als die aufeinander folgenden Rotationen der Erde um ihre Axe betrachtet werden müssen, absolut gleich sind. Da wir aber die Rotation der Erde um ihre Axe nicht merken, so ist klar, dass hiernach die Zeit nicht abgemessen werden kann und wir wiederum eine Scheinbewegung in der Welt der Gestirne auffassen müssen, die eine Folge jener Rotation ist. Jedermann weiss nun, wie diese Scheinbewegung in einem scheinbaren Umlaufe des Himmelsgewölbes um die Erdaxe oder die damit zusammenfallende Himmelsaxe ist, einem Umlaufe, der scheinbar eine der Rotation der Erde um ihre Axe entgegengesetzte Richtung be-

sitzt. Halten wir uns an die wirklich stattfindende Drehung der Erde um ihre Axe, und denken uns einen Meridian eines Beobachters, so wird dieser Meridian in einem bestimmten Momente durch einen bestimmten Fixstern gehen, wobei dieser letztere für den betreffenden Beobachter „culminirt“ und entweder in seiner oberen oder unteren Culmination befindlich ist, je nachdem er einem Bewohner der Erde den höchsten oder tiefsten Stand gegen den Horizont einzunehmen scheint. Die Zeit nun die der Meridian gebraucht, um aus der Coincidenz mit einem Fixsterne bis wieder zur gleichartigen Coincidenz zu gelangen: also die Zeit von einer Culmination eines Fixsterns bis zur nächstfolgenden pflegt man mit dem Namen „Sterntag“ zu bezeichnen. Es ist zunächst ganz gleichgiltig, welchen Stern man hierbei ins Auge fasst, aber sicherlich wird es nöthig sein sich über einen zu verständigen, und sollte man erwarten, dass diess ein wirklicher Fixstern wäre der uns Licht zusendete und demnach ein wirklich sichtbares Zeichen am Himmel abgäbe. Letzteres ist jedoch nun nicht der Fall, sondern man hat gerade einen Punkt am Himmel ausgewählt, der nicht durch einen Stern ausgezeichnet ist, sondern nur als ein geometrischer Punkt des unendlich weiten Himmelsgewölbes anzusehen ist, nämlich den merkwürdigen Punkt, den man den „Frühlingsnachtgleichenpunkt“ oder den „Frühlingspunkt“ — im Zeichen mit ♈ dargestellt — zu nennen pflegt und den wir schon oben S. 63 hinlänglich bezeichnet haben. Im Momente, wo dieser Punkt in seiner oberen Culmination befindlich ist, fängt ein neuer Sterntag an, der sein Ende erreicht im Momente wo dieser Punkt die nächste obere Culmination anzeigt. Eine Uhr die bei einer solchen Culmination $0^h\ 0^m\ 0^s$ zeigt und den Zeitraum von hier bis zur nächsten genau in 24 Stunden theilt, pflegt man eine „Sternuhr“ zu nennen.

Aber der Frühlingspunkt ist kein absolut fester Punkt wie die übrigen Fixsterne, sondern verschiebt sich der jährlichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn entgegengesetzt um einen Winkel von rundweg 50″, und genauer für das Jahr 1800 um 50″,2235. Es folgt hieraus nothwendig, dass die Zeit von einer Culmination bis zur nächsten beim ♈ und einem Fixsterne nicht dasselbe bedeutet. Wäre nun diese Verschiebung des ♈ gleichmässig, so ist klar, dass trotzdem diese von uns definirten Sterntage alle ein und dieselbe Länge bekämen; ist sie dies aber nicht, so werden auch die Sterntage ungleich. In der That ist nun letzteres der Fall und es fragt sich, wie hilft man sich hier? Wir gehen jetzt nicht weiter auf diesen Gegenstand ein, da derselbe im vierten Capitel näher betrachtet werden soll und bemerken nur, dass eine mittlere Lage des Frühlingspunkts hier diejenige ist, welche berücksichtigt werden muss und dass man den dieser mittleren

Lage entsprechenden Winkel, die sogenannte „Praecession" nach der Formel

$$\lambda = 50'',21129 + 0'',0002442966\, t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

berechnen kann, worin t die Anzahl Jahre bedeutet, die seit dem Jahre 1750 verflossen sind. Ein Sterntag ist demnach die Zeit die verfliesst zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen dieses mittleren Frühlingspunkts. Unter „Sternzeit" aber verstehen wir, wie dies früher schon bei der wahren und mittleren Sonnenzeit auseinander gesetzt wurde, den Stundenwinkel, den unser Meridian mit diesem mittleren Frühlingspunkt bildet. Demgemäss ist es 0^h, 1^h 2^h .... Sternzeit, wenn dieser Frühlingspunkt 0^0 15^0 30^0 ... von unserem Meridian westlich entfernt liegt *).
Halten wir an diesen Principien fest, so werden wir nunmehr auch den Zusammenhang zwischen mittlerer Zeit und Sternzeit finden können.

Nach Hansen und Olufsen (Tables du soleil S. 1) beträgt die Länge eines „tropischen" Jahrs d. h. die Zeit welche verfliesst vom Momente, wo die ♁, die Sonne (die ⨀ und ◯ denken wir zusammenfallend) und der ♈ in einer Geraden liegen bis zum nächsten derartigen Momente oder wenn wir wollen die Zeit zwischen dem Momente, wo die Sonne mit dem ♈ scheinbar zusammenfällt bis wieder zu diesem Momente

$$365^t,2422008 - 0^t,00000006240\ (t - 1850) \quad . \; . \; . \quad (27)$$

wobei unter t die Zahl der Jahre zu verstehen ist, die seit dem Jahre 1850 verflossen. In Tagen, Stunden etc. ausgedrückt giebt dies

$$365^t\ 5^h\ 48^m\ 46^s,15 - 0^s,005392\ (t - 1850) \quad . \; . \; . \quad (28)$$

und zwar mittlere Sonnentage, Stunden etc., d. h. also auch mit andern Worten: innerhalb eines tropischen Jahrs culminirt die mittlere Sonne 365 mal, damit aber die Stellung ♁◯♈ oder ♁⨀♈ wieder vollständig eintritt, müssen noch 5^h 48^m $46^s,15$ MZ mehr verfliessen.

Fürs Jahr 1850 also die Mitte unseres Jahrhunderts war demnach die Länge des tropischen Jahrs gleich:

$$D = 365^t2422008 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

oder

$$D = 365^t\ 5^h\ 48^m\ 46^s,15 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Innerhalb dieser Zeit würde also die mittlere Erde in Bezug auf den ♈ — also relativ — 360^0 in ihrer Kreisbahn zurücklegen und würde demnach die „tägliche tropische Bewegung der mittleren Erde" oder was hiermit einerlei ist, die scheinbare tägliche tropische Bewegung der mittleren Sonne

*) Wir folgen hier insbesondere einer kurzen und klaren Darstellung, wie sie im Berliner astron. Jahrbuch von 1795 S. 113 von Prof. Fischer in Berlin gegeben wurde.

$$t = \frac{360^0}{365{,}2422008} = 59'\ 8'',3304$$

betragen. Denken wir also in Fig. 4, es culminire einem Bewohner des Meridians CA in einem bestimmten Anfangsmoment die Sonne und zugleich der unendlich weit in der Richtung CS anzunehmende ♈, so wird nach Ablauf eines ☉Tages, wenn wir den Winkel $C,SC = t$ annehmen, der Meridian desselben Beobachters die Lage C,A, angenommen haben und die ☉ wieder culminiren sehen, während der ♈ um denselben Winkel $t = 59'\ 8'',3304$ bereits westlich von ihm steht. Das heisst aber nach unserer gegebenen Definition von Sternzeit Nichts anderes als nach Ablauf eines mittleren Sonnentags ist verflossen ein

$$\text{ganzer Sterntag} + \frac{t}{15}\ \text{Sternzeit oder}\ \left(24^h + \frac{59'8'',3304}{15}\right)\ \text{Sternzeit}$$

oder

$$24^h + 3^m\ 56^s,556$$

und haben wir somit nun die wichtige Beziehung erlangt, der gemäss:

$$1\ \text{mittlerer Sonnentag} = 24^h\ 3^m\ 56^s,556\ \text{Sternzeit}$$

ist. Verwandelt man mittelst der Taf. III $3^m\ 56^s,556$ in einen Tagebruch, so erhält man

$$0^t,0027379119$$

und ist demgemäss:

$$1\ \text{mittlerer Sonnentag} = 1^t,0027379119\ \text{Sternzeit}$$

und somit auch:

$$1\ \text{Sterntag} = \frac{1}{1{,}0027379119} = 0^t,9972695638\ \text{mittl. Sonnenzeit},$$

oder:

$$1\ \text{Sterntag} = (1 - 0{,}0027304362)\ \text{mittl. Sonnentag},$$

oder,

$$1\ \text{Sterntag} = (24^h - 3^m\ 55^s,809)\ \text{mittl. Sonnenzeit}.$$

Allgemein aber ergiebt sich nach dem Vorausgehenden:

$$\left.\begin{aligned} MZ &= 0{,}9972695638 \,.\, SZ \\ SZ &= 1{,}0027379119 \,.\, MZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Diesen Gleichungen gemäss wäre also

$$1\ \text{Sternstunde} = 59^m\ 50^s,170\ MZ$$

und

$$1\ \text{mittlere Zeitstunde} = 1^h\ 0^m\ 9^s,856\ SZ.$$

Es würde nun sehr zeitraubend sein, wollte man die in der Praxis zahllos vorkommenden Reductionen nach den Gleichungen (31) allemal im Einzelnen berechnen und hat man deshalb um dieses Geschäft bedeutend zu erleichtern Tafeln entworfen, in denen das Vorausgehende in einer als zweckmässig erscheinenden Form Berücksichtigung erfahren hat. Es kann dieses so geschehen, dass man die Gleichungen

(31) unmittelbar berücksichtigt und zwei Tabellen (Taf. I (A) und I (B)) entwirft, deren Argumente MZ und SZ sind und wobei man in einer nebenstehenden Columne unmittelbar die betreffende SZ und MZ in Stunden, Minuten und Secunden abliesst. Man kann aber auch anstatt der Gleichungen (31) die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} MZ &= SZ - 0{,}0027304362 \,.\, SZ \\ SZ &= MZ + 0{,}0027379119 \,.\, MZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

benutzen, wobei dann die Correctionen $0{,}0027304362 \,.\, SZ$ und $0{,}0027379119 \,.\, MZ$ neben den Argumenten SZ und MZ zu finden sind. Letzteres halten wir fürs Zweckmässigste und sind demgemäss auch die Taf. II (A) und II (B) am Schlusse zu finden. Ist z. B.

$$SZ = 3^h\, 20^m\, 23^s{,}6$$

gegeben, so wird die Correction $= 0{,}0027379119\ (3^h\, 20^m\, 23^s{,}6)$ die man im Einzelnen

für 3^h	=	$29^s{,}488$
20^m	=	$3{,}277$
23	=	$0{,}063$
$0{,}6$	=	$0{,}002$
in Summa	=	$32^s{,}830$

findet demgemäss die gesuchte MZ sich gleich $3^h\, 19^m\, 50^s{,}770$ ergiebt.

Kapitel III.

Die praktische Anwendung der vorausgehenden Lehren insbesondere unter Beihilfe astronomischer Ephemeriden.

§. 23. Nachdem im vorausgehenden Kapitel das Wesen der drei Zeitarten dargestellt worden ist, haben wir nunmehr diese Lehren auch praktisch zu verwerthen, zu welchem Ende wir zunächst ein sehr nützliches Geschäft erledigen wollen, indem wir uns die Einrichtung einiger astronomischer Jahrbücher ansehen, deren Gebrauch nun fortwährend nöthig wird und den wir desshalb erläutern müssen, weil die in den Jahrbüchern selbst gegebenen Erläuterungen manchem Anfänger vielleicht zu kurz gefasst erscheinen möchten, und weil ausserdem eine besondere Erläuterung mit Rücksicht auf unseren Gegenstand erwünscht sein muss. Von den vorhandenen Jahrbüchern werden wir drei berücksichtigen, nämlich: das „Berliner astronomische Jahrbuch" herausgegeben von dem jetzigen Direktor der Berliner Sternwarte Professor W. Foerster, unter Mitwirkung von Dr. Rudolf Powalky; ferner das „Greenwicher Jahrbuch" oder den „Nautical Almanac", das unter der Leitung des Astronomen J. R. Hind herausgegeben wird, und noch das von Dr. C. Bremiker herausgegebene „Nautische Jahrbuch". Diese beiden zuletzt genannten werden ihres billigen Anschaffungspreises wegen von Manchem dem Berliner Jahrbuche wohl vorgezogen werden. Mit Bezug darauf jedoch, dass letzteres vielfach in Bibliotheken vertreten ist, ja eigentlich seiner Bedeutung wegen jeder nennenswerthen Bibliothek und den betreffenden Instituten gratis geliefert werden sollte, wird seine Benutzung wohl auch Vielen ohne Kostenaufwand möglich sein. Selbstverständlich aber wird die Erläuterung der genannten Jahrbücher nur in Bezug auf die Gegenstände erfolgen, die für unseren Zweck zunächst von Bedeutung sind; auch wird Alles, was bei einem Jahrbuche mit dem, nach einem andern Jahrbuche bereits Erläuterten, völlig identisch ist, nur einfach einer Bemerkung über diese Identität bedürfen. Wir werden vom Berliner Jahrbuch ausgehen und wählen hierbei den Jahrgang 1870 als Anfang unseres Jahrzehnts.

Dieses Jahrbuch *) enthält zwei aufeinanderfolgende Seiten mit I und II bezeichnet, die für jeden Monat wiederkehren und sich von vornherein durch ihre Ueberschriften

„Wahrer Berliner Mittag" auf Seite I
„Mittlerer Berliner Mittag" „ „ II

unterscheiden. Die Seiten I haben acht, die Seiten II dagegen neun Columnen und wollen wir diese kurz so bezeichnen, dass wir an I und II unten eine arabische Ziffer als Ordnungszahl der Columne anfügen, so dass z. B. II_7 die 7. Columne der Seiten II bezeichnet.

Die Columnen I_1 und I_2 mit der gemeinsamen Ueberschrift „Monats- und Wochentag" sind ohne Weiteres klar; I_1 ist ausserdem ganz dasselbe wie II_1, während II_2 die fortlaufende Zahl der Tage 1 bis 365 bezw. 366 enthält. Diese letztere Columne ist oft von Nutzen, wenn man rasch finden soll, der wie vielte Tag irgend ein Datum des Jahrs ist: z. B. fragt der wie vielte Tag ist der 7. Mai? Antw. der 127. Sie ist ferner von Nutzen, wenn man die zwischen zwei bestimmten Daten liegende Anzahl von Tagen angeben soll: Z. B. die Anzahl Tage zwischen dem 13. Mai und 24. Septbr. Antw. 267 — 133 = 134.

Die Columne I_3 enthält die Zeitgleichung mit der der Gleichung (III) Seite 80 entsprechenden Ueberschrift. Diese genauen Werthe und den ganzen Verlauf der Zeitgleichung mit unseren im § 21 gefundenen Resultaten zu vergleichen, wird nicht ohne Interesse sein und kann der Leser diesen Vergleich leicht selbst anstellen.

Da die Werthe der Zeitgleichung auf Seite I stehen, und diese Seite nur für den Moment „wahrer Mittag" gilt, so leuchtet ein, dass für diesen Moment die *WZ* gleich Null ist und dass diese Werthe der Zeitgleichung demnach auch aufgefasst werden können als

„Stundenwinkel der **mittleren** Sonne im Momente
„des wahren Mittags dividirt durch 15",

wobei, wenn die wahre Sonne zuerst culminirt, dieser Winkel negativ zu nehmen ist. Denn wir zählen die Stundenwinkel als positive, wenn wir vom Meridian aus der Rotation der Erde um ihre Axe entgegen bis zu einem Gestirne rechnen.

Die Col. I_4 mit der Ueberschrift „*AR*. ⨀ app." (Rectascensio solis apparens) enthält die „scheinbare Rectascension" **) der wahren

---

*) Erscheint: Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung; Preis 4 Thaler.

**) Wir werden im nächsten Kapitel auch eine wahre Rectascension der wahren Sonne kennen lernen, eine Rectascension wobei z. B. auf Aberration nicht Rücksicht genommen wird, während die Rectasc. app. eine Rectascension ist, die das Auge mit einem Instrumente wirklich misst, welches Auge dem Einflusse der

Sonne im wahren Berliner Mittage, in Zeit angegeben. Sie ist einmal im Jahre gleich Null und einmal gleich $12^h\ 0^m\ 0^s$ nämlich zur Zeit des Frühlings- und Herbstäquinoctiums. An diese Columne schliesst sich I_5 mit der Ueberschrift „Diff.“ an, die häufig in Verbindung mit I_4 benutzt wird, indem I_5 die Differenz zweier auf einander folgenden Rectascensionen im wahren Mittage also die täglichen Rectascensionsunterschiede enthält. Diese Differenzen kommen bei verschiedenen Gelegenheiten in Betracht, z. B. bei der Aufgabe: den genauen Eintritt des Herbstäquinoctiums anzugeben. Das Jahrbuch 1870 enthält diesen zwischen dem 22. und 23. September, und da die Differenz der Rectascensionen gleich

$3^m\ 35^s{,}73$ und am 23. Sept. die $\mathcal{AR}\odot = 12^h\ 0^m\ 43^s{,}35$ ist,

so ist weiter, wenn wir die gesuchte Zeit vom 23. Sept. an rückwärts gerechnet mit x bezeichnen, einfach

$$\frac{x}{24} = \frac{43^s{,}35}{3^m\ 35{,}73} = \frac{43{,}35}{215{,}73}\ ^{*)}$$

$$x = 4^h{,}8225 = 4^h\ 49^m\ 21^s{,}00$$

mithin Eintritt des Herbstäquinoctiums am

22. Sept. $19^h\ 10^m\ 39^s{,}00$.

Die zusammengehörigen Columnen I_6 und I_7 mit der Ueberschrift „Decl. $\odot$ app.“ (Declinatio solis apparens) und „Diff.“ enthalten die „scheinbaren Declinationen“ der $\odot$ im wahren Mittage und deren tägliche Differenzen. Die Declinationscolumne muss zweimal des Jahrs die Werthe 0 einmal ein Maximum und einmal ein Minimum erhalten, letzteres zur Zeit der Solstitien, ersteres zur Zeit der Nachtgleichen. Um mit Hilfe der täglichen Differenzen unsere eben gelöste Aufgabe zum zweitenmale zu lösen, beachten wir, dass die Declination die zwischen dem 22. und 23. Sept. gleich Null werden muss, sich hier täglich um $23'\ 23''{,}9$ ändert, und am 23. Sept. gleich $-0\ 4'\ 41''{,}5$ ist, dass mithin $x = \frac{24\,.\,4'\ 41''{,}5}{23'\ 23''{,}9} = 4^h{,}8121 = 4^h\ 48^m\ 43^s{,}56$

und das Herbstäquinoctium am 22. Sept. $19^h\ 11^m\ 16^s{,}44$ stattfindet.

Diese beiden Werthe stimmen nicht ganz überein und hat dies einmal seinen Grund darin, dass wir die sogenannte »einfache Interpolation« angewendet haben, welche voraussetzt dass die $\mathcal{AR}\odot$ wie auch die Decl. innerhalb der Zeit vom 22. auf den 23. Sept. sich genau proportional der Zeit ändere, was in aller Strenge nicht ange-

---

Aberration unterworfen ist, und nur die Winkelgrössen nach dem Augenscheine bestimmen kann.

*) Jetzt und im Folgenden werden wir uns mit Vortheil der Tafel IV des Anhangs bedienen, auf welcher man die Stunden und Minuten in Secunden verwandelt findet.

nommen werden kann. Da die Unterschiede, die wegen dieser Art der Interpolation zum Vorschein kommen, aber hier sowohl wie auch bei den noch folgenden Aufgaben gering sind, so werden wir dennoch an dieser einfachen Interpolation festhalten.

Einen weiteren Grund der nicht vollständigen Uebereinstimmung obiger beiden Werthe müssen wir hier unberücksichtigt lassen, werden ihm jedoch im folgenden Kapitel möglichst unsere Aufmerksamkeit schenken.

Was nun den Zusammenhang der Columnen I_4 und I_6 also der *Æ*☉ und der *Decl.* ☉ anlangt, so ist klar, dass hierbei ein sphärisches Dreieck mit den Grössen *Æ*, δ und ε in Betracht kommt, also das Dreieck *Dsa* Fig. 21 in welchem

$$Da = Æ☉$$
$$sa = \text{Decl.}☉$$
$$\sphericalangle sDa = \varepsilon$$
$$\sphericalangle saD = 90^0$$

und welches wegen des Winkels *saD* immer ein rechtwinkliges ist. In einem solchen Dreiecke ist wenn wir die Winkel und Seiten mit

$$A, B, C;$$
$$a, b, c$$

bezeichnen, und C als rechten Winkel, ferner *Æ* als a, δ als b und ε als B ansehen

$$tang\, b = sin\, a \,.\, tang\, B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und demgemäss

$$\left.\begin{aligned} tang\,\delta &= sin Æ \,.\, tang\,\varepsilon \\ sin\, Æ &= \frac{tang\,\delta}{tang\,\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nehmen wir

$$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 22''$$

an, so ist

$$\left.\begin{aligned} log\ sin\,\varepsilon &= 9{,}5999338 \\ log\ cos\,\varepsilon &= 9{,}9625423 \\ log\ tang\,\varepsilon &= 9{,}6373915 \\ log\ cotg\,\varepsilon &= 0{,}3626085 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sonach z. B. für den 1. Sept. 1870

$$\delta = 8^0\ 17'\ 10'',6$$
$$log\ tang\,\delta = 9{,}1632795$$
$$log\ sin\, Æ = 9{,}5258880$$
$$Æ = 19^0\ 36'\ 40'',5$$

wobei aber anstatt dieses Werthes der Werth $180^0 - 19^0\ 36'\ 40'',5$ für *Æ* genommen werden muss, da die ☉ am 1. Sept. ja eine *Æ* $> 90^0$ und $< 180^0$ besitzt. Die betreffende *Æ* wäre demnach

$$\text{AR} = 160^0\, 23'\, 19'',5$$

oder in Zeit $\text{AR} = 10^h\, 41^m\, 33^s,30$

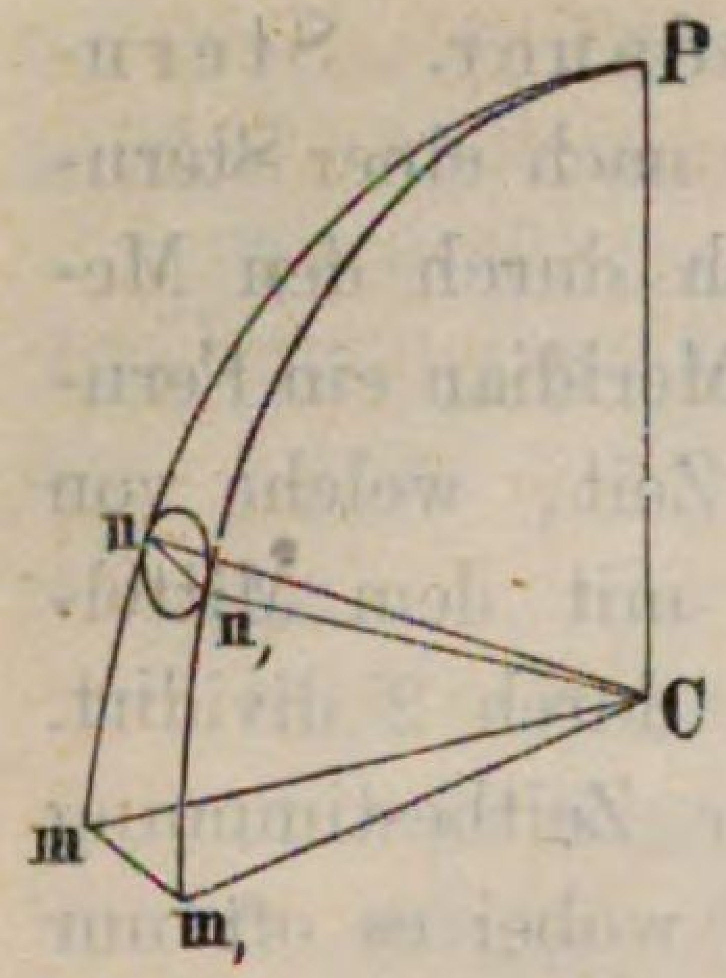
I_8 mit der Ueberschrift „Halbe Durchgangsdauer. Sternzeit" enthält die Zeit, welche der Sonnenhalbmesser nach einer Sternuhr gebrauchen würde, um seiner ganzen Länge nach durch den Meridian zu gehen, d. h. also, wenn wir uns genau im Meridian ein Fernrohr mit seinem Mittelfaden aufgestellt denken: die Zeit, welche von der ersten Berührung des westlichen Sonnenrandes mit dem Mittelfaden bis zur zweiten des östlichen Randes verfliesst, durch 2 dividirt. Diese Columne bietet wesentliche Vortheile bei der Zeitbestimmung mit Hilfe des Sonnendurchgangs durch den Meridian, wobei es oft nur möglich ist die Berührungszeit eines Randes mit dem Mittelfaden durch Beobachtung zu erhalten. Wäre diese z. B. gleich τ, so ist einfach durch Addiren oder Subtrahiren der betreffenden Grösse der Columne I_8 die Zeit des Durchgangs des ⨀ Mittelpunkts zu erhalten. Diese Zeitgrösse befolgt eine Periodicität, deren Gesetz wir aus dem Jahrbuch erkennen können und erreicht:

um den 21. Dec.	ein Maximum	gleich	71'',22	Differenz = 6'',84
„ „ 26. März	„ Minimum	„	64,38	
„ „ 21. Juni	„ Maximum	„	68,90	Differenz = 4,91
„ „ 16. Sept.	„ Minimum	„	63,99	

Dass dieselbe veränderlich ist, liegt der Hauptsache nach in etwas Zweifachem, einmal nämlich in der Veränderlichkeit des scheinbaren Durchmessers der Sonne und dann in der verschiedenen Zeit, die die ⨀ gebraucht um durch den Meridian zu gehen, wenn sie einmal eine Declination gleich Null, das anderemal ein anderes δ besitzt. Um ersteren Einfluss zu erkennen, beachten wir weiter die Col. II_9 mit der Ueberschrift „Halbmesser der ⨀". Er muss eine einfachere Periodicität zeigen, und kann nur einmal ein Maximum erreichen zur Zeit des Perihels und einmal ein Minimum zur Zeit des Aphels, was am 1. Januar und 1. Juli erfolgt und wodurch die Werthe 16' 17'',3 und 15' 45'',1 vom scheinbaren ⨀Halbm. erreicht werden. Dass dieses Maximum und Minimum mit einem Maximum und Minimum der obigen Zahlen nicht zusammenfällt, lehrt ein kurzer Vergleich. Denn wenn auch das Maximum vom 1. Januar nahe am Maximum vom 21. December liegt, so fällt andererseits am 1. Juli und 21. Juni gerade ein Minimum mit einem Maximum nahe zusammen.

Es ist nun leicht die Formel zu finden für die Durchgangsdauer I_8, unter der Voraussetzung, dass wir die beiden genannten Einflüsse: scheinbarer Durchmesser gleich $2R$ und die Declination δ zunächst allein berücksichtigen. Stellt zu dem Ende Fig. 30 *nn*, den Durch-

Figur 30.



messer der Sonne vor, so geht diese durch den Meridian in der Zeit innerhalb welcher der letztere bei der Rotation um CP aus der Lage PCm, wo er den westlichen Sonnenrand berührt, in die Lage $PCm_,$ zur Berührung der östlichen gelangt. Bezeichnen wir demnach den Bogen $mm_,$ mit b, so ist b das Maass des sphärischen Winkels $mPm_,$ oder $mCm_,$ und ist, wenn $nn_, = 2R$ gegeben wird,

$$b = \frac{2R}{\cos\delta}.$$

Demgemäss ist die Durchgangszeit der Sonne gleich

$$\Delta t = \frac{24 \, . \, b}{360} = \frac{24 \, . \, 2R}{360 \, . \cos\delta} \text{ Stunden}$$

wobei R natürlich in Graden ausgedrückt sein muss. Rechnen wir dagegen nach Secunden, so ist

$$\Delta t = \frac{24 \, . \, 60 \, . \, 60 \, . \, 2R}{360 \, . \, 60 \, . \, 60 \, . \cos\delta}$$

oder

$$\Delta t = \frac{2R}{15 \, . \cos\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wobei nunmehr R nach Winkelsecunden einzusetzen ist. Für den 26. Sept. 1870 giebt das Jahrbuch z. B.

$$R = 15' \, 59'',1 = 959'',1$$
$$\delta = -1^0 \, 24' \, 56'',5$$

und ist mithin

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{959,1}{15 \, . \cos(1^0 \, 14' \, 56'',5)} = 63^s,955$$

welcher Werth um $0'',165$ gegenüber dem, in der Columne I_8 des Jahrbuchs gegebenen Werthe zu k l e i n ist. Einen solchen zu kleinen Werth erhalten wir aber nach unserer bisherigen Theorie immer. Denn wir haben ja blos eine Rotation der Erde um ihre Axe zugelassen und vergessen, dass die ☉ auch noch eine scheinbare Progressivbewegung in demselben Sinne wie die Erde um ihre Axe besitzt. Gehen wir also vom Momente der Berührung des westlichen Randes aus, so lauft von diesem Momente an die Sonne in der Richtung $nn_,$ der Rotation voraus, d. h. ihre Rectascension ändert sich in der Zeit, wo m sich vom m nach $m_,$ bewegt, noch um eine geringe Grösse die wir leicht finden können. Die tägliche AR Aenderung der Sonne oder $\Delta \mathit{AR}$ beträgt nämlich nach dem Jahrbuche $3^m \, 36^s = 216^s$ und hätte mithin der Meridian des Beobachters in der von uns schon vorläufig berechneten Zeit Δt offenbar noch die Zeit

$$\left(\frac{216\,.\,\Delta t}{86400}\right)^{s}$$

mehr aufzuwenden, um den vorauseilenden östlichen Rand zu erreichen. Bezeichnen wir also die nach Formel (4) vorläufig berechnete Zeit wie geschehen mit $\frac{\Delta t}{2}$ so ist die Correction, die wir zu $\frac{\Delta t}{2}$ hinzuzuaddiren haben, gleich

$$\text{Corr.}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta \mathit{AR}}{86400}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4_*)$$

welche in unserem Falle in der That gleich $0^s,16$ wird.

Alle Angaben auf der Seite I beziehen sich demnach nur auf die wahre Sonne im Momente des wahren Mittags. Ganz anders aber verhält es sich mit den Angaben der Seite II. Bei ihr gilt der Moment mittlerer Mittag, und fragt es sich weiter: welche Columnen beziehen sich auf die wahre Sonne und welche auf die mittlere? Diese Frage fordert aber dazu auf: folgende vier Stellungen der beiden Sonnen in den beiden verschiedenen Momenten der Seiten I und II aufzufassen, nämlich

1) die Stellung der ⊙ zur Zeit des wahren Mittags
2) „ „ „ ⊙ „ „ „ mittleren „
3) „ „ „ ○ „ „ „ wahren „
4) „ „ „ ○ „ „ „ mittleren „

Die Angaben der Seite I entsprechen also nur dem ersten Falle.

Die Columne II_3 führt die Ueberschrift „Sternzeit“ und könnte dies in Verbindung mit der gemeinschaftlichen Ueberschrift: „Mittlerer Mittag“ sowohl auf den Fall 2) wie auf 4) passen. Das letztere ist nun, wie wir sogleich näher sehen werden, allein anzunehmen und enthält also diese Columne die Sternzeit im Momente wo der Berliner Meridian durch die ○ geht, d. h. in diesem Momente steht der Υ um den in der betreffenden Columne angegebenen Werth falls er in einen Winkelwerth verwandelt wird, westlich vom Meridian von Berlin. Da die Rectascensionen vom Υ an nach Osten gezählt werden, so leuchtet ein, dass diese Sternzeit auch ganz identisch ist mit der Rectascension der ○ im mittleren Mittage. Wir wollen diese Rectascension kurz mit

$$\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc$$

und ebenso im folgenden die Bezeichnungen

$\overset{+}{\mathit{AR}}$⊙ gleich Rectascension der wahren Sonne im mittleren Mittage
$\dot{\mathit{AR}}$⊙ „ „ „ „ „ „ wahren „
$\dot{\mathit{AR}}$○ „ „ „ mittlern „ „ „ „

und dem entsprechend

$\overset{+}{\text{Decl.}}\,\bigcirc$ gleich Declination der mittleren Sonne im mittleren Mittage
$\overset{+}{\text{Decl.}}\,\odot$ „ „ „ wahren „ „ „ „
$\dot{\text{Decl.}}\,\odot$ „ „ „ „ „ „ wahren „
$\dot{\text{Decl.}}\,\bigcirc$ „ „ „ mittleren „ „ „ „
einführen.

Um demnach

$$\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc \text{ in } \dot{\mathit{AR}}\bigcirc$$

zu verwandeln, bedarf es einer Correction des in II_3 angegebenen Werthes, die leicht in folgender Weise gefunden wird. Da die Zeitgleichung, wie sie im Berliner Jahrbuche steht, der Stundenwinkel der mittleren Sonne im Momente des wahren Mittags ist, so ist:

$$\dot{\mathit{AR}}\bigcirc = \dot{\mathit{AR}}\odot - \dot{ZG}$$

mithin z. B. für den 11. Sept. wo $\dot{ZG} = -\ 3^m\ 25^s{,}40$ und

$$\dot{\mathit{AR}}\odot = 11^h\ 17^m\ 38^s{,}03$$

ist:

$$\dot{\mathit{AR}}\bigcirc = 11^h\ 17^m\ 38^s{,}03 + 3^m\ 25^s{,}40 = 11^h\ 21^m\ 3^s{,}43$$

Da nun aber nach II_3

$$\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc = 11^h\ 21^m\ 4^s{,}00$$

ist, so folgt, dass die Rectascension der mittleren Sonne vom Momente des wahren Mittags bis zu dem des mittleren um

$$\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc - \dot{\mathit{AR}}\bigcirc = 0^s{,}56$$

grösser geworden ist. Wollen wir demnach an die $\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc$ wie sie in II_3 sich findet, die betreffende Correction anbringen, um sie zu $\dot{\mathit{AR}}\bigcirc$ zu machen, so wäre diese gleich

$$\text{Corr. } \mathit{AR}\bigcirc = -\,(\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc - \dot{\mathit{AR}}\bigcirc) = -\,[\overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc - (\dot{\mathit{AR}}\odot - \dot{ZG})]$$

oder

$$\text{Corr. } \mathit{AR}\bigcirc = \dot{\mathit{AR}}\odot - \dot{ZG} - \overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wobei $\dot{ZG}$ mit dem im Jahrbuche stehenden Vorzeichen einzusetzen ist. Für den 9. Nov. z. B. wäre

$$\text{Corr. } \mathit{AR}\bigcirc = 14^h\ 57^m\ 35^s{,}65 + 16^m\ 2^s{,}36 - 15^h\ 13^m\ 40^s{,}64$$
$$= -\ 2^s{,}63.$$

Da nach Gleichung (5)

$$\dot{ZG} = (\dot{\mathit{AR}}\odot - \overset{+}{\mathit{AR}}\bigcirc) - \text{Corr. } \mathit{AR}\bigcirc \quad .\ . \quad (5_*)$$

so ergiebt sich, dass die Zeitgleichung I_3 nicht erhalten wird durch bloses Abziehen der Columne I_4 und II_3, sondern dass diese Differenz noch einer Correction bedarf, die unmittelbar aus den im Jahrbuche

stehenden Zahlen nach Gl. (5) erhalten wird, aber auch noch auf eine andere Weise wie folgt, berechnet werden kann. Die mittlere Sonne besitzt vom 9. auf den 10. Nov. eine Rectascensionszunahme von $3^m\ 56^s,55 = 236^s,55$; da nun zwischen dem mittleren und wahren Mittage des 9. Nov. eine Zeit von $16^m\ 2^s,36 = 962^s,36$ liegt und wegen des negativen Vorzeigens von $\dot{Z}G$ der wahre Mittag früher wie der mittlere fällt, so folgt dass die gesuchte

$$\text{Corr. } A\!\!R\bigcirc = -\frac{263,55}{86400} \cdot 962,36 = -2^s,63$$

oder allgemein wenn wir die Rectascensionsänderung der $\bigcirc$ innerhalb eines mittleren Tags mit $\Delta A\!\!R\bigcirc$ bezeichnen, dass

$$\text{Corr. } A\!\!R\bigcirc = \frac{\Delta A\!\!R\bigcirc}{86400} \cdot \dot{Z}G \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Da die Col. II_3 sich auf die mittlere Sonne bezieht, so muss nothwendig die tägliche Differenz $\Delta A\!\!R\bigcirc$ bei dieser Columne eine constante Zahl sein, die sich jahraus jahrein nicht ändert und gleich

$$\Delta A\!\!R\bigcirc = \mathbf{3^m\ 56^s,556 = 236^s,556} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

als dem oben angeführten Unterschiede eines mittleren Sonnen- und eines Sterntags ist. Da diese Differenz häufig in Rechnungen vorkommt, so führen wir ihren

$$\log 236^s,55 = 2,3739230 \text{ oder 5stellig } 2,37392$$

an, ebenso den häufig vorkommenden

$$\log 86400 = 4,9365137$$

und ebenso

$$\log\left(\frac{\Delta A\!\!R\bigcirc}{86400}\right) = 0,4374093 - 3.$$

Dem $\Delta A\!\!R\bigcirc$ gegenüber müssen die täglichen Differenzen Col. I_5, die wir nur genauer mit

$$\Delta \dot{A\!\!R}\odot$$

bezeichnen wollen, im Laufe des Jahrs von einander abweichen, da die wahren Sonnentage neben einander ungleich sind. Sehen wir uns diese Differenzen etwas genauer an, so fällt

ein Minimum	gleich	3^m	$38^s,06$	auf den	26. März
„ Maximum	„	4	9,61	„ „	21. Juni
„ Minimum	„	3	35,31	„ „	15. Sept.
„ Maximum	„	4	26,74	„ „	23. Dec.

nnd sind dies dieselben vier Zeiten, auf welche auch die vier grössten Differenzen der $\dot{Z}G$ fallen. Dass dieses nebeneinander stattfinden muss, versteht sich leicht, wenn man die Gleichung $ZG = A\!\!R - L$, berücksichtigt, worin ja $A\!\!R$ in unserem Falle, wo es sich um den Moment „Wahrer Mittag" handelt, nichts anders bedeutet, als die Zahlen

der Columne I_4 und worin L, wenn wir noch einmal die Figur 24 ansehen, gleich dem Winkel eCD oder, was nach dem vierten Satz auf Seite 76 einerlei ist, gleich dem Winkel qCD durch die Zahlen der Col. II_3 dargestellt wird, vorausgesetzt, dass wir an diese erst unsere Corr. Æ☉ n. Gl. (6) angebracht haben. Diese letztere Correction erreicht am 1. Nov. ihren Maximalwerth gleich $2^s,67$ und können wir sie jetzt geradezu gleich Null setzen, d. h. nunmehr die tägliche Aenderung bei L, auch innerhalb eines wahren Sonnentags als völlig constant $= 236^s,55$ ansehen. Erreicht nun ausserdem die Aenderung von $\dot{Æ}$☉ also $\varDelta\dot{Æ}$☉ ein Maximum oder Minimum, so muss selbstverständlich dies auch bei $\varDelta \dot{Z}G$ eintreten. Stellen wir, um uns hiervon zu überzeugen, das Betreffende nach dem Jahrbuche für die angegebenen vier Tage zusammen, so ergiebt sich

	$\varDelta\dot{Æ}$☉	$\varDelta ZG$
26. März	$3^m\ 38^s,06$	— 18,44
21. Juni	4 9,61	+ 13,02
15. Sept.	3 35,31	— 21,18
23. Dec.	4 26,74	+ 30,10

Die nun folgenden Columnen II_4, II_5, II_6 im Einzelnen mit „Länge ☉", „*Diff.*" und „Breite ☉" überschrieben, tragen die gemeinschaftliche Ueberschrift „Mittleres Aequinoctium 1870,0", was andeutet, dass die Lage des Aequinoctiums wie wir ja auch schon wissen, veränderlich ist und dass mithin die Längen der Sonne, die von diesem Aequinoctium aus gerechnet werden, und bei absolut unveränderlichem ♈ in gegebenem Falle L wären, nun wegen der Veränderlichkeit von ♈ zu $L + \varDelta L$ werden. Um aber ein bestimmtes Aequinoctium als mittleres festzuhalten, von welchem man die soeben angegebenen Längen rechnet, wählt man das vom 1. Januar. Auch die Schiefe der Ekliptik bleibt nicht ganz dieselbe, woraus folgt, dass auch die Breite der Sonne bezogen auf eine mittlere Ekliptik vom 1. Januar nicht genau dieselbe bleibt. Diese Schiefe am 1. Jan. 1870 ist nun gleich

$$23^0\ 27'\ 22'',06$$

und fragt es sich, was unsere Columnen für eine Bedeutung haben? was es also z. B. heisst wenn in Col. II_4 am 17. Januar die Länge der Sonne gleich $297^0\ 12'\ 50'',7$ angegeben wird? Um den Zusammenhang mit einer der Columnen II_3 oder I_4 zu erkennen, wollen wir zunächst die Reduction von der Ekliptik auf den Aequator vornehmen und hierbei die Gleichung (2) S. 66 benutzen. Es ist aber

$$tang\,(297^0\ 12'\ 50'',7) = -\,tang\,(62^0\ 47'\ 9'',3)$$

und ergiebt die weitere logarithmische Rechnung:

$$- \log tang (62^0\ 47'\ 9'',3) = 0,2888333n$$
$$\log cos\ (23^0\ 27'\ 22''06) = 9,9625423$$
$$\log tang\ AR = 0,2513756n$$
$$AR = 360 - 60^0\ 43'\ 35'',8 = 299^0\ 16'\ 24'',2$$

Verwandeln wir diesen Winkel in Zeit, so erhalten wir

$$AR = 19^h\ 57^m\ 5^s,60$$

Dieser so berechnete Werth weicht von $\dot{AR}$☉ in I_4 nur um $0^s,48$ ab und folgt hieraus, da AR○ = $19^h\ 46^m\ 40^s,49$ ist, nothwendig, dass unter Sonne jetzt die ☉ und nicht die ○ zu verstehen ist. Es enthält also ohne Zweifel die Columne II_4 die Länge der **wahren** Sonne im mittleren Mittag, also das, was wir unseren vorausgehenden Abkürzungen gemäss mit

$$\overset{+}{L}☉$$

bezeichnen müssten. Wir haben bei der Reduction auf den Aequator ohne Zweifel zunächst $\overset{+}{AR}$☉ erhalten und ist dies, wie erwähnt, ein klein wenig von $\dot{AR}$☉ verschieden. Wir gehen jedoch hier nicht näher auf diese Unterschiede ein, da wir im nächsten Kapitel erst noch eine weitere Basis auch für andere kleine Correctionen gewinnen müssen.

Die Col. II_7 mit der Ueberschrift „*Lg. R.* v. ☉“ enthält den Logarithmus des Radiusvectors der Erdbahn, wenn die halbe grosse Axe gleich 1 gerechnet wird, also das was wir S. 84 mit ϱ bezeichneten, die daneben stehende Col. II_8 dagegen die Differenzen dieser Logarithmen. Diese Columne II_7 wird benutzt werden können, um den genaueren Eintritt des Perihels und Aphels zu bestimmen. Dasselbe sollte man aber auch bei Berücksichtigung der Col. II_9 mit der Ueberschrift „Halbm. ☉“ also einer Columne, die den scheinbaren Halbmesser angiebt, erreichen. Jedoch zeigt ein einfacher Blick auf letztere Columne, dass diese Zahlen um die betreffenden Tage herum nicht hinreichend verschieden sind, um auf einfache Weise eine genauere Bestimmung des Eintritts der beiden genannten Stellungen machen zu können und benutzt man zu diesem Zwecke besser die Col. II_7. Dieselbe liefert

	log R	Diff.
am 1. Juli	0,0072125	
		+ 0,0000002
„ 2. „	0,0072127	
		− 0,0000023
„ 3. „	0,0072104	

es fällt demnach das Aphel zwischen den 2. und 3. Juli und zwar wie eine einfache Interpolation ergiebt auf

2. Juli $1^h\ 55^m$

§ 24. Wir wenden uns jetzt zur Erläuterung der betreffenden Columnen des Nautical Almanac*), wovon wir ebenfalls Jahrgang 1870 wählen, insbesondere um die Columnen mit denen des Berliner Jahrbuchs genauer vergleichen zu können. Auch hier sind die Seiten I, II und und ein Theil von III für uns zunächst von Wichtigkeit. Vor allem muss erwähnt werden, dass dieses Jahrbuch den Meridian der Sternwarte in Greenwich zu Grunde legt und werden wegen dieser örtlichen Verschiedenheit eine Reihe von Abweichungen gegenüber dem Berliner Jahrbuche zu erwarten sein. Da nun das Bremiker'sche nautische Jahrbuch **) denselben Meridian wie der Nautical Almanac annimmt, so werden wir diese beiden Jahrbücher am besten neben einander berücksichtigen und, um kurz zu sein, die Columnen des Nautical Almanac mit einem N. A., die des Bremiker'schen Jahrbuchs mit N. J. und die des Berliner mit B. J. bezeichnen.

Die Columnen N. A. I_1 und I_2, identisch mit denselben Columnen auf der Seite II, enthalten die Namen der Wochentage und Monatstage, das was in N. J. in einer Columne zusammen steht. Das Berliner Jahrbuch enthält in II_2 die fortlaufende Nummer des Jahrestags. Diese Angabe findet man im N. A. auf den Seiten XX und zwar XX_8 als „Day of the Year“ vorausgesetzt, dass man vorher zu diesen Angaben des N. A. aus einem später angegebenen Grunde 1 addirt. Das N. J. enthält diese Columne nicht.

Col. N. A. I_3 mit der Ueberschrift „Apparent Right Ascention“, entspricht B. J. I_3 ohne in den Zahlenangaben damit identisch zu sein. Da wir nun jetzt die geographische Lage der beiden Orte Berlin und Greenwich in Rechnung ziehen müssen, so ist es zweckmässig vorher einige Constanten kennen zu lernen, und wollen wir bei diesen Angaben als weitere Orte auch Marburg und Cassel berücksichtigen.

Der N. A. von 1870 enthält auf Seite 508 u. f. eine Zusammenstellung der Längen und Breiten der astronomischen Observatorien, welche Zusammenstellung im B. J. auf Seite 290 und 291 im N. J. auf S. 215 steht. Hiernach ist die Differenz:

Greenwich — Marburg in Zeit gleich	-0^h	35^m	$5^s,6$	=	—	$2105^s,6$
„ „ Cassel „ „ „	-0	38	0,5	=	—	2280,4
„ „ Berlin „ „ „	-0	53	35,5	=	—	3215,5

*) London: Printed by G. E. Eyre and W. Spottiswoode, her Majesty's printers; and by John Murray, Abbemarle Street. Price two shillings and sixpence.

**) Berlin: Georg Reimer. Preis 15 Sgr.

oder von Berlin aus gerechnet

Berlin — Cassel	in Zeit gleich	$+ 0^h\ 15^m\ 35^s,0$	$= + 935^s,0$
„ — Marburg	„ „ „	$+ 0\ 18\ 29,9$	$= + 1109,9$
„ — Greenwich	„ „ „	$+ 0\ 53\ 35,5$	$= + 3215,5$

Es folgt daraus nun, um dies hier einfach zu erwähnen, dass z. B. die ☉, wenn sie durch den Meridian von Marburg geht, den von Berlin schon um $0^h\ 18^m\ 29^s,9$ früher passirt hat, und in den von Greenwich erst $35^m\ 5,^s6$ später gelangt.

Ebenso wären die Längen (oder Rectascensionsdifferenzen) von Greenwich aus gerechnet

Greenwich nach Marburg	in Länge	$8^0\ 46'\ 24'',0$	östlich
„ „ Cassel	„ „	$9\ 30\ 7,5$	„
„ „ Berlin	„ „	$13\ 23\ 52,5$	„

ferner von Berlin aus gerechnet

Berlin nach Cassel	in Länge	$3^0\ 53'\ 45'',0$	westlich
„ „ Marburg	„ „	$4\ 37\ 28,5$	„
„ „ Greenwich	„ „	$13\ 23\ 52,5$	„

Dies vorausgeschickt, werden wir nun einen Vergleich der Jahrbücher eintreten lassen können. Im „wahren Berliner Mittag“ giebt das B. J. am 7. August $\dot{AR}$☉ $= 9^h\ 8^m\ 38^s,32$ der N. A. aber auf der Seite I_3 im „At apparent Noon“ also auch im wahren Mittage, $\dot{AR}$☉ $= 9^h\ 8^m\ 46^s,90$ welches vom Berliner Werth um $+ 8^s,58$ abweicht. Der N. A. enthält neben der Col. I_3 in I_4 nicht die täglichen Aenderungen von $\dot{AR}$☉ sondern die „stündlichen“, denen wir im Folgenden die Bezeichnung

$$\Delta' \dot{AR} \odot$$

verleihen wollen. Benutzen wir die Angabe des N. A. $\Delta'\dot{AR}$☉ $= 9^s,558$ und berücksichtigen die Zeitdifferenz Berlin — Greenwich, so ist die zu suchende Correction gleich:

$$\frac{9^s,558 \,.\, 53^m\ 35^s,5}{1^h} = \left(\frac{9,558}{3600}\ 3215,5\right)^s = 8^s,537.$$

Rechneten wir mit dem Berliner Jahrbuch, so wäre die betreffende Correction, da wir hier zunächst nur $\Delta\dot{AR}$☉ haben, gleich

$$\frac{3^m\ 49^s,72 \,.\, 53^m\ 35^s,5}{24^h} = \frac{229,72 \,.\, 3215,5}{86400} = 8^s,549$$

welches von dem zuerst berechneten Werthe um $0^s,012$ abweicht.

Die Col. N. A. I_5 enthält die Declination der ☉ im wahren Mittage und entspricht diese Columne der Col. B. J. I_6, die jedoch mit ersterer nicht genau übereinstimmen kann, weil sich die Declination ändert und von der Culmination der ☉ in Berlin bis zu der in Greenwich Zeit verfliesst. Auch hierbei führt eine einfache Interpolation zum Ziele. Für den 7. August ist im N. A. die Decl. ☉ $= 16^0\ 25'\ 36'',7$ mit

der stündlichen Aenderung von — 41″,99. Mithin ist die betreffende Correction gleich

$$\frac{41'',99 \cdot 3215{,}5}{3600} = 37'',51$$

und wird die Declination für Berlin = 16° 25′ 36″,70 + 37″,51 = 16° 26′ 14″,21.

Col. N. A. I_7 mit der Ueberschrift:

„Sideral Time of the Semidiam. passing the Meridian"

ist der Col. B. J. I_8 entsprechend. Auch diese beiden Columnen können nicht ganz genau übereinstimmen, weil die Durchgangsdauer der ☉ veränderlich ist und wiederum Zeit verfliesst zwischen der Culmination für Berlin und Greenwich.

N. A. I_8 enthält die Zeitgleichung mit der Ueberschrift: z. B. für April:

Equation of
Time
to be
added to
subt. from
Apparent
Time.

oder auf Deutsch: Zeitgleichung die bis zum dicken Strich zur wahren Zeit addirt, nach dem dicken Strich *) aber von der wahren Zeit subtrahirt werden muss, um mittlere Zeit zu erhalten, also einfach ein Verhältniss was im Berliner Jahrbuch mit + und — bezeichnet wurde. Denn: muss man die betreffende Zahl der Zeitgleichung zur *WZ* addiren um mittlere Zeit zu erhalten, so ist erstere kleiner wie letztere, mithin *MZ*—*WZ* positiv. Auch die Columnen für die Zeitgleichung können in den Jahrbüchern für verschiedene Orte nicht übereinstimmen. So ist z. B. für Berlin am 7. Aug. $ZG = +\ 5^m\ 32^s{,}79$, die Differenz vom 7. auf den 8. gleich — $7^s{,}42$ und mithin die Correction gleich

$$-\frac{7{,}42 \cdot 3215{,}5}{86400} = -\,0^s{,}28 \text{ d. h. die } ZG \text{ für Greenwich} = \overset{+}{5^m\ 32^s{,}51}$$

Col. II_3 im Nautical Almanac enthält die AR☉ also die Rectascension der ☉ im mittleren Mittage eine Columne, die das Berliner Jahrbuch nicht hat. Diese Columne weicht ein wenig von der Col. N. A. I_3 ab und ist z. B. die Differenz am 7. August gleich: $0^s{,}88$. Die AR☉ ist nämlich veränderlich, und ändert sich am 7. August nach N. A. I_4 stündlich um $9^s{,}558$ mithin innerhalb der Zeit in der der wahre Mittag

*) Der nämlich an bestimmten Stellen der Columne zu finden ist.

auf den mittleren folgt, d. h. innerhalb einer Zeit = der Zeitgleichung, um

$$\frac{9{,}558 \,.\, 332{,}51}{3600} = 0^s{,}88$$

gleich der obigen Differenz. Diese Columne ist aber völlig identisch mit N. J. I_2, denn diese enthält die „Gerade Aufsteigung der ⊙ für den mittleren Mittag". Ebenso stimmen diese beiden Jahrbücher überein bezüglich der Columne N. A. II_4 und N. J. I_4 welche Columnen die Decl. ⊙ enthalten.

Col. N. A. II_5 und N. J. II_2 enthalten den scheinbaren Halbmesser der ⊙ eine Grösse, die aus einem schon wiederholt angegebenen Grunde ein wenig von B. J. II_9 abweichen muss.

N. A. II_6 liefert auch die Zeitgleichung, aber im Momente des mittleren Mittags, während sie auf Seite I_8 für den Moment des wahren Mittags galt. Unserer Bezeichnung gemäss müssen wir also diese Zeitgleichung mit $\overset{+}{ZG}$ bezeichnen und bedeutet, der Auffassung auf S. 102 entsprechend, jetzt im Momente des mittleren Mittags, wo $MZ = 0$ ist, die $\overset{+}{ZG}$ den Stundenwinkel der wahren Sonne. Auch ist auf Seite II die Ueberschrift der Col. II_6 nicht identisch mit der Col. I_8 indem jetzt z. B. für den April die Ueberschrift heisst:

Equation of
Time
to be
subt. from
____
added to
Mean
Time.

d. h. also: Zeitgleichung die bis zum dicken Strich von der mittleren Zeit subtrahirt nach dem dicken Strich aber zu ihr addirt werden muss um wahre Zeit zu erhalten. Auch sind die numerischen Werthe dieser Col. II_6 und I_8 im N. A. nicht identisch. Denn da wahrer Mittag und mittlerer zwei verschiedene Momente sind und die Zeitgleichung mit der Zeit veränderlich ist, so wird sie auch in den zwei verschiedenen Mittagen nicht genau dieselbe sein. Um dies noch näher einzusehen, beachten wir, wie die Zeitgleichung $\overset{+}{ZG}$ aus $\dot{ZG}$ berechnet werden kann. Am 25. August ist $\dot{ZG} = 1^m\, 56^s{,}65$ mit der stündlichen Aenderung von $-\ 0^s{,}675$ d. h. die Zeitgleichung wächst rückwärts gerechnet. Zu unserer Berechnung haben wir sonach die Correction

$$\frac{0{,}675 \,.\, 1^m\, 56^s{,}65}{3600} = \frac{0{,}675 \,.\, 116{,}65}{3600} = 0^s{,}0219$$

nöthig, welche an die Zeitgleichung II_6 mit + anzubringen ist, da der mittlere Mittag an diesem Tage früher eintritt, wodurch wir erhalten $\overset{+}{ZG} = 1^m\ 56^s{,}65 + 0^s{,}02 = 1^m\ 56^s{,}67$ = der im Jahrbuche.

Col. II_7 des N. A. enthält die Sternzeit der mittleren Sonne im mittleren Mittage.

Es ist dies eine der Columne B. J. II_8 der Natur nach entsprechende aber numerisch wegen des geographischen Längenunterschieds damit nicht ganz übereinstimmende Columne. So ist z. B. die $\overset{+}{Æ}\bigcirc$ am 7. Aug. in Greenwich = $9^h\ 3^m\ 13^s{,}48$ in Berlin aber = $9^h\ 3^m\ 4^s{,}62$. Unsere Correction wäre demnach

$$\frac{236{,}56\ .\ 3215{,}5}{86400} = 8^s{,}80$$

und die zu berechnende Berliner SZ gleich $9^h\ 3^m 13^s{,}48 - 8^s 80 = 9^h\ 3^m 4^s{,}68$. Diese Columne des englischen Jahrbuchs ist völlig identisch mit N. J. II_8.

§. 25. Hiernach schreiten wir zur Lösung von Aufgaben, wobei die Handhabung astronomischer Jahrbücher nothwendig ist, und wobei die Betrachtung der vorigen Paragraphen uns zu statten kommen wird.

Dieser Aufgaben sind es aber zunächst sechs nämlich:

1. Aufgabe: Umwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit
2. „ „ „ „ „ wahre „
3. „ „ „ mittleren Zeit in Sternzeit
4. „ „ „ „ „ „ wahre Zeit
5. „ „ „ wahren „ „ Sternzeit
6. „ „ „ „ „ „ mittl. Zeit.

Zunächst sei bemerkt, dass diese sechs Aufgaben, wenn gewisse Grössen auch in umgekehrter Reihenfolge direkt gegeben sind oder sich berechnen lassen, auf blos zwei reducirt werden können, z. B. auf die Verwandlung von SZ in MZ und SZ in WZ. Der umgekehrte Gang, der sich aus der Lösung der Aufgabe erkennen lässt wird nämlich MZ in SZ und WZ in SZ verwandeln lehren und ebenso wird, wenn z. B. MZ in WZ verwandelt werden soll, dies auf einem Umwege gelingen, nämlich so, dass man zuerst MZ in SZ und diese dann nach der zweiten Lösung in WZ verwandelt. Wir wollen jedoch die sechs Aufgaben alle direkt lösen und dies zugleich auch als eine nützliche Anwendung vorausgegangener Lehren ansehen.

Ausserdem mögen folgende Bemerkungen hier vorausgeschickt werden. Bei den in Betracht kommenden Aufgaben werden wir dreierlei Abkürzungen gebrauchen, nämlich erstens die Zeichen

$$T_s;\ T_m;\ T_w,$$

und bedeuten diese eine Anzahl Stunden, Minuten und Secunden der

Sternzeit, Mittleren- Sonnen- und Wahren- Sonnenzeit, also das, was man „Zeitintervalle" zu nennen pflegt; zweitens die Zeichen

$$SZ;\ MZ;\ WZ,$$

und bedeuten diese die auf den Zifferblättern der drei Arten von Uhren angegebenen „Uhrzeiten" ohne Datumangabe. Die betreffenden Uhren sollen also nicht den Datum angeben oder soll wenigstens auf Einrichtungen, die dies etwa ermöglichten, keine Rücksicht genommen werden. Da hiernach in der Praxis die Sache so liegt, dass man nur die Zeiten SZ, MZ oder WZ direkt geliefert bekommt, so wird bezüglich des Datums eine besondere Angabe gemacht werden müssen.

Soll aber eine Zeitgrösse auch mit Rücksicht auf den Datum gegeben oder gesucht werden, so gebrauchen wir drittens die Bezeichnungen:

$$\overline{SZ};\ \overline{MZ};\ \overline{WZ}.$$

Alle Zeitauffassungen, die nicht durch eine dieser neun Zeichen bestimmt sind, werden durch Worte im Besonderen zu charakterisiren sein.

Erste Aufgabe. Es sei gegeben SZ, d. h. eine Sternuhr zeige am p. Tage des Jahrs und zwar am p. Datum der mittleren Zeit SZ an, und soll gefunden werden was eine Mittlere-Zeituhr anzeigen müsste, wenn sie denselben Moment der absoluten Zeit angeben wollte. Die Aufgabe wie sie hier gestellt wird, ist wesentlich anders als wenn ohne Rücksicht aufs Datum blos verlangt würde: T_s Sternstunden etc. in die entsprechende Anzahl T_m mittlere Zeitstunden, Minuten und Secunden zu verwandeln, wozu wir ja einfach unsere Taf. II. (A) benutzen. Geht die Sternuhr richtig, — und richtige Uhren setzen wir natürlich für jetzt nur allein voraus — so zeigt sie die Culmination des ♈ um $0^h\ 0^m\ 0^s$ an. Die Angabe SZ sagt demnach, dass diese Culmination schon um SZ vorüber ist. Die Mittlere-Zeituhr zeigt im Momente der Culmination der ○ $0^h\ 0^m\ 0^s$ und rechnen wir bürgerlich d. h. nach mittleren Kalendertagen, so nehmen wir bei unserer Aufgabe an, dass innerhalb der Zeit des mittleren Tags vom Anfang des p. Tags um Mitternacht bis zum Ende des p. Tags in der folgenden Mitternacht die Sternuhr SZ zeige, was stets möglich ist, weil der Sterntag kürzer wie der mittlere Tag und somit auf letzteren alle denkbaren Anzeigen einer Sternuhr fallen können. Um die Aufgabe zu lösen, nehmen wir eins von unseren Jahrbüchern zur Hand, und suchen in ihm die Columne für die $\overset{+}{Æ}$○, die ja in allen dreien von uns betrachteten Jahrbüchern steht, z. B. in B. J. II_3; N. A. II_7; N. J. II_3. Diese Rectascension entspricht dem Momente $0^h\ 0^m\ 0^s$ Mittags auf dem Zifferblatte der mittleren Zeituhr und sagt zugleich, dass in

diesem Momente seit der Culmination des ♈ auch $\overset{+}{AR}\bigcirc$ Sternzeit verstrichen ist.

Ziehen wir daher $\overset{+}{AR}\bigcirc$ von SZ ab, so ergiebt sich die Zeit T_s, die zwischen dem mittleren Mittage und dem gegebenen Momente SZ liegt und zwar in Sternzeit ausgedrückt; verwandeln wir dann mit unserer Taf. II. (A) dieses Zeitintervall T_s in ein mittleres T_m und legen T_m mit dem gehörigen Vorzeigen zu $0^h\ 0^m\ 0^s$ hinzu, so ist dies die gesuchte MZ.

1. Beispiel. Gegeben Greenwich 1870 am 7. März, bürgerlich gerechnet, $SZ = 4^h\ 5^m\ 23^s{,}4$ an; wie gross ist MZ und $\overline{MZ}$?

Auflösung. Nach dem N. A. ist

$$\text{7. März 1870 } \overset{+}{AR}\bigcirc = 23^h\ 0^m\ 0^s.52$$
$$\text{gegebene } SZ \quad = \quad 4 \quad 5 \quad 23.40$$
$$\text{mithin } SZ - \overset{+}{AR}\bigcirc = -\ 18^h\ 54^m\ 37^s{,}12 = T_s,$$

welches in T_m verwandelt für

18^h die Correktion	$2^m\ 56^s{,}931$	in Summa $3^m\ 5^s{,}878$
54^m „ „	$8{,}846$	
37^s „ „	$0{,}101$	
$0^s.12$ „ „	$0{,}000$	

verlangt, so dass $T_m = -\ 18^h\ 51^m\ 31^s{,}24$

d. h. es wäre von 24^h an rückwärts bis zum gegebenen Momente SZ verflossen $18^h\ 51^m\ 31^s{,}24$ mittlere Zeit und die gesuchte MZ wäre

$$MZ = 24^h\ 0^m\ 0^s - 18^h\ 51^m\ 31^s{,}24 = 6^h\ 51^m\ 31^s{,}24$$

und bürgerlich gerechnet

$$\overline{MZ} \quad \text{7. März } 12^h\ 0^m\ 0^s - 18^h\ 51^m\ 31^s{,}24 = \text{7. März } - 6^h\ 51^m\ 31{,}24$$

oder

$$\overline{MZ} = \text{6. März } 17^h\ 8^m\ 28^s{,}76 \text{ d. h. 6. März Nachmittags } 5^h\ 8^m\ 28^s{,}76$$

welches Resultat der gestellten Aufgabe nicht entspricht, denn wir kommen auf den 6. März, während die Aufgabe die Anzeige SZ als auf den Kalendertag des 7. März fallend voraussetzt. Die Lösung muss demnach anders werden und bleibt nur ein Weg übrig, nämlich der, dass wir von der Zeit $\overset{+}{AR}\bigcirc$ nicht rückwärts sondern vorwärts rechnen, wobei wir nothwendig, da hierbei ein negatives Zeitintervall T_s keinen Sinn hat wegen $SZ < \overset{+}{AR}\bigcirc$ zu SZ erst 24^h hinzuaddiren müssen, um

$$T_s = SZ + 24^h - \overset{+}{AR}\bigcirc = +\ 5^h\ 5^m\ 22^s{,}88$$

zu erhalten, welches in T_m verwandelt $50^s{,}029$ weniger giebt, wonach nunmehr

$$MZ = \mathbf{5^h\ 4^m\ 32^s 85}$$

und

$$\overline{MZ} = \textbf{7. März Nachmittags } \mathbf{5^h\ 4^m\ 32^s{,}85}$$

wird. Man wird bei Aufgaben die so gestellt sind, den Sinn' derselben

gehörig beachten müssen, was bei dieser Aufgabe leicht war; denn wenn man beim Abziehen des $\overset{+}{AR}\odot$ von SZ auf die obige Zahl — 18^h etc. kam, so war es von vornherein klar, dass diese Zeit in mittlere verwandelt unzweideutig in den 6. März führte, und dass, da auf den 7. März der gegebene Moment SZ fallen sollte, blos die letzte Lösung die richtige war. Dieser richtige Zusammenhang lässt sich aber oft nicht von vornherein übersehen und beachte man desshalb das

2. Beispiel. Gegeben $SZ = 10^h\ 58^m\ 14^s{,}5$ und zwar am 7. März der mittleren Zeit; gesucht $\overline{MZ}$.

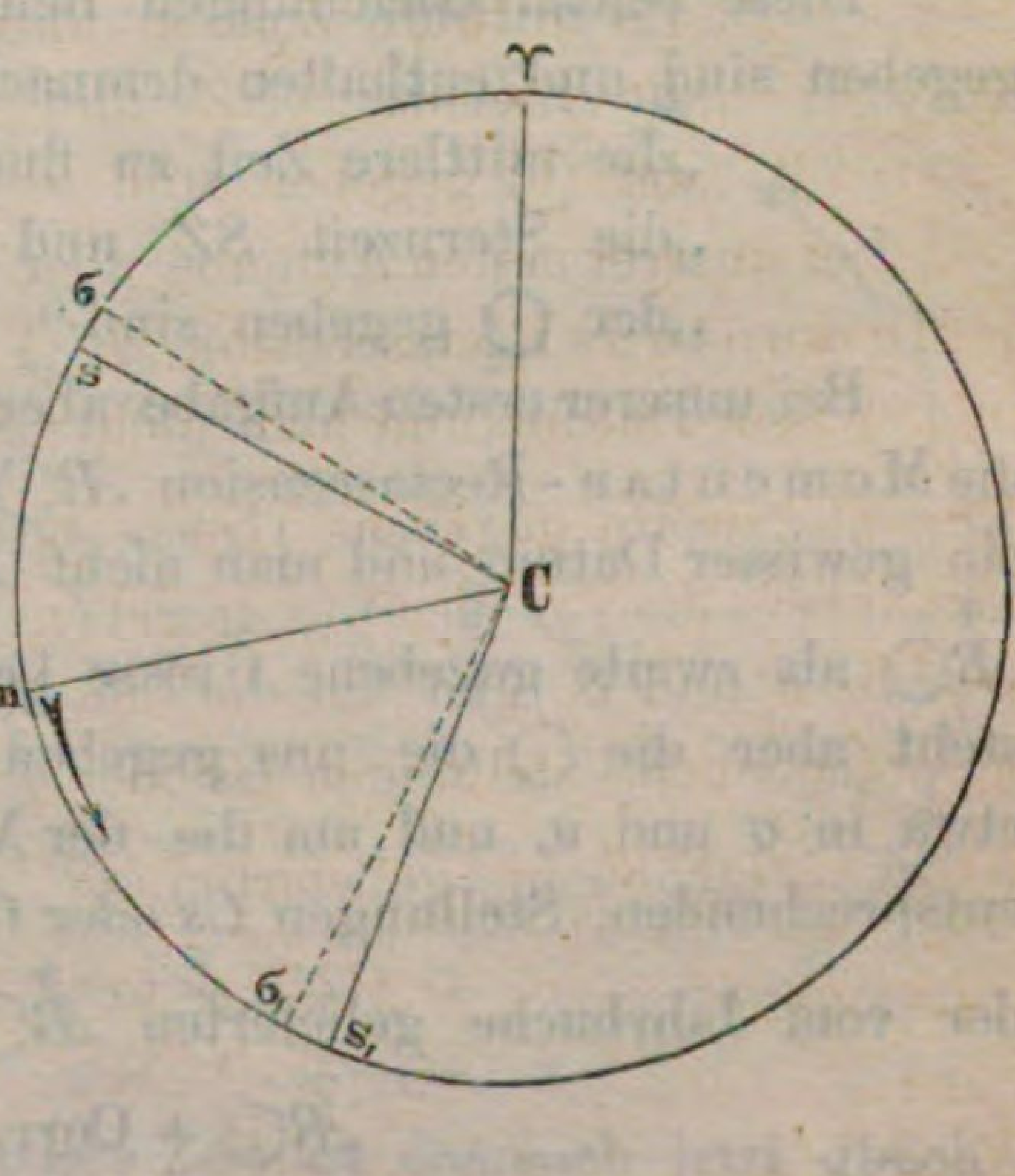
Zieht man das $\overset{+}{AR}\odot$ der vor. S. von SZ ab, so erhält man eine Zahl grösser als 12^h und man könnte glauben, dass in dieser Weise nun fortgerechnet nicht das Richtige erhalten würde: weil man in den 6. März hineinkommt. Es liefert aber die Reduction von $T_s = 12^h\ 1^m\ 46^s{,}02$ in mittlere Zeit: $T_m = 11^h\ 59^m\ 47^s{,}78$
und ist mithin die gesuchte $\overline{MZ} =$ 7. März $12^h\ 0^m\ 0^s - 11^h\ 59^m\ 47^s{,}78$
oder

$$\overline{MZ} = \text{7. März } 0^h\ 0^m\ 12^s{,}22$$

also kurz nach Mitternacht vom 6. auf den 7. März.

Hätten wir jedoch ohne die Reduction von T_s auf T_m vorzunehmen, sogleich geschlossen, es müsse vom $\overset{+}{AR}\odot$ vorwärts gerechnet werden, so erhielten wir beim Abziehen des $\overset{+}{AR}\odot$ von $(24^h + SZ)$ ein $+ 11^h\ 58^m\ 13^s{,}98$ welches in mittlere Zeit verwandelt $T_m = 11^h\ 56^m\ 16^s{,}315$ giebt, wonach wir ebenfalls auf den 7. März aber kurz vor Anfang des 8. um Mitternacht kommen. Unsere Aufgabe lässt somit zwei Lösungen zu und ist ihre Lösung, wenn nicht noch eine nähere Bestimmung gemacht wird, überhaupt nicht möglich. Wir sehen vorläufig von dieser Bestimmung ab und betrachten die Lösung unserer Aufgabe auch an der Hand einer Figur. In dieser Figur 31 stellt $C\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte Cs die Richtung nach der $\odot$ und Cm die Lage des Meridians eines Beobachters in demselben Momente vor, wo eben die mittlere Sonne in s stehend angenommen wird. Es ist demnach

Figur 31.



$$\sphericalangle\ \Upsilon Cs = AR\odot$$
$$\Upsilon Cm = \text{gegebener } SZ$$
$$sCm = \text{Stundenwinkel der Sonne} = \text{gesuchter } MZ,$$

und besteht die Gleichung:

$$MZ + AR\odot = SZ$$

oder

$$MZ = SZ - AR\odot \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Denken wir uns dagegen die $\odot$ in $s_,$, so ist nunmehr nicht der spitze Winkel $mCs_,$ gleich MZ, sondern der diesen Winkel zu 360^0 oder zu 24^h ergänzende überstumpfe Winkel $s_,Cm$, wenn wir eben annehmen, dass der Meridian Cm im Sinne des beigesetzten Pfeils täglich rotire. Demgemäss gilt für diesen Fall, in welchem

$$AR\odot > SZ$$

ist die Gleichung

$$AR\odot - (24^h - MZ) = SZ$$

oder

$$MZ = SZ + 24^h - AR\odot \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hier wird man folgende Bemerkung bezüglich des Datums machen können. Denken wir den Meridian in der Lage Cm die Sonne in der Richtung Cs, so ist klar, dass der Datum der mittleren Zeit und der Sternzeit derselbe ist, und in Gl. (7) von einer Zulage von 24^h keine Rede zu sein braucht. Denken wir aber Cm gegenüber $Cs_,$, so ist der nächste mittlere Mittag noch nicht erreicht, während man über den Υ schon hinaus ist. Rechnet man also in letzterem Falle den p. Datum der Sonnenzeit, so ist der (p + 1). für Sternzeit anzunehmen; oder es ist Gl. (8) zu SZ ein 24^h hinzuzulegen und wird es gut sein, wenn man diesen Zusammenhang hier genau beachtet.

Diese beiden Gleichungen liefern also MZ wenn SZ und $AR\odot$ gegeben sind und enthalten demnach die Lösung der Aufgabe:

„die mittlere Zeit zu finden unter der Voraussetzung, dass
„die Sternzeit SZ und die momentane Rectascension
„der $\odot$ gegeben sind.“

Bei unserer ersten Aufgabe aber lag die Sache anders, in dem nicht die Momentan-Rectascension $AR\odot$ gegeben war, sondern blos SZ und ein gewisser Datum und man nicht $AR\odot$ sondern nach einem Jahrbuche $\overset{+}{AR}\odot$ als zweite gegebene Grösse besass. Unter dieser Voraussetzung steht aber die $\odot$ die uns gegeben wird nicht in s und $s_,$, sondern etwa in σ und $\sigma_,$ und um die der Momentanstellung Cm des Meridians entsprechenden, Stellungen Cs oder $Cs_,$ zu erhalten, müssen wir anstatt der vom Jahrbuche gelieferten $\overset{+}{AR}\odot$ eine

$$\overset{+}{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot$$

setzen. Unsere Gleichungen (7) und (8) verwandeln sich demnach in

$$MZ = (SZ - \overset{+}{\text{Æ}}\odot) - \text{Corr. Æ}\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

$$MZ = (SZ + 24 - \overset{+}{\text{Æ}}\odot) - \text{Corr. Æ}\odot ; \quad . \; . \; . \; . \; (10)$$

und begreift man jetzt leicht, dass das Anbringen der Corr. $\text{Æ}\odot$ ganz identisch ist mit der bei den beiden Beispielen von uns an der Hand der Tafel II. (A) vorgenommenen Umwandlung von

$$(SZ - \overset{+}{\text{Æ}}\odot)$$

und

$$(SZ + 24 - \overset{+}{\text{Æ}}\odot)$$

als T_s in T_m. Denn auf einen mittleren Sonnentag $= (24^h + 3^m\,56{,}555)$ Sternzeit kommt eine $\Delta \text{Æ}\odot = 3^m\,56^s{,}555$ mithin auf $T_s = (SZ - \overset{+}{\text{Æ}}\odot)$ eine Rectascensionsänderung gleich

$$\text{Corr. Æ}\odot = 3^m\,56^s{,}555 \, . \, \frac{SZ - \overset{+}{\text{Æ}}\odot}{24^h + 3^m\,56^s{,}555} = 0{,}002730430 \, . \, (SZ - \overset{+}{\text{Æ}}\odot)$$

wo der Zahlencoefficient derselbe ist, wie bei der ersten der Gl. (32) des zweiten Kapitels, so dass wir anstatt Corr. $\text{Æ}\odot$ auch blos Corr. schreiben können, für welche „Corr." wenn sie nach Taf. II. (A) gefunden werden soll: als Argument die, in eine Klammer gefasste und vor der Corr. stehende Sternzeitgrösse z. B. gemäss Gl. (9) die Sternzeitgrösse $(SZ - \text{Æ}\odot)$ anzunehmen ist.

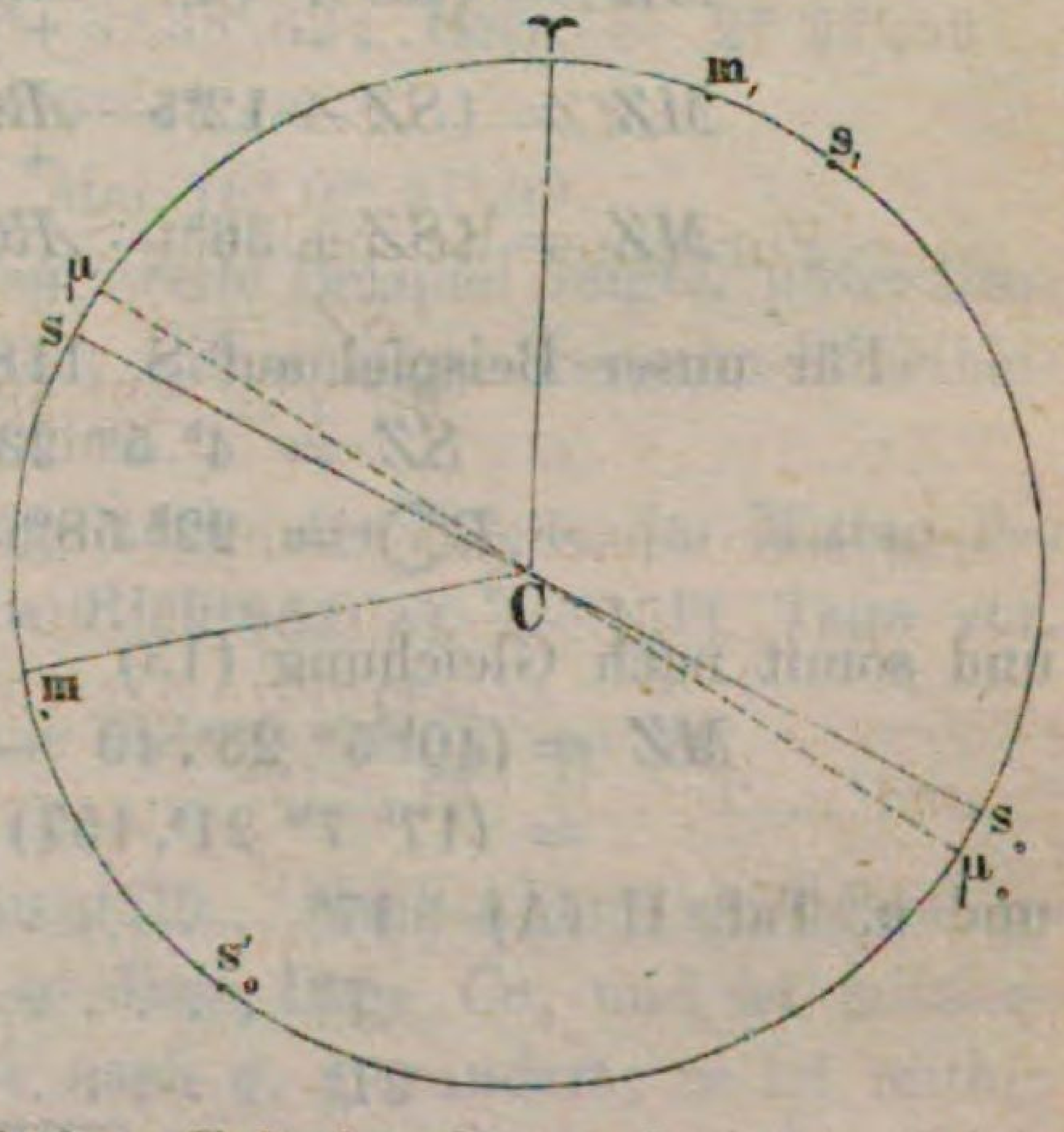
Diese Umwandlung bedeutet geometrisch also nichts anderes als die Ueberführung der Winkel

σCm (spitz) und σ, Cm (überstumpf)

in die Winkel sCm „ „ s, Cm „

Die Gleichungen (7) bis (10) setzen aber voraus, dass wir den Tag astronomisch rechnen und vom Mittage an zählen. Rechnen wir aber von der vorausgegangenen Mitternacht an, dann werden die Verhältnisse andere. Stellt nämlich Fig. 32 μ die Mitternachtsstellung der Sonne vor, so wird der Beobachter m wirklich Mitternacht gehabt haben, als er mit dem Punkte μ_0 zusammenfiel. Nimmt er, von μ_0 an gerechnet, nun eine beliebige Stellung m ein, so ist die Sonne mittlerweile von μ nach s fortgerückt und ebenso der Punkt μ_0 um das gleiche Stück von μ_0 bis s_0. Die mittlere Zeit ist demnach jetzt gleich

Figur 32.



dem überstumpfen Winkel $s_0 Cm$, demgemäss

$$MZ = SZ + \sphericalangle \Upsilon C s_0$$

oder

$$MZ = SZ + 12^h - AR\bigcirc$$

wird. Es ist aber zweitens der Fall denkbar, dass $SZ + 12^h - AR\bigcirc > 24^h$ ausfällt, also beispielshalber, wenn $SZ = 23^h\,0^m\,0^s$ und $AR\bigcirc = 4^h\,3^m\,0^s{,}0$ wäre. Entwirft man sich hierzu eine Zeichnung, so liegt s etwa eben so wie in der Figur 32; der Punkt m aber um 15^0 vor dem Υ in $m_,$. Für diesen Fall ist daher

$$MZ = SZ - \sphericalangle \Upsilon C s_0 \text{ (überstumpf)}$$

oder

$$MZ = SZ - (12 + AR\bigcirc) = SZ - 12^h - AR\bigcirc$$

Es ist drittens der Fall denkbar, dass $(SZ + 12) < AR\bigcirc$ ist, z. B. wenn $SZ = 7^h\,0^m\,0^s{,}0$ mithin $(SZ + 12) = 19^h$ und $AR\bigcirc = 20^h$ wäre: ein Fall wobei der Punkt s etwa nach $s_,$, und s_0 diametral entgegen nach s_0' gelangte während m seine Lage wie in der Figur 32 nahe beibehielte. In diesem Falle ist:

$$\begin{aligned} MZ &= SZ + \sphericalangle \Upsilon C\, s_0' \text{ (überstumpf)} \\ &= SZ + \sphericalangle \Upsilon C s_, \text{ (spitz)} + 12^h \end{aligned}$$

oder

$$MZ = SZ + 24^h - AR\bigcirc + 12^h = SZ + 36^h - AR\bigcirc$$

Führen wir anstatt der momentanen Rectascensionen $AR\bigcirc$ einmal die Rectascensionen der Mitternacht ein, die um $\frac{3^m\,56{,}555}{2} = 1^m\,58^s{,}278$ kleiner sind wie die $\underset{+}{AR}\bigcirc$ und bezeichnen diese Mitternachtsrectascensionen mit $\underset{+}{AR}\bigcirc$, so sind unsere drei Gleichungen jetzt für den Fall der bürgerlichen Rechnung

$$MZ = (SZ + 12 - \underset{+}{AR}\bigcirc) - \text{Corr.} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$MZ = (SZ - 12^h - \underset{+}{AR}\bigcirc) - \text{Corr.} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$MZ = (SZ + 36^h - \underset{+}{AR}\bigcirc) - \text{Corr.} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Für unser Beispiel auf S. 118 ist:

$$SZ = 4^h\,5^m\,23^s{,}40$$

$$\underset{+}{AR}\bigcirc = 22^h\,58^m\,2{,}24$$

und somit nach Gleichung (13)

$$\begin{aligned} MZ &= (40^h\,5^m\,23^s{,}40 - 22^h\,58^m\,2^s{,}24) - \text{Corr.} \\ &= (17^h\,7^m\,21^s{,}157) - \text{Corr.} \end{aligned}$$

und n. Taf. II (A)	17^h	$2^m\,47^s{,}101$
	7^m	1,147
	21^s	0,057
		Corr. = $2^m\,48^s{,}305$

und somit

$$\overline{MZ} = 7.\ \text{März}\ 17^h\ 4^m\ 32^s{,}85$$

oder

$$\overline{MZ} = 7.\ \text{März Nachmittags}\ 5^h\ 4^m\ 32^s{,}85$$

ebenso wie auf S. 118.

3. Beispiel. Gegeben für Greenwich 28. Mai (bürgerlich) $SZ = 22^h 23^m 0^s$; gesucht $\overline{MZ}$.

Da am 28. Mai n. N. A

$$\overset{+}{Æ}\odot = 4^h\ 21^m\ 19^s{,}66 \text{ mithin } SZ + 12 - \overset{+}{Æ}\odot$$

grösser als 24^h ausfällt, so müssen wir uns der Gl. (12) bedienen, demgemäss die Rechnung nun folgende wird:

$$SZ - 12 = 10^h\ 23^m\ 0^s$$
$$\overset{+}{Æ}\odot = 4\ \ 21\ \ 19{,}66$$
$$T_s = 6^h\ \ 1^m\ \ 40^s{,}34$$
$$\text{Corr.} = 59^s{,}25$$

wonach

$$T_m = 6^h\ 0^m\ 41^s{,}09$$

und demgemäss

$$\overline{MZ} = 28.\ \text{Mai}\ 6^h\ 0^m\ 41^s{,}09$$

wird. Da diese Zeit zwischen dem Anfang des 28. Mai's Nachts und dem folgenden Mittage liegt, so werden wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir bei der astronomischen Zählung der mittleren Tage unsere gegebene SZ als für den 27. Mai gegeben ansehen und uns der Gleichung (9) zur Berechnung bedienen. Demgemäss ist

$$SZ = 22^h\ 23^m\ 0^s$$
$$27.\ \text{Mai}\quad \overset{+}{Æ}\odot = 4\ \ 19\ \ 21{,}38$$
$$T_s = 18^h\ \ 3^m\ 38^s{,}62;\quad \text{Corr.} = 2^m\ 57^s{,}53$$
$$T_m = 18^h\ 0^m\ 41^s{,}09$$
$$\overline{MZ} = 27.\ \text{Mai}\ 18^h\ 0^m\ 41^s{,}09.$$

Die Aufgabe lässt aber wie das zweite Beispiel zeigte, unter Umständen zwei Lösungen zu und wollen wir uns zur weiteren Beurtheilung dieses Falles die Figur 33 ansehen.

In ihr stellt $C\sigma_0$ die Richtung nach der Sonne im Mittag des p. Tages (astronomisch) $C\sigma$, dieselbe Richtung am $(p+1)$. Tage vor. Geben wir nun z. B. für den p. eine $SZ = \overset{+}{Æ}\odot$, so ist

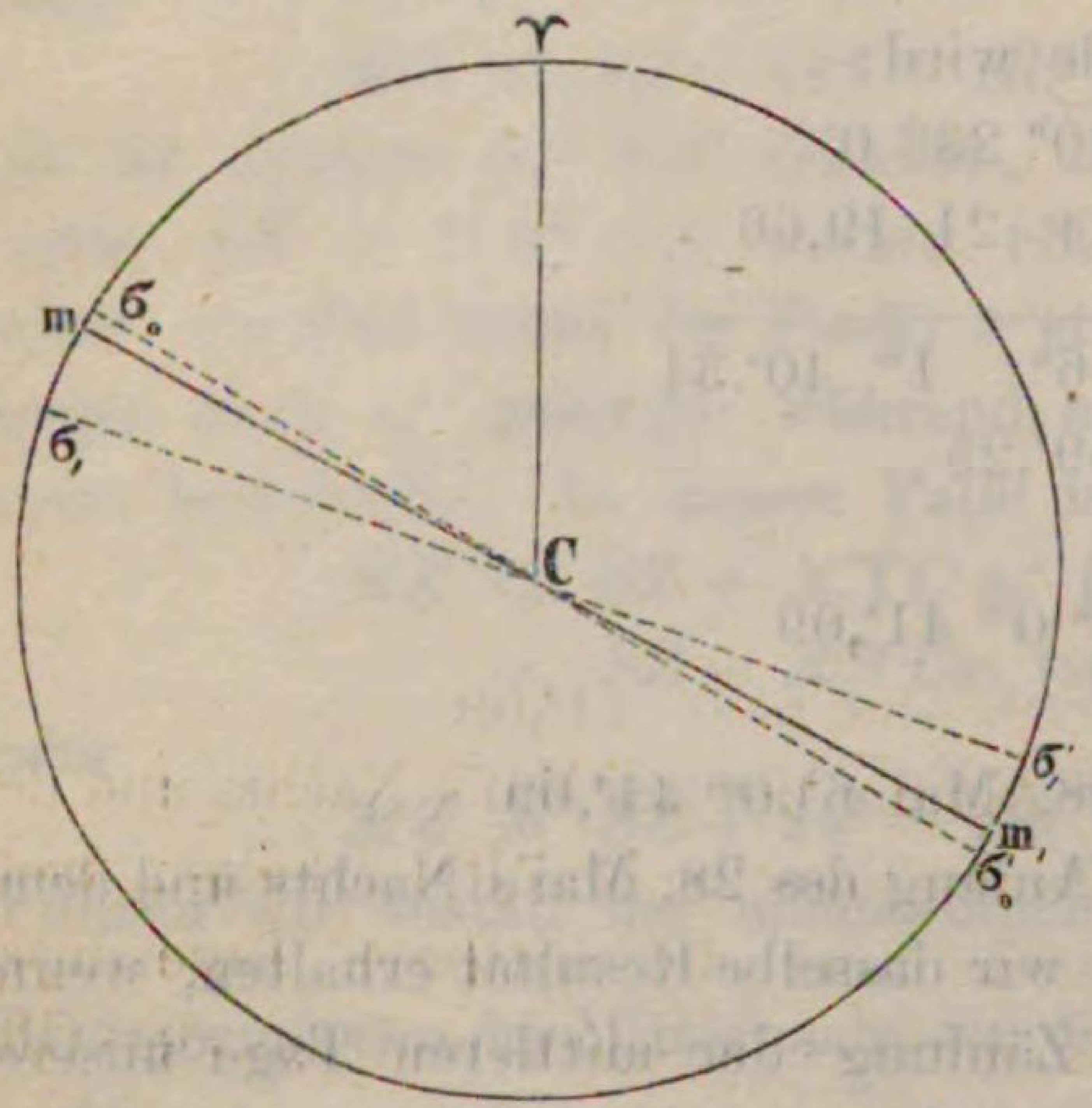
$$\overline{MZ} = p + 0$$

indem der Meridian mit $C\sigma_0$ zusammenfällt. Nach Ablauf eines Sterntags kommt der Meridian wieder in diese Lage $C\sigma_0$ und ist mittlerweile die Sonne von σ_0 sehr nahe nach σ, gewandert; es ist mithin der Meridian hinter der $\odot$ zurück und würde erst der Anfang des $(p+1)^{\text{ten}}$

Datums mittlerer Zeit erreicht sein, wenn der Meridian noch den Winkel $\sigma_0 C\sigma_,$ mehr zurücklegte. Kurz die Lage $C\sigma_0$ des Meridians gehört noch dem p. Datum mittlerer Zeit an und ist demnach die mittlere Zeit jetzt, da die Gleichung (10) zur Anwendung kommen muss, gleich

$$MZ = (\overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot + 24^h - \overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot) - \text{Corr.}$$
$$= 24^h - 3^m\ 55^s{,}908 = 23^h\ 56^m\ 4^s{,}092$$
$$\overline{MZ} = p + 23^h\ 56^m\ 4{,}092$$

Figur 33.



Dessgleichen wird eine doppelte Lösung allemal eintreten können, wenn am p. Datum der Meridian Cm zwischen $C\sigma_0$ und $C\sigma_,$ fällt. Denn bezeichnen wir den kleinen Winkel $\sigma_0 Cm$ mit Δ, so gilt für

$$SZ = \overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot + \Delta$$

einmal die Gleichung (9) wobei

$$MZ = (\overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot + \Delta - \overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot) - \text{Corr.}$$
$$MZ = (\Delta) - \text{Corr.}$$

und nach Ablauf von 24 Sternstunden für denselben p. Datum, wo der Meridian wieder nach Cm gelangt die Gleichung (10)

$$MZ = (\overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot + \Delta + 24^h - \overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot) - \text{Corr.}$$
$$= (\Delta + 24^h) - \text{Corr.}$$

Ebenso wird aber auch eine doppelte Lösung stattfinden, wenn man den Tag von Mitternacht an rechnet, und die Gleichungen (11) (12) und (13) zur Anwendung kommen müssen. Der Meridian wird dann wenn wir jetzt in Figur 33 σ_0 und $\sigma_,$ als Mitternachtstellungen der Sonne Nachts beim Anfang des p. und $(p + 1)$ ansehen z. B. die Lage $Cm_,$ annehmen können, deren rückwärtsgehende Verlängerung Cm zwischen σ_0 und $\sigma_,$ fällt, und wobei, wenn wir uns $\sigma_0 C$ und $\sigma_, C$ nach σ_0' und $\sigma_,'$ verlängert denken, offenbar die eine Mitternacht stattfindet, wenn $Cm_,$ mit $C\sigma_0'$ und die nächste wenn $Cm_,$ mit $C\sigma_,'$ zusammenkommt. Diese doppelte Lösung kann allemal statt haben, wenn die gegebene SZ wie bei der eben betrachteten Zählung der Tage von Mittag an, zwischen $\overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot$ am p^{ten} und $\overset{+}{\mathit{Æ}R}\odot$ am $(p + 1)^{ten}$ fällt oder wenn bei der zweiten Zählung $SZ \pm 12^h$ zwischen $\underset{+}{\mathit{Æ}R}\odot$ am p^{ten} und $\underset{+}{\mathit{Æ}R}\odot$ am $(p + 1)$, fällt.

In unserem obigen 2. Beispiele ist am 7. März

$$SZ = 10^h\,58^m\,14^s{,}50;\quad SZ + 12^h = 22^h\,58^m\,14^s{,}50$$

$$7.\ \text{März}\ \overset{+}{Æ}\odot = 22^h\,58^m\,2^s{,}245$$

$$8.\ \text{„}\quad\text{„}\ = 23\quad 1\quad 58{,}725$$

und ist mithin einmal nach Gl. (11)

$$MZ = (22^h\,58^m\,14^s{,}50 - 22^h\,58^m\,2^s{,}245) - \text{Corr.}$$

$$MZ = (12^s{,}255) - 0^s{,}033,$$

mithin $\overline{MZ} = 7.\ \text{März}\ 0^h\,0^m\,12^s{,}222$

ebenso nach Gl. (13).

$$MZ = (46^h\,58^m\,14^s{,}50 - 22^h\,58^m\,2^s{,}245) - \text{Corr.}$$

$$= (24^h\,0^m\,12^s{,}255) - \text{Corr.}$$

mithin

$$\overline{MZ} = 7.\ \text{März}\ 23^h\,56^m\,16^s{,}314$$

4. Beispiel: Gegeben Greenwich 9. Septbr. $SZ = 23^h\,13^m\,0^s{,}0$

mithin $SZ - 12^h = 11^h\,13^m\,0{,}0^s;$

da ferner 9. Sept. $\overset{+}{Æ}\odot = 11^h\,11^m\,21{,}48$

$$10.\ \text{„}\quad\text{„}\ = 11\quad 15\quad 18{,}02$$

ist, so fällt $(SZ - 12^h)$ zwischen die beiden letzteren Werthe und ist einmal nach Gl. (12)

$$MZ = (11^h\,13^m\,0^s{,}00 - 11^h\,11^m\,21^s{,}48) - \text{Corr.}$$

$$= (\ 1^m\,38^s{,}52) - \text{Corr.}$$

$$MZ = 9.\ \text{Sept.}\ 1^m\,38^s{,}25$$

Ferner wenn wir zu $(SZ - 12^h)$ ein 24^h hinzuaddiren, wodurch es zu $SZ + 12$ wird nach Gl. (11)

$$MZ = (35^h\,13^m\,0.00 - 11^h\,11^m\,21^s{,}48) - \text{Corr.}$$

$$= (24^h\,1^m\,38^s{,}52) - \text{Corr.}$$

$$\overline{MZ} = 9.\ \text{Sept.}\ 23^h\,57^m\,42^s{,}33.$$

Die besprochenen Unsicherheiten und Zweifel, welche Lösung die richtige sei, verschwinden in der Praxis, wenn man die Tageszeit kennt, für welche eine Sternuhr die Angabe SZ machte, da man dann natürlich weiss, ob die gesuchte MZ dem Vormittage oder Nachmittage angehört, ob sie kurz nach Anfang des p^{ten} oder kurz vor Ende des p^{ten} aufzufassen ist. Ohne diese praktische Erfahrung, kann aber auch dann jede Unbestimmtheit als nicht vorhanden angesehen werden, wenn nicht blos SZ gegeben ist, sondern $\overline{SZ}$ und man weiss, welche $\overline{MZ}$ dann der $\overline{SZ} = 0$ oder umgekehrt, welche $\overline{SZ}$ der $\overline{MZ} = 0$ entspricht. Zählt man bei der astronomischen Rechnung der Tage die $\overline{MZ}$ wie die $\overline{SZ}$ beide von einem und demselben Anfangsmomente z. B. von da an wo der Meridian, die $\odot$ und der Υ zusammenfiel, so gelten für eine beliebige Stellung des Meridians die Gleichungen

$$\overline{MZ} = p + MZ$$

$$\overline{SZ} = p' + SZ$$

und kann der Datum p' nur entweder $= p$ oder $= p + 1$ angenommen werden. Demgemäss können die Gleichungen (9) und (10) durch die einzige Gleichung

$$p + MZ = p' + SZ - \overset{+}{AR}\bigcirc - \text{Corr.}$$

ersetzt werden und würde, wenn z. B. $\overline{SZ} =$ 7. März $23^h\,2^m\,0^s$ und ebenso $p = 7$ gegeben wäre, die $\overline{MZ}$ da $\overset{+}{AR}\bigcirc = 23^h\,0^m\,0^s{,}52$ ist, sich als 7. März (astronomisch) $(0^h\,1^m\,0^s{,}48)$ — Corr. berechnen; ebenso würde wenn $\overline{SZ} =$ 8. März $23^h\,2^m\,0^s$ und $\overline{MZ} =$ 7. März gegeben wäre, die $\overline{MZ}$ sich als 7. März $(24^h + 1^m\,0^s{,}48)$ — Corr. berechnen.

Zweite Aufgabe. Es sei gegeben wiederum SZ, und man solle diese in WZ verwandeln. Auch hier wird es darauf ankommen, ob man den Tag von der wahren Mitternacht oder dem wahren Mittage an rechnen will. Da jedoch die WZ im bürgerlichen Leben weniger in Betracht kommt, so wird es genügen, nur vom Mittage auszugehen. Unsere Aufgabe führt aber dann zu denselben Gleichungen wie die Gleichungen (7) und (8), wenn wir uns nur anstatt der $AR\bigcirc$ die $AR\odot$ denken, also in Figur 31 den Punkt s als $\odot$ ansehen. Aber auch die Gleichungen (9) und (10) werden hier unmittelbar Anwendung finden können, wenn wir in ihnen anstatt der $\overset{+}{AR}\bigcirc$ die $\dot{AR}\odot$ setzen. Demgemäss wären unsere beiden Gleichungen:

$$WZ = (SZ - \dot{AR}\odot) - \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$WZ = (SZ + 24^h - \dot{AR}\odot) - \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \quad (15)$$

In ihnen ist uns $\dot{AR}\odot$ durch die Jahrbücher gegeben: im N. A. I_3, und B. J. I_8, und könnte, wenn man nur das N. J. hätte, leicht mit Hilfe der Zeitgleichung aus $\overset{+}{AR}\odot$ berechnet werden. Die Berechnung der Corr. $AR\odot$ aber ist jetzt verschieden von der der Corr. $AR\bigcirc$ der Aufgabe 1. Denn Corr. $AR\bigcirc$ ist, wie wir gesehen haben, einfach aus der Taf. II (A) zu entnehmen, während dies jetzt nicht angeht. Man muss demnach diese Corr. $AR\odot$ in jedem einzelnen Falle erst berechnen, da die tägliche Aenderung $\Delta\dot{AR}\odot$ variabel ist. Die Art und Weise, wie diese Berechnung geschehen kann, ist Folgende. Nehmen wir an, es wäre Fig. 31 σ der Ort der $\odot$ im wahren Mittage, so wird ein Meridian der von $C\sigma$ aus rotirt, nach Ablauf eines Sterntags wieder nach $C\sigma$ gelangen, während die $\odot$ um eine Winkelgrösse vorausgeeilt ist, welche nicht identisch ist mit der betreffenden täglichen Rectascensionsänderung $\Delta\dot{AR}\odot$, da letztere die Aenderung an dem betreffenden wahren Sonnentag vorstellt. Jedenfalls aber würde der Meridian, wenn er sich um die Winkelgrösse $\Delta\dot{AR}\odot$ als die wirkliche tägliche Rectascensionsdifferenz noch weiter fortbewegte, die $\odot$ erreichen, d. h. aber: auf $24^h + \Delta\dot{AR}\odot$ Sternstunden kommt $\Delta\dot{AR}\odot$ Rectascensionsänderung mithin auf $(SZ - \dot{AR}\odot)$ Sternstunden eine Zeit gleich

$$\text{Corr. } \varDelta \dot{AR}\odot = \varDelta \dot{AR}\odot \frac{SZ - \dot{AR}\odot}{24^h + \varDelta \dot{AR}\odot} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

Da wir mit Hilfe unserer Taf. IV des Anhangs sofort jede Anzahl Stunden, Minuten in Secunden verwandeln können, so ist die Ausrechnung mittelst Logarithmen sehr einfach, nur wird man häufig mit siebenstelligen Logarithmen rechnen müssen.

5. Beispiel. Gegeben Greenwich 5. Dec. 1870 $SZ = 13^h\ 5^m\ 17^s{,}63$. Gesucht WZ. Es ist nach N. A. am

$$5.\text{ Dec. } \dot{AR}\odot = 16^h\ 47^m\ 7^s{,}51$$
$$6.\ \text{,,}\ \ \text{,,} \ = 16\ \ 51\ \ 29{,}35$$
$$\varDelta \dot{AR}\odot = 4^m\ 21{,}^s84 = 261^s{,}84$$
$$24^h + SZ - \dot{AR}\odot = 20^h\ 18^m\ 10^s{,}12 = 73090^s{,}12$$

mithin

$$\text{Corr. } \dot{AR}\odot = 261^s{,}84 \cdot \frac{73090{,}12}{86661{,}84} = 3^m\ 40^s{,}83$$

und demnach

$$\overline{WZ} = 5.\text{ Dec. } 20^h\ 14^m\ 29^s{,}29$$

wobei mit 7stell. Log. gerechnet wurde, während die Rechnung mit 5stelligen eine Corr. $\dot{AR}\odot = 3^m\ 40^s{,}90$ liefert.

Die Berechnung von Corr. $\dot{AR}\odot$ geschah nach dem einfachen Interpolationsverfahren, wobei wir annehmen, es ändere sich $\varDelta \dot{AR}\odot$ innerhalb der betreffenden Zeit vom 5. auf den 6. Dec. proportional der Anzahl der Stunden. In Wirklichkeit aber erhält man

	$\varDelta \dot{AR}\odot$	$\varDelta' \dot{AR}\odot$
(2. Dec. – 3. ,,	$+ 4^m\ 20^s{,}15$	
		$+ 0{,}^s58$
(3. ,, – 4. ,,	4 20, 73	
		0, 56
(4. ,, – 5. ,,	4 21, 29	
		0, 55
(5. ,, – 6. ,,	4 21, 84	
		0, 52
(6. ,, – 7. ,,	4 22, 36	
		0, 47
(7. ,, – 8. ,,	4 22, 84	

woraus man erkennt, dass diese Annahme eigentlich nicht statthaft ist, da im Laufe vom 5. auf den 6. sich ein leises Zunehmen in dieser Aenderung erkennen lässt, so dass ein strengeres Interpolationsverfahren angewandt werden müsste, von dem wir jedoch absehen.

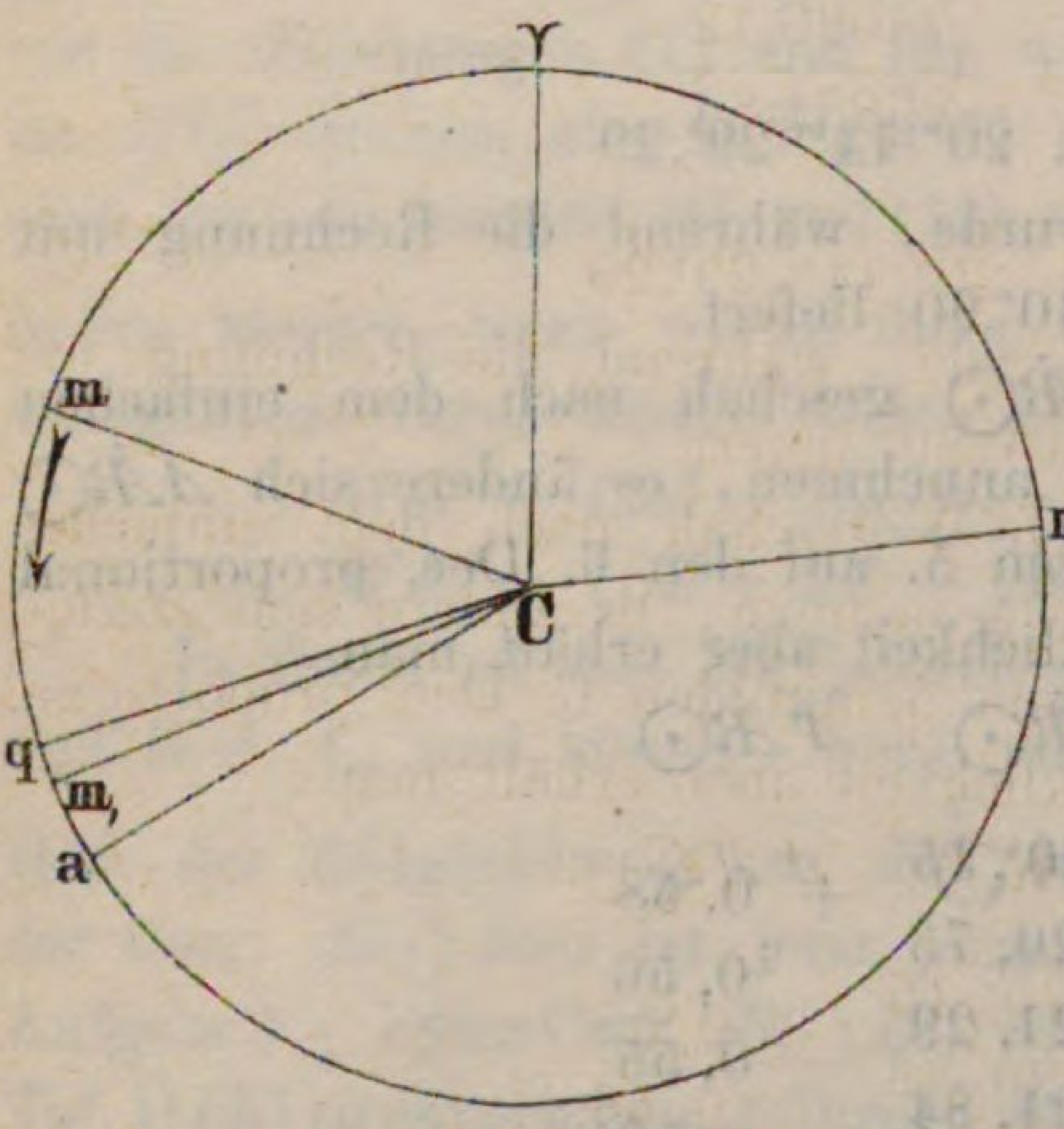
Um bei dieser Gelegenheit noch zu sehen, wann die täglichen Aenderungen von $\varDelta \dot{AR}\odot$ die wir mit $\varDelta' \dot{AR}\odot$ bezeichnet haben, ein positives oder negatives Maximum und ein Minimum gleich Null erreichen, betrachte man folgende Zusammenstellung, nach welcher $\varDelta' \dot{AR}\odot$ ein

Maximum	gleich	— $0^s,84$	am	1. Februar
Minimum	„	0,00	„	25. März
Maximum	„	+ 0,57	„	12. Mai
Minimum	„	0,00	„	21. Juni
Maximum	„	— 0,63	„	1. Aug.
Minimum	„	0,00	„	15. Septb.
Maximum	„	+ 0,79	„	1. Nov.
Minimum	„	0,00	„	23. Dec.

erreicht.

Dritte Aufgabe. Es sei gegeben die mittlere Zeit MZ und werde die wahre Zeit WZ gesucht. Es ist einleuchtend, dass bei der Lösung dieser Aufgabe unsere zweite der Gleichungen (10) des vorigen Kapitels in Betracht kommt, da der Zusammenhang zwischen MZ und WZ durch die ZG vermittelt wird. Sehen wir uns die Figur 34 an. In ihr bedeutet q die Stellung der ○, a die Stellung der ⊙, welchen beiden Momentanstellungen gegenüber der Meridian des Beobachters in zwei verschiedenen Lagen sich befinden kann, der Art, dass entweder wie bei der Stellung in m und $m_{,,}$ die beiden Sonnen zugleich nach einer Seite hin ausser ihm liegen, oder so wie bei $m_,$, dass er eine Stellung zwischen ihnen einnimmt. Unseren früheren Definitionen gemäss ist nun für die erstere Lage Cm

Figur 34.



$$\measuredangle\, aCm \text{ (überstumpf)} = WZ$$
$$qCm \quad „ \quad = MZ$$
$$qCa \text{ (spitz)} = ZG$$

ür zweite Lage $Cm_,$

$$\measuredangle\, aCm_, \text{ (überstumpf)} = WZ$$
$$qCm_, \text{ (spitz)} = MZ$$

Mithin wäre für die erste Lage m und $m_{,,}$

$$WZ = MZ - ZG \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

für die zweite Lage $m_,$

$$WZ + ZG - MZ = 360^0$$

oder

$$WZ = 24^h + MZ - ZG \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Würde umgekehrt der Meridian zuerst die ⊙ dann die ○

erreichen, d. h. würde die ZG **negativ**, so wären anstatt (17) und (18) die Gleichungen

$$WZ = MZ + ZG \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (19)$$

$$WZ = MZ - 24^h + ZG \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

anzuwenden.

Hierbei ist sehr wesentlich zu bemerken, dass bei den Gleichungen (17) und (19) der **Datum** der MZ und der gesuchten WZ **derselbe** ist, dass dagegen bei der nach Gl. (18) ausgerechneten WZ der Datum um 1 niedriger und bei der nach Gl. (20) ausgerechneten WZ um 1 höher ist wie der Datum der gegebenen MZ. Man wird sich hiervon leicht überzeugen, wenn man die Fig. 34 aufmerksam betrachtet.

Versuchen wir nun die eigentliche praktische Lösung unserer Aufgabe, so ist klar, dass sie nur gelingt, wenn man die augenblickliche ZG, die der gegebenen MZ entspricht, hat. Da aber in den Jahrbüchern nur $\dot{ZG}$ bezw. $\overset{+}{ZG}$ enthalten ist, so wird es hierbei auch wieder auf die Berechnung einer Corr. ZG aus $\dot{ZG}$ bezw. aus $\overset{+}{ZG}$ ankommen.

Ist aber MZ gegeben, und die Zeitgleichung im Momente des **mittleren** Mittags gleich $\overset{+}{ZG}$, so ist die augenblickliche

$$ZG = \overset{+}{ZG} + \text{Corr. } ZG$$

und

$$\text{Corr. } ZG = \varDelta \overset{+}{ZG} \cdot \frac{MZ}{24^h} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (21)$$

wobei $\varDelta \overset{+}{ZG}$ die **tägliche** Aenderung der $\overset{+}{ZG}$ bedeutet.

6. **Beispiel.** Gegeben **Greenwich** 6. Nov. 1870 $MZ = 13^h 44^m 57^s,0$; gesucht WZ.

Auflösung. Es ist nach dem N. A.

$$\left.\begin{array}{l} 6.\ \text{Nov. } \overset{+}{ZG} = -\,16^m 13^s,95 \\ 7.\ \ „\ \ \ „\ \ = -\,16\ \ 10,85 \end{array}\right\} \text{mithin } \varDelta \overset{+}{ZG} = +\,3^s,10$$

mithin

$$\text{Corr. } ZG = 3{,}10 \,.\, \frac{13^h\ 44^m\ 57^s{,}0}{24^h} = 3{,}10 \,.\, \frac{49497}{86400} = 1^s{,}77$$

mithin

$$ZG = 16^m\ 12^s{,}18$$

und demnach, da hier wegen des negativen Verzeichens von ZG Gl. (19) zur Anwendung kommen muss

$$WZ = 13^h\ 44^m\ 57^s{,}0 + 16^m\ 12^s{,}18$$

und

$$\overline{WZ} = \mathbf{6.\ Nov.\ 14^h\ 1^m\ 9^s{,}18}$$

Diese einfache Lösung ist aber blos desshalb möglich, weil der N. A. eine Columne für $\overset{+}{ZG}$ enthält. Hätte er aber blos $\dot{ZG}$, so wäre die Rechnung nicht so anzustellen. Trotzdem ist auch jetzt die Sache sehr einfach indem vorher, wie wir auf S. 115 zeigten, die $\dot{ZG}$ in $\overset{+}{ZG}$ übergeführt werden kann. Da nämlich am

$$\begin{array}{llll} & & & \varDelta \dot{ZG} \\ 6.\ \text{Nov.} & \dot{ZG} & = -16^h\ 13^s{,}98 & \\ & & & +3{,}09 \\ 7.\ \text{„} & \text{„} & = -16\ \ 10{,}89 & \\ & & & +3{,}93 \\ 8.\ \text{„} & \text{„} & = -16\ \ \ 6{,}96 & \end{array}$$

so ist die an $\dot{ZG}$ anzubringende Correction um $\overset{+}{ZG}$ zu erhalten,

$$6.\ \text{Nov. gleich } 3{,}^s09 \cdot \frac{16^m\ 13{,}^s98}{86400} = \frac{3{,}09 \,.\, 973{,}98}{86400} = 0^s{,}035$$

$$7.\ \text{„ „ } 3{,}93 \cdot \frac{16^m\ 10^s{,}89}{86400} = \frac{3{,}93 \,.\, 970{,}89}{86400} = 0^s{,}044$$

und demgemäss

$$\begin{array}{ll} 6.\ \text{Nov.}\ \overset{+}{ZG} & = -16^m\ 13^s{,}98 + 0^s{,}03 = -16^m\ 13^s{,}95 \\ 7.\ \text{„ „} & = -16\ \ 10{,}89 + 0{,}04 = -16\ \ 10{,}85 \end{array}$$

genau so, wie wir oben unmittelbar aus N. A. Col. II_6 ablasen.

Diese Correction, die an $\dot{ZG}$ anzubringen wäre, um $\overset{+}{ZG}$ zu erhalten, ist also gering aber man muss sie wo es sich um Genauigkeit handelt beachten, da sie im Maximum einen Werth von $0^s{,}17$ erreichen kann.

7. Beispiel. Hätten wir nur das Berliner Jahrbuch und wäre z. B. gegeben Berlin 1850, 15. Juni $MZ = 13^h\ 7^m\ 37^s 91$ gesucht WZ, so gestaltet sich die Rechnung in folgender Weise:

$$\begin{array}{ll} 15.\ \text{Juni}\ \dot{ZG} = +\ 0^m\ 1^s{,}05 & \\ & \varDelta \dot{ZG} = +\ 12^s{,}75. \\ 16.\ \text{„ „} = \quad 13{,}80 & \end{array}$$

Da der mittlere Mittag früher wie der wahre erfolgt, so ist die an $\dot{ZG}$ anzubringende Correction, um $\overset{+}{ZG}$ zu erhalten, für den

$$15.\ \text{Juni} = -12{,}75 \cdot \frac{1^s{,}05}{24^h} = -12{,}75 \cdot \frac{1{,}05}{86400} = 0^s{,}00$$

$$16.\ \text{„} = -12{,}75 \cdot \frac{13^s{,}80}{24^h} = -12{,}75 \cdot \frac{13{,}80}{86400} = 0^s{,}00,$$

d. h. wir dürfen in diesem Falle unmittelbar $\dot{ZG}$ anstatt $\overset{+}{ZG}$ nehmen. Dies zugegeben ist nun

$$\text{Corr.}\ ZG = +\ 12{,}75 \cdot \frac{13^h\ 7^m\ 37^s{,}91}{24} = +\ 12{,}75\ \frac{47257{,}91}{86400} = +6^s{,}97$$

mithin da hiernach die augenblickliche $ZG = +8^s{,}02$ ist, nach Gl. (17)

$$WZ = 13^h\ 7^m\ 37^s{,}91 - 8^s{,}02 = \mathbf{13^h\ 7^m\ 29^s{,}89}.$$

8. Beispiel. Gegeben Greenwich 10. Nov. 1870 $MZ = 23^h\ 55^m\ 0^s{,}0$; gesucht WZ nach dem N. A. zu berechnen.

Auflösung. Es ist $\overset{+}{ZG} = -15^h\ 56^s{,}47$; $\varDelta\overset{+}{ZG} = +6^s{,}50$

$$\text{Corr. } ZG = +6^s{,}50 \,.\, \frac{23^h\ 55^m\ 0^s{,}0}{24^h} = +6^s{,}48$$

mithin

$$\overset{+}{ZG} = -15^m\ 56^s{,}47 + 6^s{,}48 = -15^m\ 49^s{,}99.$$

Da nun die ○ später wie die ⊙ culminirt, so müssten die Gleichung (19) oder (20) zur Anwendung kommen, von denen jedoch nur die letztere gilt, da $MZ + ZG > 24^h$ ist. Unsere gesuchte wahre Zeit ist daher

$$WZ = \mathbf{11.}\ \text{Nov. } \mathbf{0^h\ 10^m\ 49^s{,}99}.$$

Hiernach sind wir auch im Stande unser 5. Beispiel der 2. Aufgabe so zu berechnen, dass wir erst nach der 1. Aufgabe SZ in MZ und letztere nach der 3. Aufgabe in WZ verwandeln. Es war gegeben 5. Dec. 1870 $SZ = 13^h\ 5^m\ 17^s{,}63$, gesucht WZ.

Da

$$\begin{aligned}(24^h + SZ) &= 37^h\ 5^m\ 17^s{,}63\\ \overset{+}{AR}○ &= 16\ \ 56\ \ 19{,}97\\ \hline T_s &= 20^h\ \ 8^m\ 57{,}66\end{aligned}$$

so ist:

Corr. für 20^h	. . . .	$3^m\ 16^s{,}590$
8^m	. . . .	$1{,}311$
57^s	. . . .	$0{,}156$
$0^s{,}6$	. . . .	$0{,}002$
		$3^m\ 18^s{,}059$

Mithin ist

$$MZ = 20^h\ 5^m\ 39^s{,}60.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}&5.\ \text{Dec. } \overset{+}{ZG} = -9^m\ 10^s{,}79\\ &6.\ \ „\ \ \ „\ \ = -8\ \ 45{,}58\end{aligned} \quad \varDelta\overset{+}{ZG} = +0^m\ 25^s{,}21$$

$$\text{Corr. } ZG = +25{,}21 \cdot \frac{72339}{86400} = +21^s{,}11$$

mithin die augenblickliche

$$ZG = -8^m\ 49^s{,}68$$

und somit nach Gl. (19)

$$WZ = \mathbf{5.}\ \text{Dec. } \mathbf{20^h\ 14^m\ 29^s{,}28}$$

welches mit dem auf S. 127 gefundenen Werthe genau übereinstimmt.

Vierte Aufgabe. Gegeben MZ, gesucht SZ.

Diese Aufgabe ist die umgekehrte von der ersten. Rechnen wir den Tag astronomisch von Mittag an, so leuchtet ein, dass die Gleichungen (9) und (10) gelten, während wenn wir von der vorhergehenden Mitternacht an also bürgerlich rechnen, die Gleichungen (11), (12) und (13) zur Anwendung kommen. Für die erste Zählweise sind daher

$$SZ = MZ + \overset{+}{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

$$SZ = MZ + \overset{+}{AR}\odot - 24^h + \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

für die zweite aber

$$SZ = MZ + \underset{+}{AR}\odot - 12^h + \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

$$SZ = MZ + \underset{+}{AR}\odot + 12^h + \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \quad (25)$$

$$SZ = MZ + \underset{+}{AR}\odot - 36^h + \text{Corr. } AR\odot \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

die betreffenden Gleichungen, wobei Corr. $AR\odot$ jetzt nur von der Grösse MZ abhängt und im Gegensatze zur entsprechenden Corr. $AR\odot$ der Gleichungen (9) bis (13) mit dem Argumente MZ aus der Taf. II (B) gefunden wird. Anstatt der Gleichung (24) ist die Gleichung (26) oder (25) zu nehmen, je nachdem

$$(MZ + \underset{+}{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot - 12) > 24^h \text{ oder}$$

$$(MZ + \underset{+}{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot) < 12^h.$$

9. Beispiel. Gegeben Greenwich 7. März bürgerlich $MZ = 17^h\, 4^m\, 32^s{,}85$; gesucht SZ.

Auflösung. Es ist bei der Umwandlung von MZ in SZ die Corr. $AR\odot$ für

	17^h	. . . . .	$2^m\ 47^s{,}560$
	4^m	. . . . .	$0{,}657$
	32^s	. . . . .	$0{,}088$
	$0^s{,}85$	. . . . .	$0{,}002$
	Corr. $AR\odot$	=	$2^m\ 48^s{,}307$
mithin n. Gl. (26)	MZ	=	$17^h\ 4^m\ 32^s{,}85$
	Corr.	=	$2\ \ 48{,}31$
	$\underset{+}{AR}\odot$	=	$22\ 58\ \ 2{,}24$
			$40\ \ 5\ \ 23{,}40$
			$36\ \ 0\ \ \ 0{,}00$
	SZ	=	**$4^h\ 5^m\ 23^s{,}40$**

gleich der SZ, die wir im 1. Beispiel gaben, um MZ zu finden.

Eine Unbestimmtheit, wie wir sie bei der 1. Aufgabe kennen lernten, und wo zu der von einer Uhr angegebenen SZ sich zwei

numerisch verschiedene Zeiten MZ finden liessen, ist jetzt nicht denkbar und kommt man, wenn eine mittlere Zeit MZ gegeben ist, nur auf eine SZ.

10. Beispiel. Gegeben 7. März bürgerlich $MZ = 12^s,222$; gesucht SZ.

Auflösung. Es ist 6./7. März

$$
\begin{array}{rcl}
\overset{+}{AR}\odot & = & 22\;\; 58^m\; 2^s,243 \\
MZ & = & 0\;\; 0\;\; 12,222 \\
\text{Corr.} & = & 0,033 \\
\hline
 & & 22^h\; 58\; 14,498 \\
 & & 12\;\; 0\;\; 0,000 \\
\hline
\end{array}
$$

mithin n. Gl. (24) $SZ = 10^h\, 58^m\, 14^s,498$

11. Beispiel. Geben wir ebenso 7. März bürgerlich gerechnet $MZ = 23^h\, 56^m\, 16^s,316$ also den obigen zweiten Werth von MZ des 2. Beispiels, so ist

$$
\begin{array}{rcl}
MZ & = & 23^h\, 56^m\; 16^s,316 \\
\text{Corr.} & \ldots & 3^m\; 46^s,699 \\
 & & 9,199 \\
 & & 0,044 \\
 & & 0,001 \\
\overset{+}{AR}\odot & = & 22\;\; 58\;\; 2,243 \\
\hline
 & & 46\;\; 58\;\; 14,502 \\
 & & 36\;\; 0\;\; 0,000 \\
\hline
\end{array}
$$

mithin $SZ = 10^h\, 58^m 15^s,50$

Dieser Werth ist numerisch zwar identisch mit dem im 10. Beispiel gefundenen, aber der Datum der SZ muss, wenn er bei dem 10. Beispiel p heisst beim 11. Beispiel gleich $p + 1$ angenommen werden.

Fünfte Aufgabe. Es ist gegeben WZ und soll SZ gefunden werden. Es ist dies die Umkehr der 2. Aufgabe und werden daher auch dieselben Gleichungen gelten müssen, mit den Aenderungen, die die Natur der Sache erfordert, so dass, wenn wir astronomisch rechnen:

$$SZ = WZ + \dot{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot \;\ldots\ldots\; (27)$$

$$SZ = WZ - 24^h + \dot{AR}\odot + \text{Corr. } AR\odot \;\ldots\; (28).$$

Da seit dem wahren Mittag WZ verflossen ist, so ist klar, dass

$$\text{Corr. } AR\odot = \Delta\dot{AR}\odot \frac{WZ}{24^h} \;\ldots\ldots\; (29)$$

und können wir sofort ein Beispiel berechnen.

12. Beispiel. Gegeben Greenwich: 5. Dec. 1870 $WZ = 20^h\, 14^m 29^s,29$. Gesucht SZ.

Es ist 5. Dec. $Æ\odot = 16^h\,47^m\ 7^s{,}51$
6. „ „ $= 16\ 51\ 29{,}35$ $\Delta Æ\odot = +4^m\,21^s{,}84$

mithin: $\text{Corr. } Æ\odot = 261{,}84 \cdot \frac{72869{,}29}{86400} = 220^s{,}83 = 3^m\,40^s{,}83$

und demgemäss nach Gl. (28)

$$SZ = 5.\ \text{Dec. } 13^h\,5^m\,17^s{,}63.$$

Sechste Aufgabe. Es ist gegeben WZ und soll MZ gesucht, also die umgekehrte Aufgabe wie die dritte gelöst werden. Unsere betreffenden Gleichungen sind hier, wenn ZG positiv, d. h. der mittlere Mittag früher fällt

$$MZ = WZ + ZG \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$$MZ = WZ - 24^h + ZG \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

oder sobald der mittlere Mittag später fällt wie der wahre

$$MZ = WZ - ZG \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$MZ = WZ + 24^h - ZG \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

wobei die auf S. 129 bezüglich des Datums gemachte Bemerkung in ähnlicher Weise zu beachten ist. Da ferner ZG die augenblickliche Zeitgleichung bedeutet, so muss sie erst aus der im Jahrbuche zu findenden $\dot{ZG}$ berechnet werden und zwar mit Hilfe der Gleichung

$$\text{Corr. } ZG = \Delta \dot{ZG} \frac{WZ}{24^h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

13. Beispiel. Gegeben Greenwich 6. Nov. 1870 $WZ = 14^h\,1^m\,9^s{,}18$; gesucht MZ.

Auflösung. Es ist 6. Nov. $\dot{ZG} = -16^m\,13^s{,}98$
7. „ „ $= -16\ 10{,}89$ $\Delta \dot{ZG} = +3^s{,}09$

$$\text{Corr. } ZG = +3{,}09 \cdot \frac{50469}{86400} = +1^s{,}80$$

mithin $ZG = -16^m\,12^s{,}18$

und demgemäss nach Gl. (32)

$$MZ = 13^h\,44^m\,57^s{,}00.$$

Hiernach würden wir nun unsere vorige Aufgabe auch so lösen können, dass wir die gegebene WZ erst in MZ verwandelten und diese dann nach der 2. Aufgabe in SZ überführten.

Noch bleibt uns über den Fall Einiges zu sagen übrig, welchen wir bei der ersten Aufgabe besprachen, nämlich über eine Unbestimmtheit in der Lösung, wenn nur schlechtweg die Uhrzeit und der Datum der einen Zeit ohne Kenntnis der Tageszeit gegeben ist. Diese Unbestimmtheit der Lösung kann nur dann eintreten, wenn die gegebene Uhrzeit einer Zeitart angehört deren Tag gerade kürzer ist als der Tag, der der Zeitart entspricht, in welche die gegebene Zeit umgewandelt werden soll. Da nun der mittlere Sonnentag und der

wahre Sonnentag stets länger sind wie der Sterntag, so folgt daraus, dass es niemals möglich ist: eine gegebene MZ oder WZ zweimal innerhalb e i n e s Sterntags anzutreffen, dass mithin die Aufgaben 4 und 5, wobei MZ in SZ und WZ in SZ verwandelt wurde, nur eine ganz bestimmte SZ an e i n e m Sternzeitdatum liefern können. Wenn wir also S. 133, von zwei verschiedenen mittleren Zeiten

$$MZ = 7.\ \text{März} \qquad 12^s,222$$

und

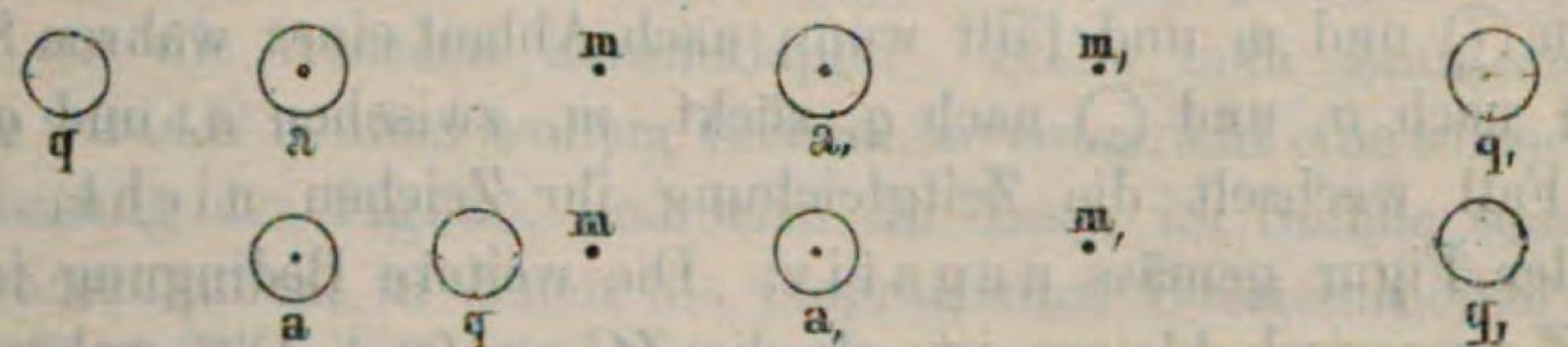
$$\text{„} = \text{„}\ \text{„} \qquad 23^h\ 56^m\ 16^s,316$$

ausgehend, dieselbe Sternzeit $SZ = 10^h\ 58^m\ 14^s,50$ erhielten, so gehörten diese gleichen Uhrzeiten doch zwei verschiedenen Sternzeitdaten an, da wir im zweiten Falle 36^h also 24^h mehr abzogen, wie im ersten.

Bei den umgekehrten Aufgaben 1 und 2 aber, wo SZ in MZ und SZ in WZ verwandelt wird, kann eine gegebene Uhrzeit SZ zweimal innerhalb eines mittleren und wahren Sonnentags vorkommen und somit, wie wir dies bei der ersten Aufgabe sahen, zu e i n e r SZ z w e i MZ gehören.

In ganz ähnlicher Weise können aber auch bei den Aufgaben 3 und 6, wo MZ in WZ und WZ in MZ zu verwandeln ist, Unbestimmtheiten eintreten. Denn da je nach dem Werthe von $(\Delta AR\odot - \Delta AR\bigcirc)$ der wahre Sonnentag länger wie der mittlere und umgekehrt sein kann, so ist es denkbar, dass eine gegebene MZ als Uhrzeit zweimal innerhalb eines wahren Sonnentags oder umgekehrt eine WZ zweimal innerhalb eines mittleren Sonnentags angetroffen wird. Es fragt sich nur, wann wird dies geschehen können? Bedeutet in Fig. 35, q und a

Figur 35.



entsprechend die Stellung der mittleren und wahren Sonne am p^{ten} Tage, $q,$ und $a,$ am $(p+1)^{\text{ten}}$, dagegen m und $m,$ die entsprechende Meridianlage des Beobachters, so ist klar, dass in der oberen Reihe der Bogen am gleich $a,m,$ zwei g l e i c h e WZ vorstellt, und dass, wenn bei der Stellung m der Meridian über $\bigcirc$ hinaus und bei $m,$ hinter $\bigcirc$ zu liegen kommt, diese WZ zweimal innerhalb eines mittleren Tags von einer Uhr angezeigt werden kann. Die näheren Bedingungen für diese Möglichkeit sind leicht erkennbar. Denn wenn am p^{ten} Tage zur gegebenen WZ die $AR\odot$ g r ö s s e r wie $AR\bigcirc$, dagegen am $p+1^{\text{ten}}$ $AR\odot$ k l e i n e r wie $AR\bigcirc$, so muss innerhalb dieser Frist ein Wechsel im Vorzeichen der ZG stattgefunden haben, und muss z u g l e i c h, wenn ZG die momentane Zeitgleichung für den zweiten Moment WZ ist, diese WZ

numerisch kleiner wie ZG sein, damit m_1 nicht über q_1 hinausfällt. Ein Beispiel für diesen Fall wird also leicht gegeben werden können.

14. Beispiel. Es ist am

$$\begin{aligned} &15.\ \text{April}\ \dot{ZG} = +0^s{,}46 \\ &16.\ \ „\ \ \ „\ \ = -14{,}33 \\ &17.\ \ „\ \ \ „\ \ = -28{,}74 \end{aligned}$$

Geben wir demnach ein WZ numerisch kleiner wie $14^s{,}33$, also z. B. $WZ = 7^s{,}0$, so wird man erwarten können, dass nach der Berechnung der diesem Momente entsprechenden momentanen ZG, die obigen Bedingungen erfüllt bleiben. Die Corr. ZG beträgt aber

für die Stellung in m $\quad \dfrac{14{,}79\,.\,7{,}0}{86400} = 0^s{,}0$

so dass also

$$ZG = +0{,}46$$

und ist nach Gl. (30) $MZ = 7^s{,}0 + 0^s{,}46 = \mathbf{7^s{,}46}$ am **15.** April.

Für die Stellung in m_1 ist

$$\text{Corr. } ZG = -\frac{14{,}41\,.\,7{,}0}{86400} = 0^s{,}0.$$

Mithin nach Gleichung (33)

$$MZ = 7^s{,}0 + 24^h - 14^s{,}33 = \mathbf{23^h\ 59^m\ 52^s{,}67}$$

und zwar auch am 15. April nach mittlerer Zeit gerechnet.

Eine zweite Constellation ist denkbar, wobei innerhalb der Zeit eines mittleren Tags zweimal dieselbe WZ stattfinden kann, eine Constellation, wonach sich die Sache so, wie bei der zweiten Reihe Fig. 35 verhält. Im Momente der gegebenen $WZ = \odot m$ steht die $\bigcirc$ zwischen $\odot$ und m und fällt wenn nach Ablauf eines wahren Sonnentags $\odot$ nach a_1 und $\bigcirc$ nach q_1 rückt, m_1 zwischen a_1 und q_1. Für diesen Fall wechselt die Zeitgleichung ihr Zeichen nicht, sondern bleibt der Figur gemäss negativ. Die weitere Bedingung ist, dass die WZ numerisch kleiner ist, als die ZG am $(p+1)^{\text{ten}}$ wahren Tage. Da aber m am p^{ten} Tage im Momente WZ über $\bigcirc$ hinausliegen muss, so folgt weiter, dass WZ am $(p+1)^{\text{ten}}$ zugleich grösser wie ZG am p^{ten} wahren Tage sein muss. Hiernach ist es wiederum leicht, ein Beispiel zu geben, denn der Figur gemäss muss ZG negativ und numerisch im Wachsen begriffen sein. Es ist am

$$\begin{aligned} &15.\ \text{Sept.}\ \dot{ZG} = -4^m\ 50^s{,}50 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -21^s{,}18 \\ &16.\ \ „\ \ \ „\ \ = -5\ \ 11{,}68 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -21{,}18 \\ &17.\ \ „\ \ \ „\ \ = -5\ \ 32{,}86 \end{aligned}$$

und da $4^m\ 50^s{,}50 < WZ < 5^m\ 11^s{,}68$ sein muss, so wird z. B. ein Werth $WZ = 4^m\ 59^s{,}50$ den Bedingungen genügen. Hierfür ist aber

$$\text{Corr. } ZG = -21^s{,}18\,.\,\frac{4^m\ 59^s}{86400} = -0^s{,}07$$

mithin für die Stellung m

$$ZG = -4^{m}\ 50^{s},57$$

und gemäss Gl. (32)

$$MZ = 4^{m}\ 59^{s},50 - 4^{m}\ 50^{s},57 = 8^{s},93;$$

für die Stellung $m_{\prime}$ dagegen

$$\text{Corr. } ZG = -21^{s},18 \cdot \frac{4^{m}\ 59^{s}}{86400} = -0^{s},07$$

demgemäss

$$ZG = -5^{m}\ 11^{s},75$$

und nach Gl. (33)

$$MZ = 4^{m}59^{s},50 + 24^{h} - 5^{m}\ 11^{s},75 = 23^{h}\ 59^{m}47^{s},75.$$

Die beiden von uns besprochenen Fälle, in denen auf einen mittleren Sonnentag zwei gleiche WZ fallen können, sind vielleicht nicht die einzigen und um den Zusammenhang im Allgemeinen übersehen zu können, entwirft man sich am besten eine Figur, die den Verlauf der ZG darstellt, d. h. man macht einfach eine Copie der Fig. 29, die aber nur die Abscisse 0 bis 360 etc. und die ausgezogene Curve der ZG zu enthalten braucht. Da es ferner auf die absolute Entfernung von a und $a_{\prime}$ Fig. 35 nicht ankommt, so kann man diese gleich Null setzen, d. h. annehmen, dass der Ort der ⊙ stets in der bezeichneten Abscisse, dagegen die ○ in den entsprechenden Punkten der Curve der ZG gelegen sei. Da ferner die Stellungen der beiden Sonnen, wenn wir sie als positive und negative auffassen, wie wir schon im §. 18 S. 80 nachgewiesen, die entgegengesetzten Vorzeichen der ZG bedingen, so müsste man die Copie so zeichnen, wie sie Fig. 29 liefert, wenn man sie um 180 um die Abscisse herumklappt. Stellt man dann die Abscisse, die wir AB nennen wollen, vertical, so entspricht eine solche Figur der Auffassung der Fig. 35, und wird der Leser im Stande sein, alle Fälle herauszufinden, in denen die besprochenen Constellationen stattfinden. Errichtet man nämlich in einem gewissen Abstande d: einem Abstande, wie er der aufeinander folgenden Erreichung derselben WZ, also einem wahren Sonnentage entspricht, zwei Senkrechte auf AB, so durchschneiden diese Senkrechten AB in zwei Punkten a und $a_{\prime}$, und die Curve der ZG in zwei Punkten q und $q_{\prime}$ und ist die Strecke

$$aq = ZG \text{ am } p^{\text{ten}}$$
$$a_{\prime}q_{\prime} = \text{„ „ } p + 1^{\text{ten}}.$$

Ist nun $aq = a_{\prime}q_{\prime}$, so ist es nicht möglich zwischen q und $q_{\prime}$ eine Gerade $A_{\prime}B_{\prime} \parallel AB$ hindurchlegen zu können; ist aber z. B. $aq > d_{\prime}q_{\prime}$, so gelingt dies immer. Der Abstand $A_{\prime}B_{\prime}$ von AB stellt aber nichts anderes vor, als unsere WZ, und wird der Leser nunmehr im Stande sein, zu entscheiden, welche näheren Bedingungen bezüglich der Werthe

aq und *a,q,* und ihrer Vorzeichen bestehen müssen, um die betreffende Constellation zu ermöglichen.

Es versteht sich von selbst, dass auch umgekehrt es möglich ist, eine *MZ* zu finden, die zweimal auf einen und denselben wahren Sonnentag fällt und gelten hierbei ganz ähnliche Betrachtungen, wie die zuletzt angestellten.

§. 26. Die Beispiele zu den vorausgehenden sechs Aufgaben wurden an der Hand des Nautical Almanac gelöst und fand sich bei keinem eine Angabe, die sich auf die geographische Länge eines Orts bezog, woraus folgt, dass bei allen Beispielen der Ort, den wir für die ursprüngliche Zeitangabe im Auge hatten, Greenwich selbst war. In gleich günstiger Lage würden wir uns befunden haben, wenn wir solche Aufgaben für Berlin an der Hand des Berliner Jahrbuchs zu berechnen gehabt hätten, also überhaupt, wenn für irgend einen Ort Aufgaben der Art zu lösen wären, und uns ein Jahrbuch zu Gebote stände, das für denselben Ort zunächst berechnet vorläge. Da dies nun allgemein nicht der Fall ist, so müssen wir die Lösung der obigen Aufgaben noch für den Fall betrachten, dass das zu benutzende Jahrbuch für einen andern Ort berechnet ist, als der Ort ist, für den eine der sechs Zeitumwandlungen verlangt wird. Der Weg, der hier zu betreten ist, wird sich leicht erkennen lassen. Bezeichnen wir nämlich die an einem Orte *M* gegebenen Uhrzeiten mit

$$SZ,\ MZ \text{ und } WZ$$

die diesen Momenten entsprechenden Zeiten am Orte *G*, für den ein Jahrbuch, das bei der Lösung der Aufgabe benutzt werden soll, berechnet vorliegt, mit

$$(SZ),\ (MZ) \text{ und } (WZ)$$

so werden sämmtliche Aufgaben für den Ort *M* sich lösen lassen, wenn wir

$$SZ \text{ in } (SZ)$$
$$MZ \text{ „ } (MZ)$$
$$WZ \text{ „ } (WZ)$$

und umgekehrt zu verwandeln gelernt haben.

Denn soll z. B. für Marburg *WZ* in *MZ* verwandelt werden, so verwandelt man zunächst

$$WZ \text{ in } (WZ)$$

führt dann an der Hand des gegebenen Jahrbuchs, wenn dies z. B. der N. A. wäre, diese Greenwicher

$$(WZ) \text{ in } (MZ)$$

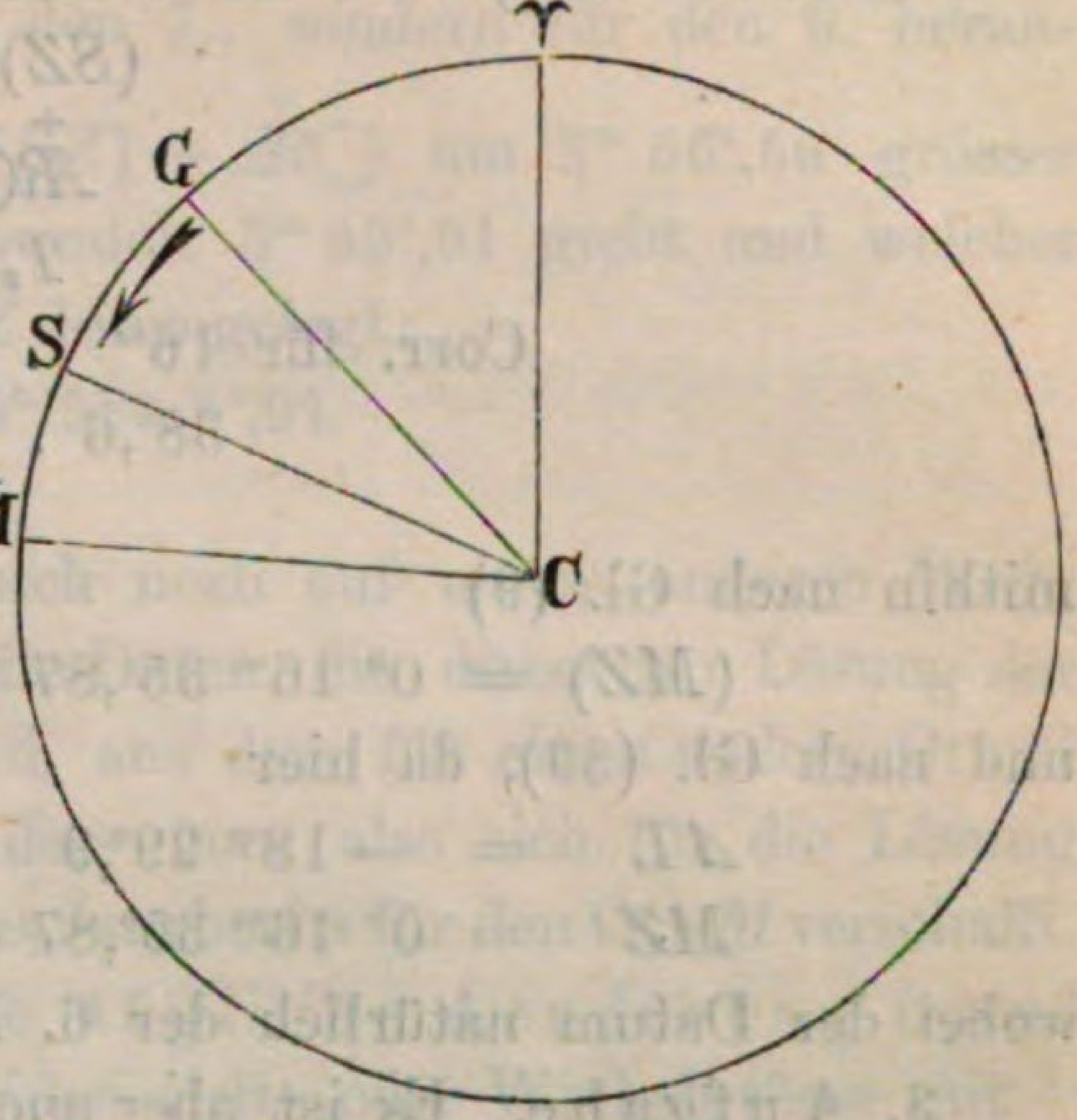
und diese dann rückwärts als

$$(MZ) \text{ in } MZ$$

über. Es scheint dies ein langer Umweg zu sein, aber sofort wird sich zeigen, dass diese Ueberführungen sehr einfacher Natur sind.

Sehen wir nämlich die Fig. 36 an und bedeutet in ihr S die Sonne, CG einen Meridian, der von CM um den Winkel MCG nach Westen hin entfernt liegt, so ist ganz klar, dass wenn wir diesen Winkel gleich dem geographischen Längenunterschiede der beiden Orte, mit $\varDelta L$ bezeichnen, die Gleichungen bestehen:

Figur 36.



$(SZ) = SZ \mp \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (35)$

$(MZ) = MZ \mp \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (36)$

$(WZ) = WZ \mp \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (37)$

und ebenso

$SZ = (SZ) \pm \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (38)$

$MZ = (MZ) \pm \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (39)$

$WZ = (WZ) \pm \varDelta L \quad . \; . \; . \; . \; (40)$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn der Ort G des Jahrbuchs westlich vom Orte M, und das untere Zeichen, wenn jener von diesem östlich liegt, und wobei stets, wenn die Summe rechts grösser wie 24^h ausfällt, von ihr 24^h zu subtrahiren, während wenn die Differenzen negativ ausfallen, 24^h zu zuaddiren ist.

1. Aufgabe. An einem Orte M, dessen Längendifferenz $5^h\,5^m\,3^s,0$ östlich von Greenwich ist, ist gegeben 7. Dec. 1870 $MZ = 9^h 14^m 13^s,5$, es soll für diesen Ort MZ in WZ übergeführt werden und zwar an der Hand des N. A.

Auflösung. Gemäss der Gleichung (35) ist

$$(MZ) = MZ - \varDelta L = 4^h\,9^m\,10^s,5 \text{ am 7. Dec.}$$

ferner nach der Lösung der 3. Aufgabe des vor. §.

$$\begin{array}{lll} \text{7. Dec. } \overset{+}{ZG} = -8^m\,19^s,86 & & \\ \text{8. } \;,, \quad ,, \; = -7 \;\; 53,66 & \varDelta \overset{+}{ZG} = +26^s,20 & \end{array}$$

$$\text{Corr. } ZG = +26,20 \cdot \frac{14950}{86400} = +4^s,53$$

mithin die moment. $ZG = -8^m\,15^s,33$

mithin da die ◯ später wie die ⨀ culminirt nach Gl. (19)

$(WZ) = 4^h\,9^m\,10^s,5 + 8^m\,15^s,33 = 4^h\,17^m\,25^s,83$ und demgemäss bei der Umkehr von (WZ) in WZ gemäss der Gleichung (40)

$$WZ = (WZ) + \varDelta L$$

$$WZ = \text{7. Dec. } 4^h\,17^m 25,83 + 5^h 5^m 3^s,0 = \text{7. Dec. } \mathbf{9^h 22^m 28^s,83}.$$

2. Aufgabe. Ein Phänomen wurde in Berlin am 7. Mai 1870 astronomisch gerechnet im Momente $(SZ) = 3^h\,17^m\,0^s$ beobachtet; was hätte eine mittlere Zeituhr in Marburg schlagen müssen, wenn

sie denselben Moment der Zeit hätte angeben wollen, und wenn weiter vorausgesetzt wird, dass man an der Hand des Berliner Jahrbuchs die Aufgabe zu lösen hätte?

Auflösung. Es ist 7. Mai 1870 Berlin

$$(SZ) = 3^h\ 17^m\ 0^s{,}00$$
$$\overset{+}{A\!\!R}\odot = 3\ \ 0\ \ 21{,}40$$
$$T_s = 0^h\ 16^m 38^s{,}60$$

Corr. für 16^m 2, 621

$38^s{,}6$ 0, 105

2, 726

mithin nach Gl. (9)

$$(MZ) = 0^h\ 16^m\ 35^s{,}87$$

und nach Gl. (39), da hier

$$\varDelta L = -18^m\ 29^s{,}9$$
$$MZ = 0^h\ 16^m\ 35^s{,}87 + 24^h - \varDelta L = 23^h\ 58^m\ 5^h{,}97$$

wobei der Datum natürlich der 6. Mai ist.

3. Aufgabe. Es ist aber auch denkbar, dass die vorige Aufgabe nicht mit Hilfe des Berliner Jahrbuchs, sondern mit Hilfe des N. A. gelöst werden soll, oder dass allgemein eine beliebige Uhrzeit $[SZ]$ an einem Ort B gegeben ist, und an einem Orte M in MZ verwandelt werden soll unter Beihilfe eines Jahrbuchs, das zunächst für einen Ort G aufgestellt ist. Bezeichnen wir die der Berliner $[SZ]$ entsprechende Greenwicher Sternzeit wie seither mit (SZ), so ist die Auflösung der vorigen Aufgabe jetzt folgende. Da Greenwich von Berlin um $53^m\ 35^s{,}5$ westlich liegt, so ist nach Gl. (35)

$$(SZ) = 3^h\ 17^m\ 0^s{,}0 - 53^m\ 35^s{,}5 = 2^h\ 23^m\ 24^s{,}5.$$

Da ferner für Greenwich 7. Mai: $\overset{+}{A\!\!R}\odot = 3^h\ 0^m\ 30^s{,}27$, so ist

$$(SZ) - A\!\!R\odot = 23^h\ 22^m\ 54^s{,}23$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Corr. } 23^h \text{ . . . . . .} & 3^m\ 46^s{,}078 \\ 22^m \text{ . . . . .} & 3{,}\ 604 \\ 54^s \text{ . . . . .} & 0{,}\ 147 \end{array}\right\} = 3^m\ 49^s{,}829$$

mithin für Greenwich

$$(MZ) = 6.\ \text{Mai}\ 23^h\ 19^m\ 4^s{,}40$$

und n. Gl. (39) die MZ in Marburg gleich

$$6.\ \text{Mai}\ 23^h\ 19^m\ 4^s{,}40 + 35^m\ 5^s{,}6 = 6.\ \text{Mai}\ 23^h\ 54^m\ 10^s{,}00,$$

ein Resultat, welches von dem oben gefundenen um $3^m\ 55^s{,}97$ abweicht, so dass in unserer Rechnung ein Fehler sein muss. Er ist folgender. Da wir für Greenwich (SZ) gleich $2^h\ 23^m\ 24^s{,}5$ fanden, und die $\overset{+}{A\!\!R}\odot$ am 7. Mai $3^h\ 0^m\ 30^s{,}27$ am 6. Mai $2^h\ 56^m\ 33^s{,}71$ beträgt, so ist dies nicht etwa ein Fall, der nach dem Früheren eine doppelte Lösung zuliesse denn es fällt Cm Fig. 33 nicht zwischen σ, und

σ_0, sondern zwischen σ_0 und Υ und ist somit klar, dass dieses für Greenwich ein Moment bedeutet, der noch in den 6. Mai fällt. Um diesen Moment des 6. Mai's nach Gl. (9) in mittlerer Zeit auszudrücken dürfen wir daher auch nicht die $\overset{+}{AR}\odot$ für den 7., sondern für den 6. heranziehen. Thun wir dies, so fällt $[SZ] - \overset{+}{AR}\bigcirc$ um $3^m\,56^s{,}56$ grösser aus, welches in mittlere Zeit verwandelt $3^m\,55^s{,}91$ giebt und welcher Werth zu obigem Werthe von MZ hinzugelegt:

$$MZ = 6.\ \text{Mai}\ 23^h\ 58^m\ 5^s{,}91$$

liefert.

Diese Aufgaben lassen sich auch noch auf einem anderen Wege lösen, nämlich so, dass man sich die Daten, die direct zur Lösung der Aufgabe für einen Ort M nöthig sind, aus dem für einen andern Ort G bestimmten Jahrbuche berechnet, dass man also sich für die Lösung der gegebenen Aufgabe ein Stück eines Jahrbuchs für den Ort M verschafft. Bezeichnen wir zu dem Ende eine tägliche Aenderung irgend einer in einem Jahrbuche zu findenden Zeit- oder Winkelgrösse mit

$$\varDelta$$

ferner den Längenunterschied in Sternzeit ausgedrückt einfach mit

$$\lambda$$

und die Anzahl Sternzeit-Secunden, die einem Sterntage, mittleren Sonnen- und wahren Sonnentage entsprechen, mit

$$t_s\,,\quad t_m\,,\quad t_w\,,$$

ferner die Correction, die an eine bestimmte im Jahrbuch gegebene Grösse wegen der Zeit anzubringen wäre, welche der Meridian für den Ort G des Jahrbuchs nöthig hat um an die Stelle des Meridians des andern Orts M zu rücken, bzw. umgekehrt, mit C

so ist:

$$C = \begin{cases} \dfrac{\varDelta\,.\,\lambda}{t_s} \\[2mm] \dfrac{\varDelta\,.\,\lambda}{t_m} \\[2mm] \dfrac{\varDelta\,.\,\lambda}{t_w} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

je nachdem eben einer der drei Tage in Betracht kommt. Hierbei ist es ganz gleichgiltig, was $\varDelta$ bedeutet: ob es sich auf die ZG, $AR\odot$, $AR\bigcirc$ etc. bezieht.

Nehmen wir aber speziell an, es bedeute $\varDelta$ einen Rectascensionsunterschied, so können wir noch einen Schritt weiter gehen und nach der zweiten Correction

$$c$$

fragen: die zu C noch hinzukommen muss, wenn aus einem gewissen

Grunde verlangt würde: der Meridian solle sich auch noch um die kleine Winkelgrösse C vorwärts bewegen, nachdem er schon den Winkel λ zurückgelegt hat. Dieser Werth c ergiebt sich aber aus der Proportion

$$\frac{C}{c} = \frac{\lambda}{C}$$

d. h. es ist:

$$c = \frac{C^2}{\lambda}$$

und demgemäss mit Rücksicht auf die Gl. (41)

$$c = \begin{cases} \left(\frac{\Delta}{t_s}\right)^2 \lambda \\ \left(\frac{\Delta}{t_m}\right)^2 \lambda \\ \left(\frac{\Delta}{t_w}\right)^2 \lambda \end{cases} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

Es ist also die Gesammtkorrection, welche unter dieser letzten Voraussetzung an die Daten des Jahrbuchs anzubringen ist, wenn wir an C ein kleines α setzen, um anzudeuten, dass es sich auf die Rectascension bezieht, gleich:

$$C' = C_\alpha + c_\alpha$$

oder

$$C'_\alpha = \lambda\left[\frac{\Delta}{t} + \left(\frac{\Delta}{t}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Dieser letzteren Gleichung muss man sich bedienen, wenn man z. B. $\dot{AR}\odot$ oder $\overset{+}{AR}\bigcirc$, vom Orte des Jahrbuchs ausgehend, für einen anderen Ort mit der Längendifferenz λ suchen soll, wenn z. B. 7. Mai 1870 die $\overset{+}{AR}\bigcirc$ für Marburg gesucht werden soll mit Hilfe des N. A. In diesem Falle ist, wenn wir die Seite II des N. A. berücksichtigen, t gleich der Anzahl der Secunden in einem mittleren Sonnentage oder

$$t = 86636^s{,}56$$

ferner

$$\lambda = 2105^s{,}6$$

$$\Delta = 236^s{,}56$$

mithin

$$C'_\alpha = 2105^s{,}6\left[\frac{236{,}55}{86636{,}55} + \left(\frac{236{,}55}{86636{,}55}\right)^2\right]$$

$$= 5^s{,}749 + 0^s{,}016$$

$$= 5^s{,}765$$

Diese Correction gilt, da sie an die $\overset{+}{AR}\bigcirc$ und nicht an $\dot{AR}\odot$ anzubringen ist, jahraus jahrein und ist für Marburg demgemäss:

6. Mai 1870 $\overset{+}{AR}\bigcirc = 2^h\ 56^m\ 33^s{,}71 - 5^s{,}765 = 2^h\ 56^m\ 27^s{,}945$

7. „ „ „ $= 3\ \ 0\ \ 30{,}27 - 5{,}765 = 3\ \ 0\ \ 24{,}505$

Die 2. Aufgabe S. 139 kann hiernach auch in folgender Weise gelöst werden. Es ist 7. Mai

$$\begin{array}{lrl} \text{in Berlin} & SZ = & 3^h\ 17^m\ 0^s{,}0 \\ & \Delta L = & -\ 18\ \ 29{,}9 \\ \hline \text{in Marburg} & SZ = & 2^h\ 58^m\ 30^s{,}1 \end{array}$$

Da diese SZ zwischen die Marburger $\overset{+}{AR}\bigcirc$ am 6. und 7. Mai fällt, so gehört diese Aufgabe zu den unbestimmten; aber wir sehen aus der Angabe Berlin 7. Mai $(SZ) = 3^h\ 17^m\ 0^s{,}5$ verglichen mit $\overset{+}{AR}\bigcirc$, dass der Moment (SZ) nahe um den mittleren Mittag des 7. Mai's herum liegt, und dass von den beiden Werthen MZ für Marburg, die jetzt erst zu berechnen sind, nur der gilt, der mit dieser Angabe nicht im Widerspruch steht. Die Berechnung der beiden Werthe ist aber folgende:

$$\begin{array}{lrl} & SZ = & 2^h\ 58^m\ 30^s{,}100 \\ 6.\ \text{Mai} & \overset{+}{AR}\bigcirc = & 2\ \ 56\ \ 27{,}945 \\ \hline & T_s = & 0^h\ 2^m\ 2^s{,}055 \\ \text{Corr.} & 2^m \ldots\ldots & 0{,}328 \\ & 23^s \ldots\ldots & 0{,}063 \\ \hline & & 0{,}391 \\ & MZ_1 = & 6.\ \text{Mai}\ 0^h\ 2^m\ 2^s{,}764 \end{array}$$

Ebenso für die Berechnung der zweiten

$$\begin{array}{lrl} & SZ = & 26^h\ 58^m\ 30{,}100 \\ 6. & \overset{+}{AR}\bigcirc = & 2\ \ 56\ \ 27{,}945 \\ \hline & T_s = & 24\ \ 2\ \ 2{,}155 \\ \text{Corr.} & 24^h \ldots & 3^m\ 55^s{,}908 \\ & 2^m \ldots & 0{,}328 \\ & 2^s \ldots & 0{,}005 \\ \hline & & 3^m\ 56^s{,}241 \\ & MZ_2 = & 6.\ \text{Mai}\ 23^h\ 58^m\ 5^s{,}92 \end{array}$$

ein Werth, den wir auf S. 140 erhielten und als den allein richtigen ansehen müssen.

Soll zweitens z. B. die Zeitgleichung für Greenwich berechnet werden nach dem Berliner Jahrbuch und zwar die $\dot{ZG}$, so kann ohne Weiteres von der Gleichung (43) Gebrauch gemacht werden, indem man sich nach ihr zunächst C''_α für Greenwich berechnet. Es ist aber

$$\begin{array}{l} \text{Berlin 1870 18. October } \dot{AR}\odot = 13^h\ 32^m\ 8^s{,}29 \\ \qquad\quad 19.\quad ,,\quad ,,\ ,,\ 13\ \ 35\ \ 53{,}78 \end{array} \; 3^m\ 45^s{,}49 = 225^s{,}49 = \Delta$$

Mithin ist hier

$$t = t_w = 86400 + 225{,}49 = 86625^s{,}49.$$

demgemäss für Greenwich, da

$$\lambda = 3215^s{,}5$$

$$C'_\alpha = 3215{,}5\left[\frac{225{,}49}{86625{,}49} + \left(\frac{225{,}49}{86625{,}49}\right)^2\right]$$

oder $$C'_\alpha = 8^s{,}369 + 0^s{,}021 = 8^s{,}390$$

wird und bedeutet dies, dass der Meridian, nachdem er um die Winkelgrösse λ sich gedreht hat, noch den Winkel $C'_\alpha = 8^s{,}390$ weiter zurücklegen muss, um die wahre Sonne auch wirklich zu erreichen.

Um hiernach die $\dot{Z}G$ für Greenwich zu bekommen, benutzen wir weiter die Gleichung (41) und erhalten so da nach dem Berliner Jahrbuch $\varDelta ZG = -11^s{,}03$

$$C_g = -\frac{11{,}03 \,.\, 3215}{86625} = -0^s{,}409$$

Die Correction, die aber weiter noch angebracht werden müsste, wäre

$$c_g = -\frac{11{,}03 \,.\, C'_\alpha}{86625} = -\frac{11{,}03 \,.\, 8{,}390}{86625}$$

welche wir gleich Null setzen können, um sonach

$$C'_g = -0^s{,}409$$

zu erhalten, wornach nun da für Berlin $\dot{Z}G = -14^m\ 45{,}73$ ist, die $\dot{Z}G$ für Greenwich gleich $-14^m\ 46^s{,}14$ wird, ein Werth, der genau mit dem im N. A. angegebenen übereinstimmt.

Die allgemeine Formel für diese Art der g e n a u e n Berechnung dieser Grösse C'_g wäre demnach

$$C'_g = C_g + c_g$$

oder

$$C'_g = \frac{(\varDelta ZG) \,.\, \lambda}{86400 + \varDelta AR\odot} + \frac{(\varDelta ZG) \,.\, C'_\alpha}{86400 + \varDelta AR\odot}\,; \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

oder da

$$C'_\alpha = \frac{\varDelta AR\odot \,.\, \lambda}{86400 + \varDelta AR\odot} + \left(\frac{\varDelta AR\odot}{86400 + \varDelta AR\odot}\right)^2 \lambda \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

auch

$$C'_g = \frac{(\varDelta ZG) \,.\, \lambda}{86400 + \varDelta AR\odot} + \frac{(\varDelta ZG)(\varDelta AR\odot) \,.\, \lambda}{(86400 + \varDelta AR\odot)^2} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

da man den dritten Summanden unbedingt weglassen kann.

Man wird leicht erkennen, welchen Maximalwerth der zweite Summand in (46) erreicht, um hiernach beurtheilen zu können, ob derselbe weggelassen werden darf. Die Maximalwerthe von λ, $\varDelta ZG$ und $\varDelta AR\odot$ sind nämlich in runder Zahl bzw.

$$24^h = 86400^s;\ 30^s \text{ und } 4^m\ 27^s = 267^s$$

und wäre demnach dieser Maximalwerth gleich

$$\frac{86400 \,.\, 30 \,.\, 267}{(86400 + 267)^2}$$

in runder Zahl gleich

$$\frac{30.267}{86667} = \frac{8010}{86667} = 0^s{,}09,$$

welcher Werth am 23. Dec. bei einem Längenunterschiede von 24^h in Betracht käme.

Der Werth von C'_α, den wir auf S. 142 fanden, lässt sich unter der bestimmten Voraussetzung, dass $\varDelta$ gleich der Rectascensionsänderung der mittleren Sonne in einem mittleren Sonnentage also gleich $236^s{,}56$ ist, noch bequemer erhalten. Ist nämlich die $\overset{+}{AR}\bigcirc$ für den Ort G gegeben, so hat im Momente, wo es für diesen Ort mittlerer Mittag ist, der Ort M eine $MZ = \lambda^h$ oder $= 24^h - \lambda^h$ und im Momente, wo der Ort M seinen mittleren Mittag hat, eine $MZ = 0^h = 24^h$ so dass zwischen beiden Mittagen in der That eine mittlere Zeit $= \lambda^h$ liegt. Sehen wir also λ in der mittelsten der Gleichungen (41) als eine mittlere Zeitgrösse an, so müssen wir für t_m nicht $24^h + 236^s{,}56$ sondern auch die entsprechende mittlere Zeit $24^h = 86400$ setzen und ist demgemäss

$$C'_\alpha = \left(\frac{236{,}56}{86400}\right)\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Der Coefficient an λ ist aber kein anderer als der Coefficient an MZ in der untersten der Gl. (32) und betrachten wir hiernach λ als Argument, so lässt sich mittelst der Taf. II (B) der Werth von C'_α auf bequemere Weise berechnen. Im obigen Beispiele der S. 142 war $\lambda = 35^m\ 5{,}^s6$ und ist mithin nach Taf. II (B)

Corr. für	35^m	$5{,}^s750$
„ „	$5{,}^s6$	$0{,}017$
	$C'_\alpha =$	$5{,}767$

wie wir oben auch fanden.

Kapitel IV.

Ueber die Abhängigkeit der scheinbaren Lage eines Gestirns, insbesondere herrührend von der Natur des Lichtes.

§. 27. Alles Licht, welches von einem Himmelskörper in unser Auge gelangen will, muss vorher eine eigenthümliche Schicht, die Atmosphäre, durchlaufen, deren Bestandtheile wir genau kennen und deren physikalische Verhältnisse uns ebenfalls genügend bekannt sind Diese Zwischenschicht der Atmosphäre ist nun die erste Veranlassung, dass wir die Gestirne nicht an dem Platze sehen, wo sie wirklich sich befinden und wir schon mit Rücksicht hierauf von einem „scheinbaren" und „wahren" Orte eines Himmelskörpers reden können. Man pflegt diesen Einfluss auf das Erscheinen der Gestirne mit dem Namen der „astronomischen Strahlenbrechung" oder einfach der „Refraction" zu bezeichnen.

Ferner ist das Licht Bewegung und verlangt in Folge dessen Zeit, um sich von einem Orte bis zu einem andern fortpflanzen zu können. Die Anzeige, die es an letzterem Orte macht, wird daher, wenn dieser ebenfalls in Bewegung begriffen ist, möglicherweise den Körper, der das Licht aussendet, auch an einer andern als seiner wahren Stelle erscheinen lassen. In der That giebt die Fortpflanzung des Lichts in Verbindung mit der Fortbewegung der Erde einen zweiten Grund der Verschiedenheit des wahren und scheinbaren Orts der Gestirne ab, und nennt man diesen Einfluss die „Aberration des Lichts."

Die beiden Einflüsse optischer Natur sind es aber nicht allein, die man vorkommenden Falls zu berücksichtigen hat. Es ist denkbar, dass man den Ort eines Himmelskörpers für einen ganz bestimmten Standpunkt, z. B. für den Mittelpunkt der Sonne oder den Mittelpunkt der Erde berechnet hat, und seine Lage von irgend einem andern Orte aus angeben muss. Er erscheint uns dann von beiden Orten gesehen nicht an derselben Stelle, indem die beiden Richtungslinien nach ihm einen Winkel mit einander bilden. Man pflegt diesen Winkel die „Parallaxe" zu nennen und wird sie einen dritten Gegenstand der folgenden Betrachtung abgeben.

Gegenüber den Fixsternen, die als Punkte angesehen werden müssen, haben insbesondere die Sonne und der Mond eine so bedeutende scheinbare Grösse, dass es nicht einerlei ist, welchen Punkt ihrer sichtbaren Scheibe man bei der Rechnung oder Beobachtung ins Auge fasst, und wird desshalb viertens bei Zeitbestimmungen eine Grösse in Betracht kommen, die man den „scheinbaren Durchmesser“ zu nennen pflegt.

Diese vier Grössen können Berücksichtigung finden bei irgend einem zu Grund gelegten Coordinatensystem, z. B. bei dem System der Rectascension und Declination, oder dem Systeme der Länge und Breite, oder dem Systeme der Höhe und des Azimuths und darf ein solches System zunächst als unveränderlich angesehen werden. Es ist aber auch denkbar, dass dasselbe im Laufe der Zeit sich ändert, dass mithin, wenn zu irgend einer Zeit die *Æ* und Decl. gegeben sind, diese Grössen zu einer andern Zeit schon desshalb andere werden, weil unterdessen sich die Lage des Coordinatensystems geändert hat. Bezüglich hierauf sind es drei weitere Dinge, die von uns in Betracht gezogen werden können.

Wir sahen oben fortwährend unseren Frühlingspunkt als einen unveränderlichen Punkt an. Er ist es in Wirklichkeit jedoch nicht, sondern rückt auf der Ebene der Ekliptik fort, zwar langsam, aber doch so merklich, dass die Folgen hiervon schon im Alterthume bekannt waren. Es wird sich zeigen, dass dieses Fortrücken des Frühlingspunktes eine Folge davon ist, dass die Erdaxe ihre bis jetzt als unveränderlich angenommene Lage, in der sie stets einer beliebigen Anfangslage durch Jahrhunderte und Jahrtausende hindurch parallel bleiben musste, nicht beibehält. Dieses Fortrücken des Frühlingspunktes auf der Ekliptik pflegt man mit dem Namen des „Vorrückens der Nachtgleichen“ oder auch mit dem Namen „Präcession“ zu bezeichnen, und ist dasselbe an eine Periode von in runder Zahl 26000 Jahren gebunden.

Noch eine zweite an eine etwa 18jährige Periode gebundene Ursache giebt es, vermöge deren die Erdaxe ihre bis jetzt vorausgesetzte Lage einbüsst; eine Ursache, die ebenfalls eine Verschiebung des Frühlingspunkts zur Folge hat, zugleich aber auch die Schiefe der Ekliptik zu verändern im Stande ist. Man nennt diesen Einfluss die „Nutation“ und die hierdurch hervorgebrachte Verstellung der Erdaxe auch das „Wanken der Erdaxe.“

Bei diesen beiden zuletzt erwähnten Einflüssen: der Präcession und Nutation wird zunächst eine Fundamentalebene als unveränderlich in ihrer Lage angenommen, mögen sonst Linien und Ebenen ihre Lage ändern wie sie wollen. Diese Ebene ist die Ebene der Erdbahn oder

die Ekliptik. Aber auch sie ist wie jedes Gebilde physischer oder wie hier eingebildeter Natur veränderlich. Wir werden also bei Oertern von Himmelskörpern auch noch auf diese Aenderung der Ekliptik Rücksicht nehmen können. Da diese Veränderlichkeit in der Lage der Ekliptik nothwendigerweise eine Aenderung der Schiefe der Ekliptik, d. h. des Winkels zwischen Aequator und Ekliptik zur Folge hat, so wird sie vorzugsweise mit dem Namen der „Veränderlichkeit der Schiefe der Ekliptik" bezeichnet.

Es sind demnach sieben verschiedene Einflüsse, die wir jetzt zu betrachten haben. Selbstverständlich wird hier nicht etwa von jedem dieser sieben Einflüsse eine vollständige Theorie zu erwarten sein. Für unsere Zwecke muss es genügen, die praktische Benutzung der von der Theorie gegebenen Formeln kennen zu lernen. Eine weiter hinzugefügte Angabe der Literatur wird Denjenigen, der diese theoretischen Entwickelungen näher kennen lernen will, hierzu in den Stand setzen. Die beiden Einflüsse der Refraction und Aberration werden den Gegenstand der Betrachtung in diesem Kapitel bilden, während die fünf übrigen Einflüsse, bei denen die eigentliche innere Natur des Lichts nicht der maassgebende Factor ist, im fünften Kapitel betrachtet werden sollen.

I. Refraction.

§. 28. Das uns umgebende Luftmeer besteht der Hauptsache nach aus drei Bestandtheilen, die zusammen ein Gasgemenge bilden, in welchem die drei Einzelgase: Sauerstoff, Stickstoff und Wassergas für sich bestehende sind, ohne etwa eine wirkliche chemische Verbindung mit einander zu bilden. Zwei dieser Bestandtheile, Sauerstoff und Stickstoff sind bis jetzt räumlich und zeitlich stets in demselben Verhältnis von 21 Raumtheilen Sauerstoff gegenüber 79 Theilen Stickstoff angetroffen worden. Der dritte Bestandtheil aber, der Wasserdampf, also die chemische Verbindung von 2 Vol. Wasserstoff mit 1 Vol. Sauerstoff in eigentlicher Gasform (oder auch als Nebel etc.) ist der Menge nach sehr verschieden, und kann von einem Werthe gleich Null anwachsen bis zu einem bestimmten von verschiedenen Einflüssen abhängenden Maximum. Diese drei Bestandtheile der Atmosphäre unterscheiden sich in einem Punkte wesentlich. Die beiden ersten nämlich sind sogenannte permanente Gase, d. h. sie sind bis jetzt noch durch kein Mittel gezwungen worden, ihren gasförmigen Zustand mit dem tropfbar flüssigen zu vertauschen, am allerwenigsten aber durch die Mittel, welche die Naturkräfte auf der Erde selbst in dieser Beziehung ausüben können. Das dritte Gas dagegen, der

Wasserdampf, ist compressibel, und wird eine bestimmte Menge desselben, die unter einem bestimmten Druck der übrigen Atmosphäre, sowie ihrem eigenen Drucke und bei einer bestimmten Temperatur noch als Gas existiren kann, bei der Abnahme der Temperatur oder bei Zunahme des Drucks, oder unter beiden Einflüssen zugleich theilweise in Wasser übergeführt.

Dieses eigenthümliche Gasgemenge muss nach oben hin allmälig dünner werden, woraus folgt, dass das Licht, wenn es aus dem Weltraum an der Grenze der Atmosphäre anlangt und weiter zur Erde hin lauft, factisch von da an in einer Curve sich bewegt, die ihre Convexität nach aussen kehrt und deren Form der Hauptsache nach abhängt von der Stellung des betreffenden Himmelskörpers, da ein im Zenith stehender Körper sein Licht ohne irgend welche Ablenkung durch die Atmosphäre zum Auge sendet, während andererseits die Refraction in der Nähe des Horizonts so bedeutend wirkt, dass das Licht in der Atmosphäre geradezu eine totale Reflexion erleidet und in Folge hiervon ein Himmelskörper schon messbare Zeit unter den Horizont gegangen sein kann, ohne dem beobachtenden Auge zu verschwinden. Die Hauptunterschiede der Refraction werden demnach herrühren von einer Grösse, die die Stellung des Himmelskörpers über dem Horizont bezeichnet, entweder von einem Winkel h gleich der Höhe des Gestirns über dem Horizont, oder dem Winkel z gleich der Zenith distanz d. h. dem Winkel der h zu 90^0 ergänzt. Mit z wird die Refraction wachsen, während sie umgekehrt mit h abnimmt.

Ausser diesem Elemente der Höhe h oder der Zenithdistanz z werden auch alle Factoren, welche eine Veränderung der Dichtigkeit der Atmosphäre zur Folge haben können, einen Einfluss auf die Ablenkung des Lichts äussern. Die Dichtigkeit einer Gasmasse hängt aber zunächst nach dem Mariotte'schen Gesetze vom Druck ab unter dem sie steht, und nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze von der Temperatur. Demnach werden Barometerstand und Temperatur als weitere Elemente auftreten. Weiterhin wäre die Feuchtigkeit der Luft zu beachten und könnte erwartet werden, dass wenn zur Berechnung der Refraction die Kenntniss des Barometer- und Thermometerstandes nöthig ist, man auch noch genöthigt sei: das Hygrometer zu beobachten. Es hat jedoch Laplace zuerst darauf hingewiesen, dass der Einfluss der Feuchtigkeit so unbedeutend ist, dass er vernachlässigt werden kann.

Man spricht nun von einer

„mittleren Refraction"

und einer

„wahren Refraction."

Sehen wir zu, worin der Unterschied beider besteht. Es ist soeben bemerkt worden, dass ausser der Zenithdistanz auch noch der Barometer- und Thermometerstand einen Einfluss auf die Refraction ausüben. Diese letzteren beiden Einflüsse ändern sich innerhalb gewisser Grenzen und kann man einen Barometerstand und Thermometerstand als mittleren annehmen und voraussetzen, die Atmosphäre zeige stets die Verhältnisse wie sie einem solchen mittleren Stande der beiden Instrumente entsprechen, wonach dann die Refraction nur noch von der Zenithdistanz abhängt. Bessel hat, gestützt auf die Beobachtungen Bradley's als mittlere Temperatur 50⁰ Fahrenheit = 8⁰ Réaumur = 10⁰ Celsius und als mittleren Barometerstand 29',6 engl. Zoll = 27'' 9''',3 par. Zoll und Linien = 751,8 Millim. angenommen. Die astronomische Strahlenbrechung, wie sie diesen Constanten gemäss ausfällt, pflegt man nun die „mittlere" zu nennen, und ist dieselbe nach Bessel durch eine Reihe darstellbar, in welcher als variabele Grösse nur die „scheinbare" Zenithdistanz vorkommt, d. h. der Winkel z', unter welchem der Gegenstand bei der Beobachtung wirklich gesehen wird, und welchen man im Gegensatz zur „wahren" Zenithdistanz auffasst, welche letztere der Winkel z ist, unter welchem ein Gegenstand erscheinen müsste, wenn die Atmosphäre keine Strahlenbrechung veranlasste. Was wir suchen ist also die Grösse $z - z' = \varrho$, die nun dargestellt wird durch die Reihe:

$$\varrho = P\left[e^{-Q}.\Psi(1) + 2^{\frac{1}{2}}.e^{-2Q}.Q.\Psi(2) + \right.$$
$$\left. + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1.2}.e^{-3Q}.Q^2.\Psi(3) + \ldots\right] \quad \text{(A)}$$

und bedeutet in dieser Gleichung

I) $P = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}$ eine Constante, indem α und β selbst constante Grössen sind. Es ist nämlich

1, α eine Grösse, die sich berechnen lässt nach der Formel

$$\alpha = 206265'' \frac{\mu^2 - 1}{2\mu^2},$$

wenn μ den Brechungsexponenten für den Uebergang von der Luftleere in Luft von 50⁰ F. und unter dem Drucke von 29'',6 engl. bedeutet. Bessel fand diese Constante

$$\alpha = 57'',538.$$

2, β eine Grösse, die sich berechnen lässt nach der Formel

$$\beta = a\frac{g-l}{gl},$$

wenn

a = 3269805 Toisen = dem Erdradius für Greenwich

g eine Constante = 116865,8 Toisen

l = 4226,05 Toisen die Höhe der Atmosphäre bei 50° F. vorstellt, vorausgesetzt, dass dieselbe von oben nach unten durchweg in gleicher Dichtigkeit angenommen wird,

so dass nun

$$\beta = 3269805 \frac{116865,8 - 4226,05}{116865,8 \,.\, 4226,05} = 745,747$$

ist, demgemäss P berechnet werden kann.

Es bedeutet ferner in Gleichung (A)

II) Die Grösse e die Basis der natürlichen Logarithmen gleich 2,718282.

III) Q eine Grösse $\frac{\alpha\beta}{sin^2 z'}$, wenn α und β die oben bezeichneten Werthe besitzen.

IV) Die Grössen $\Psi(1)$, $\Psi(2)$ .... sind die Werthe bestimmter Integrale wofür der allgemeine Ausdruck

$$e^{\frac{\beta . n}{2} cotg^2 z'} \int_{t = \sqrt{\frac{\beta . n}{2}} cotg\, z'}^{t = \infty} e^{-tt} dt$$

lautet.

Die Auffindung des Werthes von diesem Integral gelingt nicht auf einfachem Wege und sind desshalb von Bessel Tafeln aufgestellt worden, in welche man mit dem Argumente $T = \sqrt{\frac{\beta . n}{2}} cotg\ z'$ eingeht um den Logarithmus von $e^{TT} \int_T^\infty e^{-tt} dt$ zu finden.

Hat man diesen Werth so ist die Auffindung des Endwerthes von ϱ möglich. Man findet diese Integraltafeln in der Besselschen Schrift: „Fundamenta astronomiae pro anno MDCCLV etc. Regiomonti 1818.“ S. 36 und 37. Ferner auch in der Schrift von Bruhns: „Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung. Leipzig, Voigt und Günther 1861“, S. 112 und 113. Die Entwickelungen bezüglich des Integrals $\Psi(n)$ findet man einmal in der eben genannten Schrift von Bessel, dann in der genannten Arbeit von Bruhns S. 103 etc., sowie auch in Brünnow's sphärischer Astronomie 3. Aufl. S. 32 etc.

Für diese mittlere Refraction kann man aber auch setzen

$$\varrho = a \,.\, tang\, z' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A_*)$$

worin also a ein Factor ist, der von der Zenithdistanz z' abhängt. Für die Berechnung von ϱ ist hiernach die Kenntniss von a oder $log\, a$ nothwendig und sind zu dem Ende Tafeln entworfen worden, worin man mit dem Argumente der Zenithdistanz z' eingehend den $log\, a$ findet; dieser dann zu $log\ tang\, z'$ hinzugelegt giebt den Logarithmus der mittleren Refraction. Auch für diese letztere unmittelbar hat man mit dem Argument z' oder h' Tafeln entworfen und haben wir diese am Ende dieser Schrift als Taf. V. (A) mitgetheilt zugleich so, dass man in der ersten und zweiten Columne das Argument z' und h', in der dritten $log\, a$, in der vierten $log\ tang\, z'$ und in der fünften den Werth von $a . tang\, z'$ oder ϱ selbst findet.

§. 29. Da aber die Lufttemperatur und der Barometerstand von den obigen mittleren Normalwerthen 50° F. und 29″,6 engl. nach der einen und der andern Seite hin im allgemeinen abweichen, so musste die Formel (A) durch eine andere und genauere ersetzt werden, für welche jene Beschränkung nicht gilt: eine Formel für die sogenannte „wahre“ Refraction. Auch dieser Gegenstand ist von Bessel einer Untersuchung unterworfen worden, aus der die folgende Formel für die wahre Refraction, die wir mit r bezeichnen wollen, hervorgieng:

$$r = \varrho . \beta^A . \gamma^\lambda$$

oder bei der logarithmischen Rechnung:

$$log\, r = log\, \varrho + A . log\, \beta + \lambda . log\, \gamma$$

oder mit Rücksicht darauf, dass nach Gleichung (A_*) $log\, \varrho = log\, a + log\ tang\, z'$ auch

$$log\, r = log\, a + log\ tang\, z' + A . log\, \beta + \gamma . log\, \gamma \ . \ . \ (B)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass an die bisherige mittlere Refraction ϱ zwei Corrections-Factoren β^A und γ^λ angebracht werden müssen um die wahre zu erhalten, und wobei zunächst $\beta = \frac{b_t}{B_{50}}$ den Quotienten aus dem unmittelbar abgelesenen Barometerstand b, wenn die Temperatur des Quecksilbers vom Barometer also die Temperatur des sogenannten „inneren“ Thermometers t Grad anzeigt, und dem mittleren Barometerstand B_{50} von 29,6 engl. Zoll bei der Temperatur 50° F. bedeutet.

Es sind überhaupt drei Barometerscalen und drei Thermometer in Gebrauch:

die englische Zollscala und das Thermometer nach Fahrenheit
„ pariser „ „ „ „ „ „ Réaumur
„ Millimeterscala „ „ „ „ Celsius

und sind für diese drei Scalen und Thermometer zur Berechnung des wirklichen Werths von β auch drei Tafeln von Bessel berechnet worden.

Bevor wir weiter gehen, muss jedoch erwähnt werden, dass Bessel, als er die theoretisch berechneten Werthe von r mit den aus Beobachtungen gefundenen verglich, fand *) dass erstere mit 1,003282 zu multipliciren seien, welches damit identisch war, dass anstatt $B_{50} = 29'',6$ engl. = 333,28 par. Lin. ein $B_{50} = 29'',644 = 333,78$ par. Lin. angenommen werden musste. Unser β soll nun gleich $\frac{b_t}{B_{50}}$ oder wenn wir anstatt B_{50} lieber B_n setzen, um anzudeuten, dass B_n der Normalbarometerstand bei 50° F. sein solle, gleich $\frac{b_t}{B_n}$ sein. Zwei Barometerstände b_t und B_n sind aber nur dann vergleichbar und dürfen in ein Verhältniss gesetzt werden, wenn zweierlei Bedingungen erfüllt sind, nämlich wenn sie erstens beide auf dieselbe Temperatur reducirt und zweitens wenn sie beide dann als mit Normalmassstäben gemessen zu betrachten sind, wozu nicht blos gehört, dass die Maassstäbe dieselbe Eintheilungsart haben, sondern auch dass beim Messen mit ihnen diejenige Temperatur stattfand, bei welcher der Normalmassstab als solcher angenommen wurde. Als Normaltemperatur für das Quecksilber gilt demnach $n = 50^0$ F $= 8^0$ R. $= 10^0$ C.

Setzen wir als Längeneinheit die pariser Linie fest und ist b sowohl wie B in pariser Linien angegeben, so braucht b nicht erst umgesetzt zu werden; wurde aber b in engl. Zoll oder Millim. abgelesen, B dagegen in pariser Linien, so muss diese Umwandlung geschehen. Es sind 12 engl. Zoll = 135,1142 pariser Linien **), mithin wenn b in englischen Zollen abgelesen wurde, was wir mit $b^{(e)}$ anzeigen wollen, das b in pariser Linien gleich $b^{(e)} \frac{135,1142}{12}$. Ebenso ist, wenn b in Millimeter abgelesen wurde, was wir mit $b^{(m)}$ bezeichnen wollen und man dieses in Linien umsetzen will, b gleich $b^{(m)} \frac{443,296}{1000}$ da ***) 1 Meter = 1000 Mm. gleich 443,296 par. Linien ist. Wird b in par. Linien abgelesen, so bezeichnen wir dies mit $b^{(l)}$ und ist, soweit wir die Sache jetzt verfolgt haben, bei den drei Barometerscalen:

$$\beta = \frac{b^{(l)}}{333,78} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\beta = \frac{b^{(e)}\frac{135,1142}{12}}{333,78} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

*) Tabulae Regiomontanae etc. S. LXI u. f.

**) Schumacher, Hilfstafeln S. 171.

***) Ebendas. S. 173.

$$\beta = \frac{b^{(m)}\,\frac{443,296}{1000}}{333,78} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Zähler und Nenner dieser drei Brüche sind nun pariser Linien, während aber 333,78 ein für allemal bei $n = 50^0$ F $= 8^0$ R $= 10^0$ C gedacht wird, sind die Barometerstände des Zählers im Allgemeinen bei einer andern Temperatur t^0 abgelesen. Ist aber die abgelesene Temperatur bei $b^{(l)}$ gleich t^0 R und soll $b^{(l)}$ in einen Barometerstand für $n = 8^0$ R verwandelt werden, so bestehen bekanntermassen, wenn wir mit $q = 0,01802$ den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers vom Gefrierpunkt des Wassers bis zum Siedepunkt gerechnet und mit $b_o^{(l)}$, $b_t^{(l)}$ und $b_n^{(l)}$ den Barometerstand bei 0^0, t^0 und 8^0 R bezeichnen die Gleichungen:

$$b_t^{(l)} = b_o^{(l)}\left(1 + \frac{t\,.\,q}{80}\right)$$

$$b_n^{(l)} = b_o^{(l)}\left(1 + \frac{8\,.\,q}{80}\right).$$

Mithin ist das statt $b_t^{(l)}$ gesuchte und dem B_n entsprechend bezeichnete $b_n^{(l)}$ gegeben durch

$$b_n^{(l)} = b_t^{(l)}\,.\,\frac{1 + \frac{8\,.\,q}{80}}{1 + \frac{t\,.\,q}{80}} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Für das Fahrenheitsche Thermometer gelten ganz ebenso die Gleichungen

$$b_t^{(e)} = b_o^{(e)}\left(1 + \frac{(t - 32)\,.\,q}{180}\right)$$

$$b_n^{(e)} = b_o^{(e)}\left(1 + \frac{(50 - 32)\,.\,q}{180}\right)$$

und ist mithin

$$b_n^{(e)} = b_t^{(e)}\,\frac{1 + \frac{(50 - 32)\,.\,q}{180}}{1 + \frac{(t - 32)\,.\,q}{180}} \quad \ldots \quad (e)$$

Ebenso ist für das Celsiussche Thermometer

$$b_t^{(m)} = b_o^{(m)}\left(1 + \frac{t\,.\,q}{100}\right)$$

$$b_n^{(m)} = b_o^{(m)}\left(1 + \frac{10\,.\,q}{100}\right)$$

mithin

$$b_n^{(m)} = b_t^{(m)}\,\frac{1 + \frac{10\,.\,q}{100}}{1 + \frac{t\,.\,q}{100}} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

so dass also die in an b stehenden Coefficienten der Gl. (d), (e) und (f) Correctionsfactoren vorstellen, die an $b^{(t)}$, $b^{(e)}$ und $b^{(m)}$ in (a), (b) und (c) anzubringen sind und wären im Quotienten β hiernach im Zähler und Nenner gleiche Normaltemperaturen n hergestellt. Im Allgemeinen aber wird

$b^{(t)}$ gemessen mit einem pariser Linien-Massstab von t^0 R. Temperatur
$b^{(e)}$ " " " englischen Zollmassstab " t^0 F. "
$b^{(m)}$ " " " Millimetermassstab " t^0 C. "

wobei t als übereinstimmend mit dem bisherigen t angesehen werden darf; ferner war (bei Bessel) die Länge 333,'''78 mit einem pariser Fussmassstab von 8° Reaumur gemessen; die Normaltemperatur des pariser Fussmassstabes ist aber nicht 8° Reaumur sondern 13°; ebenso ist die des englischen Fusses nicht 50° F sondern 62° und die des Millimetermasses nicht 10° C sondern 0°. Die Längen 333,78; $b^{(t)}$, $b^{(e)}$, $b^{(m)}$ sind also streng genommen gar keine pariser Linien, englische Zolle oder Millimeter, sondern sie werden es erst durch eine Reduction. Bezeichnen wir zu dem Ende die Länge eines pariser Linienmassstabs bei 0° mit L_0 bei t^0 mit L_t bei 8° mit L_8 bei der Normaltemperatur 13° mit L_{13}, so ist wenn s noch den Ausdehnungscoefficienten des Massstabes aus Messing gearbeitet bedeutet, der für eine Erwärmung vom Gefrier- bis zum Siedepunkt des Wassers den Werth $s = 0{,}00188$ besitzt:

$$\left.\begin{aligned} L_t &= L_0\left(1+\frac{t.s}{80}\right)\\ L_8 &= L_0\left(1+\frac{8s}{80}\right)\\ L_{13} &= L_0\left(1+\frac{13s}{80}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Ebenso, wenn wir dieselben Buchstaben L für Längen des englischen Zollmassstabes wählen:

$$\left.\begin{aligned} L_t &= L_0\left(1+\frac{(t-32)s}{180}\right)\\ L_{50} &= L_0\left(1+\frac{(50-32)s}{180}\right)\\ L_{62} &= L_0\left(1+\frac{(62-32)s}{180}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (h)$$

und ebenso beim Millimetermassstab

$$\left.\begin{aligned} L_t &= L_0\left(1+\frac{t.s}{100}\right)\\ L_{10} &= L_0\left(1+\frac{10s}{100}\right)\\ L_0 &= L_0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Hiernach muss also in den Gleichungen (a), (b) und (c) der Werth $333,'''78$ in $333,'''78 \frac{L_8}{L_{13}}$ d. h. in

$$333,'''78 \frac{1+\frac{8s}{80}}{1+\frac{13s}{80}}$$

ferner $b^{(l)}$ in $b^{(l)} \frac{L_t}{L_{13}}$ d. h. in

$$b^{(l)} \frac{1+\frac{t.s}{80}}{1+\frac{13s}{80}}$$

ebenso $b^{(e)}$ in $b^{(e)} \frac{L_t}{L_{62}}$; $b^{(m)}$ in $b^{(m)} \frac{L_t}{L_0}$ d. h. in

$$b^{(e)} \frac{1+\frac{(t-32)s}{180}}{1+\frac{(62-32)s}{180}}$$

und

$$b^{(m)} \frac{1+\frac{t.s}{100}}{1}$$

übergehen.

Unsere Gleichungen (a) (b) (c) werden demnach schliesslich wenn wir gleich die Ausdrücke etwas reduciren und so ordnen, dass die Grössen mit t und ebenso die mit s und q im Zähler und Nenner zusammen stehen, zu folgenden:

$$\beta = \frac{b^{(l)}}{333,78} \left(\frac{80+t.s}{80+t.q}\right) \left(\frac{80+8q}{80+8s}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_*)$$

$$\beta = b^{(e)} \frac{\frac{135,1142}{12}}{333,78} \left[\frac{180+(t-32)s}{180+(t-32)q}\right] \left(\frac{80+13s}{80+8s} \cdot \frac{180+18q}{180+30s}\right) \quad .\ . \ (b_*)$$

$$\beta = \frac{b^{(m)} \frac{443,296}{1000}}{333,78} \left[\frac{100+t.s}{100+t.q}\right] \left(\frac{80+13s}{80+8s} \cdot \frac{100+10q}{100}\right) \quad .\ . \ (c_*)$$

Man erkennt, dass in diesen Gleichungen rechts zwei verschiedene Factoren vorkommen: ein constanter Factor in der runden und ein von t abhängiger variabler Factor in der eckigen Klammer. Nehmen wir zu ersterem noch den Zahlencoafficienten hinzu und bezeichnen dann diesen constanten Factor mit C, den variabelen mit T, so ist

$$\beta = b\,.\,C\,.\,T;$$

da hierin aber b unmittelbar durch die Beobachtung geliefert wird, so ist auch $b\,.\,C$ ohne Weiteres bekannt und ist schliesslich, wenn wir

$$b\,.\,C = B$$

setzen:

$$\beta = B\,.\,T$$

mithin

$$\log\beta = \log B + \log T \quad \ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

Mit Rücksicht auf die Werthe q und s ergiebt die Ausrechnung für C

$$\left.\begin{aligned} \log C^{(l)} &= 0{,}47724 - 3 \\ \log C^{(e)} &= 0{,}52875 - 2 \\ \log C^{(m)} &= 0{,}12407 - 3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

und begreift man nun leicht, wie man für die rasche Auffindung von $\log B$ wieder eine Taf. V. (B) entwerfen kann, deren erste Columne das Argument b und deren zweite den $\log B$ enthält so dass $\log B$ gleich der Summe: Logarithmus des gegebenen Barometerstands + $\log C$ ist. So z. B. ist für $b = 759^{(m)}$ $\log b = 2{,}88024$

$$\begin{aligned} \log C^{(m)} &= -\,2{,}87593 \\ \hline \log B &= 0{,}00431 \end{aligned}$$

gleich dem, was man direct aus Taf. V (A) für $b = 759^{(m)}$ abliest.

Die Grössen T lassen sich ebenfalls, wenn die Temperatur t des betreffenden Thermometers gegeben ist, berechnen. Für $t = +\ 20$ C hat man z. B. $T = \dfrac{100 + 20s}{100 + 20q}$; und $\log T = \log \dfrac{100{,}0376}{100{,}3604} = -\,0{,}00140$. Um aber diese T sofort ohne jede Rechnung zu finden, benutzt man eine berechnete Taf. V. (C), in welcher neben dem Argumente t als der Temperatur des Quecksilbers der $\log T$ zu finden ist. Sieht man diese Tabelle an, so wird man für $t = 20^0$ C unser $\log T = -\,0{,}00140$ finden.

Hiermit wäre die Grösse β gefunden oder vielmehr zunächst der $\log\beta$. Zur Berechnung von $A \log\beta$ brauchen wir aber noch A. Die Grösse A wie die Grösse λ hängt aber von der mittleren Refraction ϱ d. h. schliesslich von z' und dem Ausdehnungscoefficienten ε der Luft ab, und zwar so dass

$$A = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{db} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

$$\lambda = -\,\frac{1}{\varepsilon\,.\,\varrho}\frac{d\varrho}{dt_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

ist. Zur Berechnung von A und λ sind also die Differentialquotienten

$$\frac{d\varrho}{db} \text{ und } \frac{d\varrho}{dt_1}$$

nothwendig und ist mit ihrer Kenntniss*) A und λ ebenfalls gegeben.

---

*) Vergl. Bessel in den Fundamentis astronomicis S. 29 u. f., ferner Bruhns, Astronomische Strahlenbrechung S. 126 u. f.

Zur schnellen Auffindung von A und λ dienen uns wiederum Tafeln, wobei mit dem Argument z' eingegangen wird. Diese Tafeln, von uns als Taf. V. (D) gegeben, gehen bis 85° 0^m Zenithdistanz, indem man nämlich überhaupt an der Hand der Theorie nur bis zu dieser Entfernung von Zenith zu gehen wagte, weil die mit der Formel gefundenen Werthe von den wirklichen beobachteten Werthen von r verglichen zuviel abwichen. Es hat jedoch Argelander*) nach zahlreichen Beobachtungen noch Werthe der Refraction von 85° Zenithdistanz bis 89° 30′ erhalten, die Bessel in einem Supplementtäfelchen hinzugefügt und in welchem für das Argument z' der Logarithmus von ϱ nach Argelander und daneben die Werthe A und λ nach der Besselschen Theorie stehen.

Es bleibt jetzt zur vollständigen Berechnung von r nur noch γ übrig. Es ist aber γ**) ein Quotient zweier Dichtigkeiten, nämlich $\gamma = \frac{d_1}{d}$ wenn d die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur 48°,75, d_1 die Dichtigkeit der Luft bei einer Temperatur t_1 oder der Lufttemperatur wie sie gerade herrscht. Diese Temperatur t_1 wird in den Fällen, wo das Barometer im Freien hängt, mit t wohl einerlei, sonst aber meist davon verschieden sein. Setzen wir nach der Annahme Bessels den Ausdehnungscoefficienten der Luft ε gleich 0,36458 und bezeichnen die Dichtigkeit bei 32° F bzw. 0° R und 0° C mit d_0, so ist:

$$d = d_0 : \left(1 + \frac{(48{,}75 - 32)0{,}36438}{180}\right)$$

$$d_1 = d_0 : \left(1 + \frac{(t_1 - 32)0{,}36438}{180}\right)$$

mithin fürs Fahrenheitsche Thermometer:

$$\gamma = \frac{180 + 16{,}75 \,.\, 0{,}36438}{180 + (t_1 - 32)0{,}36438} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (o)$$

---

*) Tabulae Regiom. Seite LXII. u. S. 539.

**) Tabulae Regiom. Seite LXI.

***) Anfangs hatte Bessel anstatt 48°,75 F gerade 50° angenommen; es zeigte sich jedoch, dass der Nullpunkt des Thermometers, der bei den Beobachtungen Bradley's benutzt wurde, und welche Beobachtungen den Besselschen Untersuchungen zu Grunde lagen, wo 1°,25 F zu corrigiren war. Da dies Thermometer die Temperatur der Luft maass, so muss jetzt, da γ von der Lufttemperatur abhängt, diese Correction beachtet werden. Für die Berechnung von β aber ist eine Correctur nicht nöthig, denn der Quotient $\beta = \frac{b}{B}$ ist von der äusseren Lufttemperatur unabhängig, indem die bei ihm in Betracht kommende Temperatur die des Quecksilbers oder die sogenannte innere ist und wir hierbei eine beliebige Normaltemperatur — nach Bessel 50° F — annehmen dürfen.

Bezeichnet t_1 dagegen die Grade nach Réaumur, die in Fahrenheit verwandelt $\frac{9}{4}$ geben, so ist

$$\gamma = \frac{180 + 16{,}75 \,.\, 0{,}36438}{180 + \frac{9}{4}t_1 \,.\, 0{,}36438} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (p)$$

und nach Celsiusschen Graden

$$\gamma = \frac{180 + 16{,}75 \,.\, 0{,}3643}{180 + \frac{9}{5}t_1 \,.\, 0{,}36438} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (q)$$

Mit dem Argumente t_1 der Temperatur des „äusseren" Thermometers findet man wiederum mit Hilfe der Tafel V. (E) den $log\,\gamma$ und hiermit ist für die numerische Auffindung von r Alles gegeben.

Berechnen wir nun ein

Beispiel. Es sei beobachtet $b^{(t)} = 331''',6$; $t = t_1 = 18^0$ R.; gesucht sowohl ϱ wie r für eine Zenithdistanz gleich $75^0\ 30'$.

Nach Tafel V (A) ist ϱ unmittelbar abzulesen für 76^0 gleich $3'\ 47'',4$
„ 75 „ 3 32 ,1

mithin für $75^0\ 30'$ gleich $3'\ 39'',75$.

Dieselbe hätte auch gemäss der Gleichung (A_*) berechnet werden können.

Nach Taf. V (A) ist $log\ tang\, z' = 0{,}58734$
$log\ tang\, a = 1{,}75408$
$log\ \varrho = 2{,}34142$
$\varrho = 219'',49 = \mathbf{3'\ 39'',49}$.

Für die Berechnung von r haben wir aber weiter:

$log\,B = -0{,}00214$		$log\,\varrho =$	$2{,}34142$
$log\,T = -0{,}00157$		$A\,.\,log\,\beta =$	$-0{,}00371$
$log\,\beta = -0{,}00371$		$\lambda\,.\,log\,\gamma =$	$-0{,}02015$
$A = 1{,}0000$		$log\,r =$	$2{,}31756$
$\lambda = 1{,}02080$			
$log\,\gamma = -0{,}01974$			

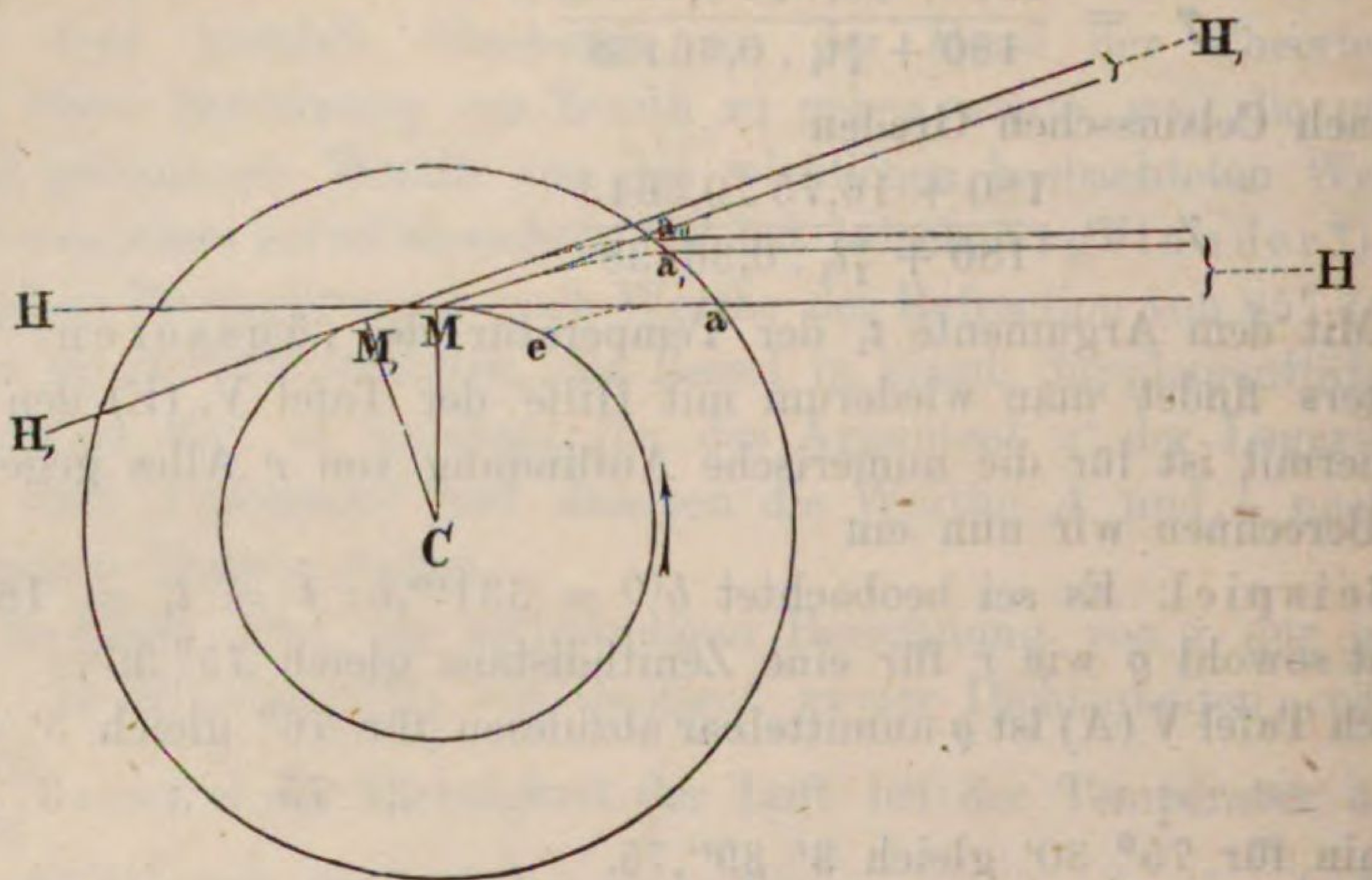
mithin $r = \mathbf{3'\ 27'',7}$ und die Differenz $\varrho - r = 11'',8$.

§. 30. Man kann insbesondere noch nach dem Einflusse fragen, den die Refraction beim Auf- und Untergang der Gestirne ausübt und der wie leicht zu erkennen für ersteren eine Beschleunigung für letzteren eine Verzögerung zur Folge hat.

Wenn die Atmosphäre nicht vorhanden wäre, so würde ein Gestirn in dem Maasse verschwinden, als es mit seinen Theilen unter die Ebene des Horizonts sinkt. Der Mond und die Sonne würden also völlig verschwunden sein, im Momente wo der obere Rand den Horizont zu berühren aufhört. Ein Fixstern würde momentan verschwinden. Stellt demnach in Figur 37 der innere Kreis den Aequator, M den Ort eines Auges, C die zum Punkte verkürzte Erdaxe, MH den

Horizont des Beobachters vor, so würde z. B. ein Fixstern, der eben untergehen will, ein Strahlenbündel in der Richtung HM nach M

Figur 37.



senden. Dieses Strahlenbündel kann aber der Brechung in der Atmosphäre wegen nicht nach M gelangen, sondern lauft auf einem krummen Wege von a etwa nach e. Es folgt daraus, dass sämmtliche Strahlen, die unterhalb des Horizonts MH ihre Richtung nach der Erde nehmen, nicht ins Auge des Beobachters gelangen können. Dagegen wird ein Strahl Ha, der oberhalb des Horizonts parallel Ha bei a, auf die Atmosphäre trifft, seinen Lauf nach M nehmen können. Da aber dieser Strahl in einem Bogen nach M gelangt, so wird ein Auge daselbst den Fixstern in der Richtung der Geraden $MH_,$ zu sehen glauben, welche in M jenen Bogen der Lichtcurve berührt, d. h. um den Winkel

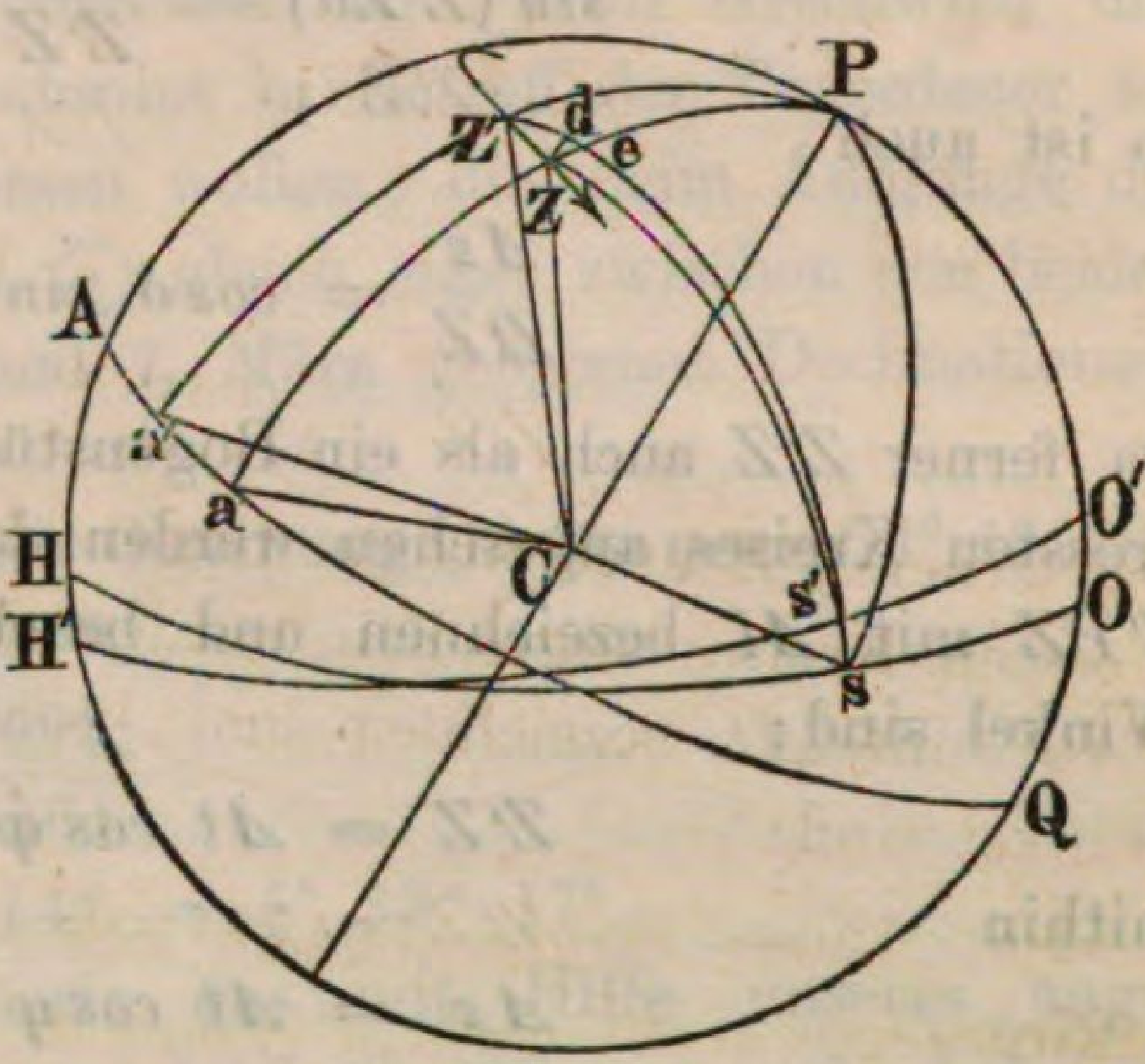
$$r = H_, MH$$

zu hoch. Damit nun dieser in $H_,$ erscheinende in Wirklichkeit aber in H stehende Stern untergehe, muss sich der Beobachter M mit seinem Horizont HH so lange in der Richtung des beigesetzten Pfeils drehen, bis er zu einem Punkt $M_,$ gelangt, der von einem Lichtstrahl $Ha_{,,}$ erreicht wird so, dass dessen Bogen bei $M_,$ die Oberfläche der Kugel tangirt, also in $M_,$ mit dem Horizonte $H_, M_,$ zusammenfällt und dessen Richtung ohne Zweifel sehr nahe parallel ist mit der Linie $H_, M$. Dieser Drehungswinkel $M_, CM$ ist nichts anderes als unser r und wird in diesem Falle die Refraction mit dem Namen „Horizontalrefraction“ bezeichnet und beträgt $34' \, 54'' = 2094''$. Da wir annehmen, der Stern sowohl wie der Beobachter stände im Aequator, so ist dieser Winkel in Zeit verwandelt abgerundet

$$\Delta t = \frac{2094^s}{15} = 140^s$$

Der Fall, den wir betrachteten, ist ein singulärer: indem er voraussetzt, dass die Polhöhe des Beobachters und ebenso die Declination des Sterns gleich Null sei. Für die allgemeine Lösung des Problems werden wir daher eine beliebige Polhöhe φ wie eine beliebige Declination δ voraussetzen müssen und ist für das weitere Verständniss die Figur 38 entworfen worden, die den wirklichen Zusammenhang für den **Aufgang** eines Fixsterns darstellt und wobei natürlich anstatt einer Verspätung eine Verfrühung eintritt. Die betreffende Figur stellt in CP die Erdaxe, in AQ den Aequator, in Z den Ort eines Bewohners vor, so dass $PZ = z =$ Zenithdistanz $= 90^0$ — Polhöhe $= 90^0 - Za = 91^0 - \varphi$ ist; ferner bedeutet Cs die Richtung nach einem Fixstern, der falls Z in der Richtung des Pfeils weiter rotirt und HO den Horizont für Z vorstellt, im Begriffe stände aufzugehen, wenn nicht die Strahlenbrechung ihre Wirkung ausübte. Wirkt diese aber, so wird er schon in der Stellung Z, dem Beobachter, dessen Horizont dann eine von OH abweichende Lage $O'H'$ einnimmt, aufzugehen scheinen. Legen wir durch CZ und CZ' zwei grösste Kreise, die zugleich beide durch den Punkt s gehen, so werden diese den Horizont $H'O'$ in **zwei** Punkten durchschneiden, die jedoch so nahe bei einanderliegen, dass wir sie als in einem einzigen Punkte s' zusammenfallend betrachten können. Ohne Zweifel sind nun die Bogen Zs oder $Z's' = Z's - ss' = 90^0$ und ss' gleich der Veränderung der Zenithdistanz des Sterns, wenn der Beobachter statt in Z kurz vorher in Z' gedacht wird. Geht aber der Stern bei der Stellung des Beobachters in Z' auf, so ist ss, nichts anderes, als die im Bogen ausgedrückte Horizontalrefraction. Wir erhalten ihren Werth aber auch dann, wenn wir uns in s einen Zirkel eingesetzt denken und mit dem Bogen $sZ = 90^0$ einen Kreis schlagen, der in d den grössten Kreis $Z's$ schneidet und wobei $Z'd$ gleich r ist. Das Dreieck $Z'dZ$ ist jedoch so klein, dass es als ein ebenes angesehen werden kann; dasselbe gilt vom etwas grösseren Dreieck $Z'eZ$, wobei e den Durchschnittspunkt des Meridians Pa mit dem Vertical Zs bedeutet. In letzterem ist der Winkel bei Z gleich 90^0, in ersterem der bei d. Bezeichnen wir den Winkel ZPs mit t_0 im

Figur 38.



Moment, wo ohne Strahlenbrechung s aufgehen würde, so ist im Dreieck ZPs

$$\frac{\sin(ZPs)}{\sin t_0} = \frac{\sin(90^0 - \delta)}{\sin 90^0}.$$

Da aber PZs, wie man sofort erkennen wird, gleich $Z'Zd$ ist und im Dreieck $Z'Zd$

$$\sin(Z'Zd) = \frac{\Delta z}{Z'Z}$$

so ist auch

$$\frac{\Delta z}{Z'Z} = \cos\delta \ \sin t_0$$

Da ferner $Z'Z$ auch als ein Bogenstück eines durch Z' und Z gelegten grössten Kreises angesehen werden darf, so ist, wenn wir den Winkel $Z'PZ$ mit Δt bezeichnen und beachten, dass $Z'Z$ und Δt kleine Winkel sind:

$$Z'Z = \Delta t \cos\varphi,$$

mithin

$$\Delta z = \Delta t \cos\varphi \cos\delta \sin t_0,$$

und demgemäss

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Setzen wir hierin für Δz den Werth der Horizontalrefraction in Zeit ausgedrückt $= 140^s$, so ergiebt die Gleichung den gesuchten Werth von Δt oder die Verfrühung des Fixsternaufgangs, falls die Constanten δ, φ und t_0 eingesetzt werden. Der Winkel t_0 ist zwar selbst zunächst noch unbekannt, kann aber ohne Weiteres aus dem Dreieck: Pol, Stern, Zenith aus der Gleichung

$$\cos z = \sin\varphi . \sin\delta + \cos\varphi . \cos\delta . \cos t_0$$

berechnet werden, wenn man hierin $z = 90^0$ setzt, so dass

$$\cos t_0 = - \tan\varphi . \tan\delta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

$$\sin t_0 = \sqrt{1 - \tan^2\varphi . \tan^2\delta} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

und demgemäss:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\sqrt{\cos^2\varphi \ \cos^2\delta - \sin^2\varphi \ \sin^2\delta}} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}} \quad (4)$$

wird. Diese Gleichung setzt aber nothwendig voraus, dass man δ und φ kennt und dass δ wenigstens um die Zeit, in der der Auf- bzw. Untergang sich vollzieht, als unveränderlich angenommen werden darf. Dies wird bei den Fixsternen unbedingt geschehen dürfen, und auch bei der Sonne können wir die Aenderung des δ innerhalb der betreffenden Zeit Δt als verschwindend klein ansehen.

Aufgabe. Es soll die Zeit des Aufgangs der Sonne am 7. März 1870 für Marburg gefunden und weiter berechnet werden, um wie viel die Refraction diesen Aufgang früher eintreten lässt.

Auflösung. Nach dem N. A. ist Diff.

Greenwich 6. März 1870 Decl. ⊙ $= -5^0\ 37'\ 19''$ $+ 23'\ 17''$
" 7. " " " $= -5\ \ 14\ \ 2$

Der Moment des ⊙ Aufgangs für Marburg liegt ohne Zweifel zwischen diesen beiden Culminationszeiten der ⊙ für Greenwich und können wir vorläufig, wenn wir absolut in Betreff der Tagesdauer am 7. März im voraus Nichts annehmen wollen, die beim Aufgange der ⊙ für Marburg stattfindende Decl. ⊙ gleich einer zwischen den beiden gegebenen Declinationen des 6. und 7. März gelegenen Declinationen, z. B. gleich $\delta = -5^0\ 25'$
setzen und erhalten demgemäss nach Gleichung (2) für $\varphi = 50^0\ 48'\ 47''$

$$\begin{aligned} log\,(-tang\,\varphi) &= 0{,}08873_n \\ log\,tang\,\delta &= 8{,}97691_n \\ \hline log\,cos\,t_0 &= 9{,}06564 \end{aligned}$$

$$t_0 = 83^0\ 19'\ 14'' = 5^h\ 33^m\ 17^s.$$

In runder Zahl nehmen wir das mit Hilfe unseres angenommenen δ vorläufig gefundene t_0 gleich $5^h\ 33'$ an, und sind nun in der Lage, ein neues δ zu berechnen, das der hier zu lösenden Aufgabe schon völlig genügt. Da nämlich die stündliche Declinationsänderung vom $\frac{6}{7}$. März gleich $58'',24$ ist, so beträgt die wegen des Längenunterschieds für Marburg zu berechnende Declinationscorrection

$$\frac{58{,}24\,.\,3215}{3600} = 52'',0$$

d. h. es ist für Marburg 7. März Decl. ⊙ $= -5^0\ 14'\ 2'' - 52'',0$
$= -5^0\ 14'\ 54''$

Da weiterhin $t_0 = 5^h\ 33^m$, so ist die hierfür zu berechnende Declinationscorrection gleich

$$\frac{58{,}24\,.\,5^h\ 33^m}{3600^s} = \frac{58{,}24\,.\,19980}{3600} = 323'',5$$

Demnach ist unser neues

$$\delta = -5^0\ 14'\ 54'' - 5'\ 23'',5 = -5^0\ 20'\ 17'',5$$

ferner

$$\begin{aligned} log\,(-tang\,\varphi) &= 0{,}08873_n \\ log\,tang\,\delta &= 8{,}97053_n \\ \hline log\,cos\,t_0 &= 9{,}05926 \end{aligned}$$

und demgemäss

$$t_0 = 83^0\ 25'\ 6'' = 5^h\ 33^m\ 40^s$$

der genaue Werth des zu suchenden Stundenwinkels. Zur Berechnung von $\varDelta t$ haben wir aber weiter gemäss der Gleichung (1)

$$\begin{aligned} log\ cos\varphi &= 9{,}80062 \\ log\ cos\ \delta &= 9{,}99811 \\ log\ sin\,t_0 &= \underline{9{,}99713} \\ & \ 9{,}79586 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} log\,\Delta z &= 2{,}14613 \\ & \ \underline{9{,}79586} \\ & \ 2{,}35027 \end{aligned} \qquad \Delta t = 224{,}^s0$$

wonach das dem scheinbaren Aufgang entsprechende

$$t_0 + \Delta t = 5^h\,33^m\,40^s + 224^s = 5^h\,37^m\,24^s$$

ist, demgemäss nach wahrer Zeit gerechnet der Aufgang erfolgt, um

$$12^h - 5^h\,37^m\,24^s = 6^h\,22^m\,36^s.$$

Für die Fixsterne ist die Berechnung viel einfacher, da bei ihnen die Decl. den ganzen Tag über als constant angenommen werden darf und es nicht nöthig ist, erst einen besonderen Werth δ zu berechnen. Für den Mond muss die Rechnung wie bei der Sonne durchgeführt werden und muss bei ihm, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, auch auf die Parallaxe Rücksicht genommen werden.

Wiewohl im Vorausgehenden unter dem Texte bestimmte Originalarbeiten über Refraction schon angeführt worden sind, so möge hier doch noch im Besondern auf eine dieser Schriften hingewiesen werden. Wer sich über diesen Gegenstand gründlich unterrichten will, dem empfehlen wir die preisgekrönte Schrift von C. Bruhns, Director der Sternwarte in Leipzig, „die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung“, Leipzig, Voigt und Günther, 1861. In dieser Schrift findet der Leser zunächst eine Zusammenstellung der Originalarbeiten vom Alterthum an bis zur neuesten Zeit. Sodann folgt in einem ersten Abschnitte die Geschichte der Refraction bis zum Ende des 18. Jahrhunderts und in einem zweiten Abschnitte die Darstellung der Entwickelung dieser Lehren bis in die neueste Zeit. Insbesondere wird für den, der die Theorie vollständig kennen lernen will, der §. 2. des zweiten Abschnitts von Bedeutung sein, in welchem die Entwickelung der Differentialgleichung für die Refraction gegeben ist.

II. Aberration des Lichts.

§. 31. Die Aberration des Lichts wurde dadurch entdeckt, dass der englische Astronom Hooke und nach ihm Flamstead eine Parallaxe der Fixsterne auffinden wollte, deren Wesen wir in dem folgenden Kapitel kennen lernen werden. Die Anfangs nicht zum Ziele führenden Beobachtungen wurden am Ende des Jahres 1725 von Molyneux, einem reichen irländischen Privatmann, auf seiner Sternwarte zu Kew — einem westlich von London an der Themse gelegenen Orte — wieder aufgenommen, führten jedoch auch nicht zu dem Resultate, das man erwartet hatte. Trotzdem erregten sie die

Aufmerksamkeit Bradley's*), des grossen Astronomen des vorigen Jahrhunderts, der nun der eigentliche Entdecker der Aberration werden sollte.

Wenn wir eine Sternkarte des nördlichen Himmels ansehen, werden wir finden, dass der Pol der Ekliptik nahezu mit einem Sterne γ im Drachen zusammenfällt, welcher Stern zuerst eine Rolle bei der Beobachtungsreihe spielte. Fortgesetzte Beobachtungen hatten an diesem Sterne gelehrt, dass er

Anfangs März 1726 im Meridian um 20″ südlicher stand als im December 1725
" Juni " " " wieder wie Anfangs December 1725
" Septbr. " " " um 20″ nördlicher wie im Juni 1726
" Decbr. " " " wieder wie im December 1725,

dass er also im Ganzen innerhalb eines Jahres eine Verschiebung um 40″ von Süden nach Norden erhielt. Es war dies eine Veränderung in der Breite des Sterns: aber auch in der Länge desselben fanden sich periodisch wiederkehrende Veränderungen. Diese Beobachtungen auch bei anderen Sternen wiederholt ergaben: dass jeder Stern innerhalb eines Jahres eine Verschiebung bekommt und sich scheinbar in einer kleinen Ellipse bewegt, deren grosse Axe parallel der Ekliptik liegt und eine unveränderliche und für alle Fixsterne geltende scheinbare Winkelgrösse von 2 . 20″ = 40″ besitzt, deren kleine Axe aber, wenn man von Sternen in der Ekliptik gelegen mehr zu denen nach dem Pole der Ekliptik fortschreitet, mehr und mehr einen zwischen 0° und 2 . 20″ = 40″ gelegenen Winkelwerth erreicht, so dass demnach ein Stern in der Ekliptik eine gerade Linie von 40″ und ein Stern im Pol der Ekliptik einen Kreis mit dem Radius 20″ beschreibt. Da nun dies Factum feststand, gelang es Bradley, nachdem andere nahe liegende Gründe, wie z. B. die Parallaxenwirkung und das Wanken der Erdaxe, sich für die Erklärung des Phänomens nicht stichhaltig erwiesen hatten, den einzig richtigen Grund in der Bewegung des Lichts zu finden. Gerade zweiundfünfzig Jahre früher hatte Olaus Römer mit Hilfe der Jupiter-Trabanten

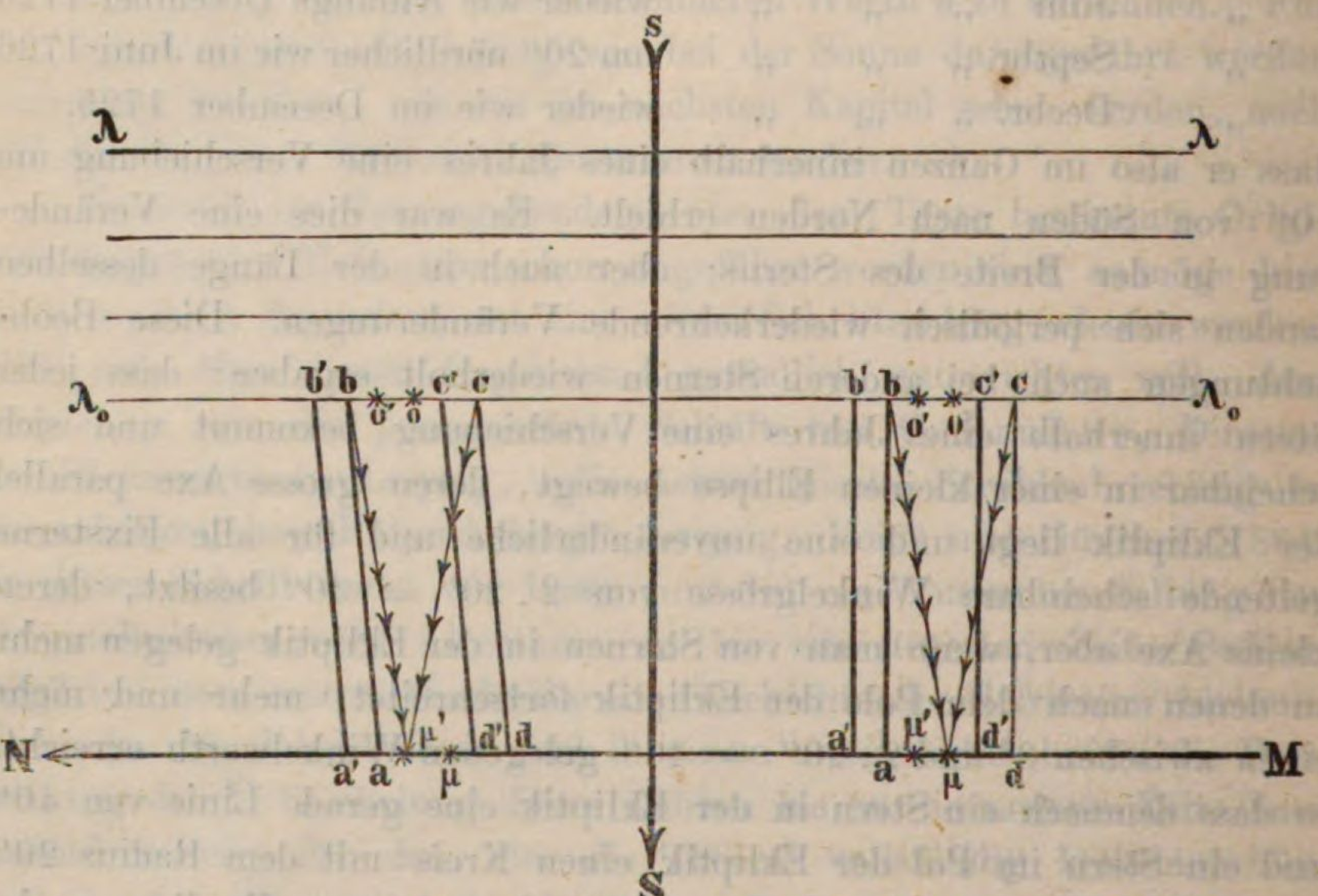
---

*) Bradley, James wurde 1692 zu Shireborn (Chloucester) geboren und widmete sich Anfangs der Theologie. Von einem Oheim in der Mathematik unterrichtet, gewann er Interesse an der Astronomie und machte hierin bald solche Fortschritte, dass er 1721 Professor der Astronomie an der Universität zu Oxford und zwanzig Jahre später Director der Sternwarte zu Greenwich wurde. Er starb 1762 und hinterliess ein Beobachtungsmaterial, aus dem ein grosser Theil der Daten gezogen wurden, die stets unsere Bewunderung erregen werden. Für uns ist er zunächst der Entdecker der Aberration, ebenso der Nutation, von welcher später die Rede sein wird.

die Geschwindigkeit des Lichts in der Secunde zu 42000 Meilen gefunden, welche Fortpflanzungsgeschwindigkeit Bradley mit der der Erde in ihrer Bahn verglich und so den wahren Grund der scheinbaren Verstellung der Fixsterne oder der Aberration des Lichts fand.

Um diesen Vorgang zu erklären, kann man zunächst folgende Betrachtung anstellen. Die Fixsterne stehen soweit von uns, dass wir die Strahlen von einem derselben nach der Erde hin stets als einander parallel ansehen können. Lassen wir die Pfeilrichtung sS in Fig. 39 diese Richtung andeuten und nehmen die Bewegung eines mit

Figur 39.



einem Fernrohr bewaffneten Beobachters senkrecht zu sS in der Richtung des Pfeils MN an, so würde dieser Beobachter, wenn er in Ruhe wäre, im Punkte μ das Fernrohr $abcd$ mit seiner optischen Axe μo parallel Ss nach s richten müssen, um den Fixstern s zu sehen. Von den Lichtwellen $\lambda\lambda$ ..... $\lambda_0\lambda_0$ würde in die Objectivlinse bc eine Strecke eintreten und nach den Gesetzen der Brechung im Brennpunkte μ zu einem Bilde vereinigt werden, d. h. der Beobachter würde, wenn wir in der Brennweite des Objectivs ein Fadenkreuz mit seinem in der optischen Axe gelegenen Kreuzungspunkt gespannt denken, das Bild des Sterns mit diesem Kreuzungspunkte coincidiren sehen.

Genau dasselbe würde der Beobachter wahrnehmen, wenn er sich senkrecht zu $\lambda_0\lambda_0$, d. h. parallel Ss nach s hin- oder von s wegbewegte. Anders aber wird die Sache, wenn sich der Beobachter mit dem Fernrohr, ohne dessen Lage zu ändern, senkrecht zu sS

in der Richtung MN fortbewegt. Nehmen wir an: er sei hierbei in der Zeit Δt von μ bis μ' gerückt und in derselben Zeit wäre auch die Wellenbewegung des Lichts vom Objectiv bis zur Brennebene fortgeschritten, so ist klar, dass letztere Bewegung ganz unabhängig von der des Fernrohrs erfolgt. Die Aetherwelle, die im Momente t_0, als die Axe des Fernrohrs die Lage μo einnahm, die Objectivlinse nach dem Innern des Fernrohrs hin verlässt, pflanzt sich im Aether fort, ohne dass sie an der Bewegung des Fernrohrs theilnimmt. Demnach giebt das Licht vor wie nach seine Anzeige in μ, während die Mitte des Fadenkreuzes bereits in μ' liegt: Das Bild des Sterns ist der Richtung der Bewegung entgegengesetzt, im Gesichtsfeld verschoben und begreift man, dass diese Verschiebung so lange eine bestimmte und unveränderliche ist, als in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, wie der des Beobachters und in der Lage des Fernrohrs keine Aenderung eintritt. Es fragt sich nur, ob die in Wirklichkeit auftretende Verschiebung wahrnehmbar, oder ob sie so klein ist, dass sie sich jeder Messung entzieht?

Angenommen das Rohr wäre 3 Fuss lang und die Länge einer Meile gleich 24000 Fuss, so beträgt die Zeit, die das Licht gebraucht, um die Länge des Rohrs zu durchlaufen

$$\Delta t = \frac{3}{24000 \,.\, 42000} \text{ Secunden,}$$

wenn die Geschwindigkeit des Lichts 42000 Meilen beträgt. Innerhalb dieser Zeit schreitet aber M fort um

$$4 \,.\, 24000 \, \frac{3}{24000 \,.\, 42000} \text{ Fuss,}$$

wenn wir die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn zu 4 Meilen rechnen. Diese letzte Anzahl Fusse in Linien verwandelt giebt aber:

$$\frac{4 \,.\, 3 \,.\, 12 \,.\, 12}{42000} = 0{,}041 \text{ Linien.}$$

Nehmen wir an, das Rohr besässe am Ocularende eine Loupe, die nur 10mal vergrösserte, so würde die Verschiebung scheinbar 0,41 Linien, also beinahe eine halbe Linie betragen, und leuchtet ein, wie in einem astronomischen Fernrohr die durch die Aberration hervorgerufene Verschiebung mit Leichtigkeit wahrgenommen werden kann. Um nun zu bewirken, dass der Stern wiederum mit μ zusammen erscheint, müsste man das Fernrohr so verstellen, dass sein Ocularende der Bewegung des Beobachters entgegengesetzt, also hier nach rechts sich bewegte. Unserer Figur nach bekommt es dann eine gegen die Richtung Ss geneigte Lage, die wir auf der linken Seite der Figur angedeutet haben und die gegen Ss so angenommen werden muss,

dass die optische Axe die Lage der Diagonale $\mu o'$ in dem Rechteck $o\mu\mu'o'$ — nicht weiter als Rechteck ausgezeichnet — des rechten Theils der Figur erhält. Denn bei dieser schiefen Lage des Fernrohrs und seiner optischen Axe wird ein Strahlenbündel, welches in derselben Richtung sS wie rechts aufs Objectiv trifft, nicht in der optischen Axe $o\mu$, sondern in der Axe $o\mu'$ des Strahlenbündels ein Bild entwerfen, das aber nun während der Bewegung des Fernrohrs immer mit der Mitte μ des Fadenkreuzes zusammenbleibt. Da wir ferner wenn das Bild des Sterns mit der Mitte μ des Fadenkreuzes zusammentrifft, die optische Axe des Fernrohrs als die Richtung ansehen, in welcher der Stern liegt, so ist klar, wie dieser Stern nicht in der Geraden Ss, sondern in einer mit $o\mu$ oder cd parallelen Richtung der linken Seite der Figur gesehen wird, und demnach eine Winkelverschiebung um $\mu o\mu'$ erleidet. Diesen merkwürdigen Winkel nennt man nun den „Aberrationswinkel" und ist seine Tangente gleich $\frac{\mu\mu'}{\mu'o}$, oder wegen der Kleinheit dieses Winkels auch $= \frac{\mu\mu'}{f}$, wenn f die Länge des Fernrohrs bedeutet. Wir sahen aber oben, dass $\mu\mu'$ gleich 0,041 Linien war und erhalten demnach, wenn 0,041 durch $f = 3.12.12$ dividirt wird als Tangente des Aberrationswinkels, diesen mit α bezeichnet:

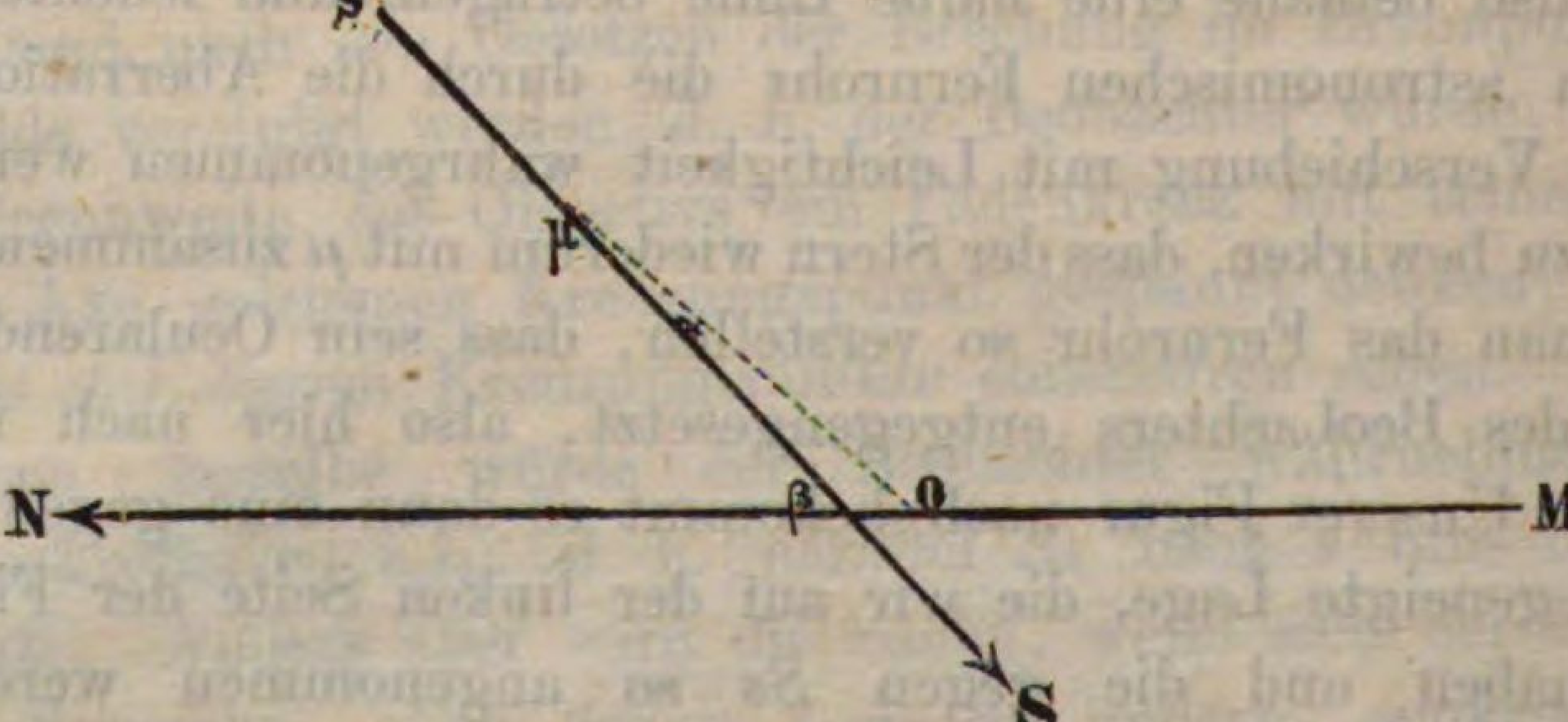
$$tang\, \alpha = \frac{0,041}{432}$$

oder angenähert
$$tang\, \alpha = \frac{1}{10000},$$

wonach α einen Werth von nahezu 20″ erhält.

Nachdem wir nun das Phänomen der Aberration unter der Voraussetzung, dass der Beobachter sich senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts fortbewege, erklärt haben, können wir den Werth des Aberrationswinkels auch für andere Bewegungen des Beobachters ableiten. Stellt z. B. in Figur 40 MN die Fortpflanzungsrichtung des

Figur 40.



Beobachters vor, die mit der Lichtrichtung sS den Winkel β bildet, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts mit C, die des Beobachters mit c bezeichnet,

$$\frac{\sin\alpha_*}{\sin\beta} = \frac{(o\beta)}{f} = \frac{c}{C}$$

d. h.

$$\sin\alpha_* = \frac{c}{C}\sin\beta \text{ und mithin}$$

$$\tang\alpha_* = \frac{\frac{c}{C}\sin\beta}{\sqrt{1-\frac{c^2}{C^2}\sin^2\beta}}$$

Achtet man darauf, dass c gegen C sehr klein ist, so wird die Grösse $\frac{c^2}{C^2}\sin^2\beta$ gleich Null gesetzt werden dürfen und erhält man dann einfach

$$\tang\alpha_* = \frac{c}{C}\sin\beta$$

oder da $\frac{c}{C}$ gleich $\tang\alpha$ ist, auch

$$\tang\alpha_* = \tang\alpha \,.\, \sin\beta$$

oder wegen der Kleinheit von α_* und α auch

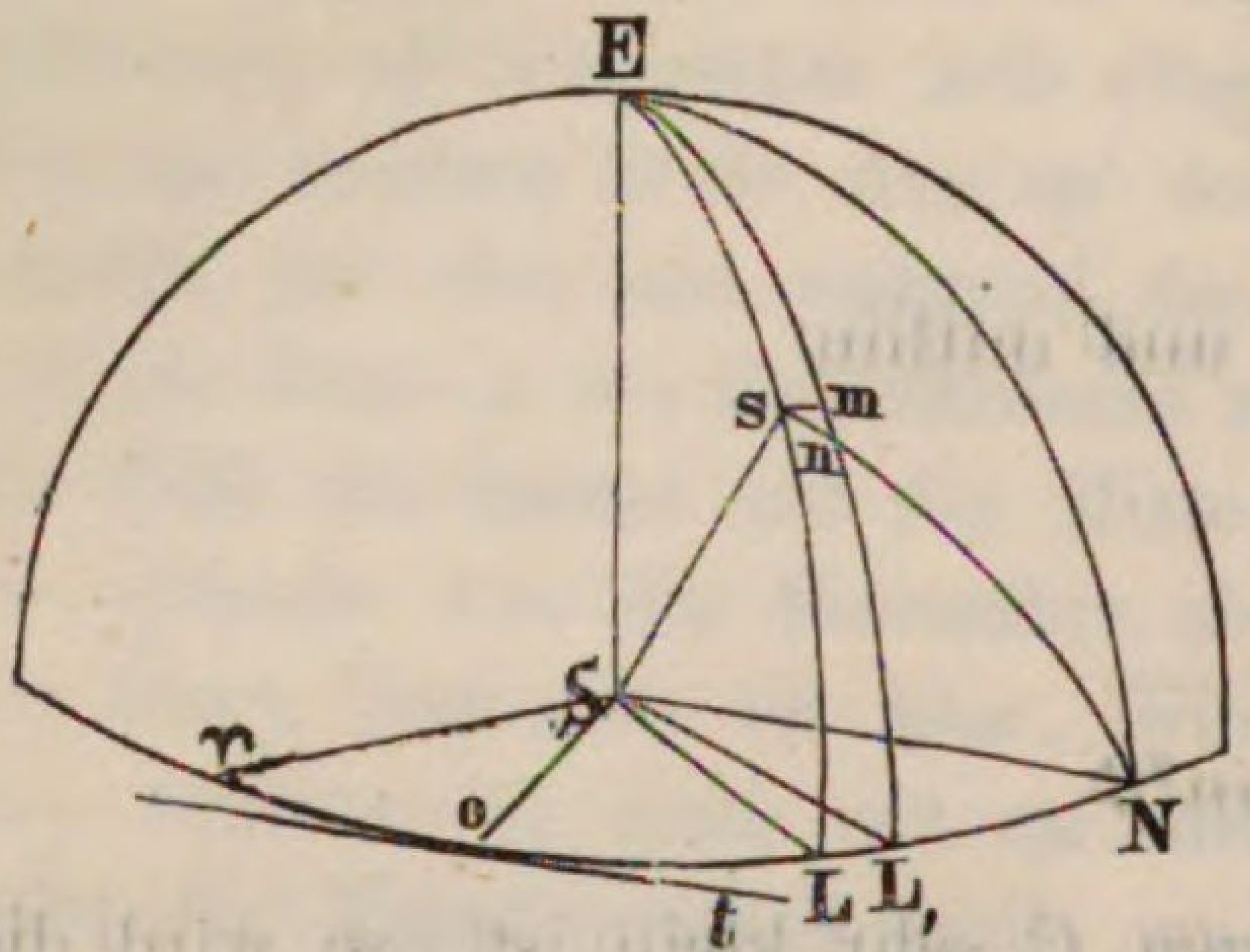
$$\alpha_* = \alpha \,.\, \sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

„d. h. der Aberrationswinkel bei einer beliebigen Nei-„gung der Bewegungsrichtung des Beobachters gegen „die Fortpflanzungsrichtung des Lichts ist gleich dem „Maximalwerthe α der Aberration multiplicirt mit dem „Sinus der Neigung.“

§. 32. Hiernach ist es nun leicht, das Problem auch allgemeiner zu lösen und zu berechnen, wie viel die Aberration für einen beliebigen Stern und einen beliebigen Zeitpunkt des Jahres beträgt. Da α bekannt ist, so wird es hierbei nur auf die Bestimmung von $\sin\beta$ ankommen. Es sei nun in Figur 41 ΥoL die Ekliptik, E der Pol derselben, o eine beliebige Stellung der Erde in der Ekliptik, S die Sonne und s ein beliebig gelegener Stern, ferner Υ der Frühlingspunkt. Der Bogen Υo ist dann weiter nichts als die Länge der Erde, die wir mit ♁ bezeichnen wollen; ebenso ist ΥL die wahre Länge des Sterns, Ls seine wahre Breite und wollen wir diese Grössen mit l und b bezeichnen. Denken wir ferner daran, dass gegenüber dem Fixsternlicht nur Richtungen in Betracht kommen und die Erde sowohl wie die ganze Erdbahn als ein Punkt angesehen werden darf, so sind unsere beiden Bewegungsrichtungen einmal die im Punkte o in der Ebene der Ekliptik nach der Richtung ot gezogene Tangente und die Richtung sS

als die Richtung irgend eines Lichtstrahls vom Stern aus nach der Ekliptik. Das Licht, welches von s ausgehend in o die Erde trifft, ist also auch $\parallel sS$, und erhielten wir unsern obigen Winkel β, wenn wir durch o eine Parallele zu sS legten; wir erhalten denselben Winkel β aber auch, wenn wir die Tangente ot parallel mit sich selbst nach S verlegen, welche Lage dann identisch ist mit einem Durchmesser SN, der von S nach einem Punkte N geht, wenn letzterer in dem grössten Kreis EN der Ekliptik von o um 90^0 absteht, und o der Pol dieses grössten Kreises EN wird. Der Winkel β ist dann gleich dem Winkel sSN oder gleich dem Bogen sN eines durch s und N gelegten grössten Kreises. Für die Bestimmung von $\sin\beta$ benutzen wir ferner das sphärische Dreieck EsN. In ihm ist gemäss der trigonometrischen Formel

Fig. 41.



$$\cos(Ns) = \cos(Es) \,.\, \cos(EN) + \sin(Es) \,.\, \sin(EN) \,.\, \cos(LEN)$$

d. h. wegen

$$Ns = \beta,\ EN = 90^0,\ Es = 90^0 - b$$

$$\cos\beta = \cos b \,.\, \cos(LEN)$$

und mit Rücksicht darauf, dass

$$\sphericalangle LEN = \text{Bogen } LN = oN - oL$$

$$= 90^0 - (l - \odot)$$

schliesslich $\cos\beta = \cos b \,.\, \sin(l - \odot)$ . . . . (6)

und

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2 b \,.\, \sin^2(l - \odot)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Denken wir durch sS und SN als unsere Bewegungsrichtungen eine Ebene gelegt, so muss das Fernrohr gemäss der Betrachtung im vor. §. in dieser Ebene nicht nach s, sondern wegen der Aberration etwa nach einem Punkte n so gerichtet werden, dass das Stückchen sn gleich α_* und demnach

$$sn = \alpha \,.\, \sqrt{1 - \cos^2 b \,.\, \sin^2(l - \odot)} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

gleich dem gesuchten Werthe der Aberration wird. Um zu erfahren, wie hierdurch die Länge und Breite des Sterns geändert werden, legen wir durch den Punkt n einen Breitenkreis EnL, und durch s einen zur Ekliptik parallelen Kreis, der EnL, im Punkte m schneidet *).

---

*) Da sphärische Dreiecke nur beim Durchschnitt von grössten Kreisen angenommen werden dürfen, so hat man sich beim Dreieckchen smn die Seite sm

Das kleine Dreieck *smn* ist bei *m* rechtwinklig und hat bei *s* einen Winkel *msn* gleich *y*, der den Winkel $LsN = x$ zu 90^0 ergänzt. Im Dreieck LsN ist aber

$$\frac{\sin\beta}{\cos(l - ♁)} = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos y}$$

mithin

$$\cos y = \frac{\cos(l - ♁)}{\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und

$$\sin y = \frac{1}{\sin\beta} \sqrt{\sin^2\beta - \cos^2(l - ♁)} \;. \quad (10)$$

Bezeichnen wir LL_1 als die durch die Aberration hervorgebrachte Veränderung in der Länge des Sterns mit Δl, so ist im Dreieck *smn*, wie wir schon wiederholt sahen *sm* gleich $\Delta l \,.\, \cos\beta$ zu setzen, während *mn* gleich Δb die Aenderung der Breite ist, die der Figur gemäss mit einem — versehen werden muss. Es ist ferner

$$\Delta l \,.\, \cos b = sn \,.\, \cos y$$

$$\Delta b = - sn \,.\, \sin y$$

oder wenn wir für *sn* seinen Werth aus (8) und für $\cos y$ und $\sin y$ die Werthe aus (9) und (10) einsetzen und die nöthige Reduction gemäss (7) eintreten lassen:

$$\Delta l = + \frac{\alpha \,.\, \cos(l - ♁)}{\cos b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\Delta b = - \alpha \,.\, \sin(l - ♁) \,.\, \sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Beachten wir ferner, dass gemäss den Gleichungen auf Seite 63, in welchen l unserem ♁ und L unserem ⊙ entspricht

$$♁ = ⊙ - 180$$

so gehen unsere Gleichungen (11) und (12) über in

$$\Delta l = - \frac{\alpha \,.\, \cos(l - ⊙)}{\cos b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\Delta b = + \alpha \,.\, \sin(l - ⊙) \,.\, \sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Bleiben wir noch ein wenig bei der Betrachtung dieser beiden Gleichungen stehen und erheben dieselben ins Quadrat und addiren sie nach vorausgegangener entsprechender Division, so ergiebt sich

$$\frac{(\Delta l)^2 \cos^2 b}{\alpha^2} + \frac{(\Delta b)^2}{\alpha^2 \sin^2 b} = 1.$$

---

eigentlich als ein Stückchen eines grössten Kreises zu denken, der durch *sS* und den Punkt *m* gelegt werden kann. Begreiflicher Weise aber wird der, diesem grössten Kreise angehörende, Bogen *sm* so wenig von dem Bogen *sm* eines durch *s* || mit der Ekliptik gelegten kleineren Kreises abweichen, dass wir letzteren als mit ersterem identisch ansehen können. Diese Bemerkung haben wir demnach auch in Zukunft nicht zu wiederholen, wenn wir in ähnlicher Weise ein Dreieck bilden.

oder

$$\frac{(\Delta l)^2}{\alpha^2 \sec^2 b} + \frac{(\Delta b)^2}{\alpha^2 \sin^2 b} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

eine Gleichung, die aussagt, dass die jährliche Aenderung in Länge und Breite durch eine Ellipse dargestellt werden kann, deren Halbaxen gleich

$$\alpha . \sec b \text{ und } \alpha . \sin b$$

und dass die Form dieser Ellipse nur von b abhängig ist, dagegen sich unabhängig von l erweist, denn mit der Elimination von ⊙ ist auch gleichzeitig l eliminirt worden. Für $b = o$ wird die Gleichung (15) zu

$$\frac{(\Delta l)^2}{\alpha^2} + \frac{(\Delta b)^2}{o} = 1.$$

Die Ellipse der Gleichung (15) ist aber ja nicht zu verwechseln mit einer andern Ellipse, welche die **scheinbare** jährliche Verschiebung der Fixsterne darstellt, und die entsteht, wenn man den Lauf des Punktes n Fig. 41 das ganze Jahr hindurch verfolgt. Sehen wir demgemäss l und b als constant, dagegen ♁ als veränderlich an, so stellt die Gleichung (8) diese Curve in Polarcoordinaten vor. Um die Gleichung derselben in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, sehen wir die Bogen sm und mn als Coordinaten an und erhalten da

$$sm = \alpha . \cos (l - ♁)$$
$$mn = \alpha . \sin (l - ♁) . \sin b$$

ist: falls man ins Quadrat erhebt mit α bzw. $\alpha . \sin b$ dividirt und sodann die beiden Gleichungen addirt:

$$\frac{sm^2}{\alpha^2} + \frac{mn^2}{\alpha^2 . \sin^2 b} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

welche Gleichung das S. 165 angegebene Resultat enthält, dass die Sterne der Aberration wegen jährlich eine kleine Ellipse zu beschreiben scheinen, deren eine mit der Ekliptik parallel laufende Axe unabhängig ist von der Breite des Gestirns und gleich 2α wird, während die andere Axe proportional dem Sinus der Breite wächst und für b gleich 90^0 ebenfalls den Werth 2α erhält, so dass also ein Stern im Pol der Ekliptik einen kleinen Kreis zu beschreiben scheint.

§. 33. In ähnlicher Weise wie auf Länge und Breite übt die Aberration auch einen Einfluss auf Rectascension und Declination aus wie man leicht erkennen wird, wenn man die Figur 41 anstatt für die Ekliptik und den Pol der Ekliptik dieselbe für den Aequator und den Pol des Aequators construirt. Man wird hierbei finden, dass die Aenderung $\Delta Æ$ im Bogen auf dem Aequator erhalten wird, wenn man zwei Meridiane durch die Polaxe und die Punkte s und n legt, ebenso

die Aenderung $\Delta\delta$, falls man von n oder s aus wieder einen Parallelkreis zum Aequator zeichnet.

Wir führen hier die Rechnung, welche zu $\Delta Æ$ und $\Delta\delta$ führt nicht durch und erwähnen nur, dass Gauss vereinfachte Gleichungen eingeführt hat, nämlich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta Æ &= -a.\cos(\odot + A - Æ)\sec\delta\\ \Delta\delta &= -a.\sin(\odot + A - Æ)\sin\delta\\ &\quad -10'',222\cos(\odot + \delta).\sin\varepsilon\\ &\quad -10'',222\cos(\odot - \delta).\sin\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

so dass also $\Delta Æ$ durch einen, $\Delta\delta$ aber durch drei Summanden erhalten wird. Hierin bedeuten a und A Grössen, die von $\odot$ als der Länge der Sonne abhängen. Zur bequemen Auffindung von $\log a$ und A ist eine Tafel entworfen worden, in welche mit dem Argumente $\odot$ eingegangen wird; ebenso ist noch eine zweite Tafel beigefügt worden, in welcher man mit dem Argumente $(\odot + \delta)$ und $(\odot - \delta)$ unmittelbar den zweiten und dritten Summanden für $\Delta\delta$ findet. Diese Tafeln findet man als Taf. VI (A) und VI (B) unseres Anhangs, zu deren Erläuterung wir noch folgendes hinzufügen wollen. Die Columnen, die $\log a$ und A enthalten, sind mit römischen Ziffern 0 bis XI überschrieben und bedeuten diese eine Anzahl Zwölftel des Umkreises von 360^0, wesshalb sie oben mit einem kleinen z versehen sind, so dass z. B. $\text{VII}^z = 7.30 = 210^0$ $\odot$ bedeutet. Man hat somit die gegebene Länge $\odot$ erst mit 30 zu dividiren, die hierbei sich ergebende ganze Zahl, als römische Ziffer aufgefasst, weist die betreffende Columne an, während der Rest — eine zwischen 0 und 30 liegende Zahl —, die in der ersten Verticalcolumne stehenden Grade bedeutet. Wäre z. B. gegeben $\odot = 279^0$, so wäre mit dem Argumente $\text{IX}^z + 9^0$ einzugehen, wofür $\log a = 1{,}3097$ und $A = -0^0\ 44'$ ist. Bevor wir zur Lösung einer Aufgabe schreiten, mögen folgende Bemerkungen noch Platz finden. Was den numerischen Werth von α oder der „Aberrationsconstanten“ betrifft, so kann dieser auf doppelte Weise gefunden werden, nämlich einmal so, dass man die scheinbaren Verschiebungen der Fixsterne direct beobachtet; sodann aber auch auf die Weise, dass man zunächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C des Lichtes zu bestimmen sucht und mit dieser in die Geschwindigkeit c der Erde in ihrer Bahn dividirt. In diesem letzteren Falle giebt man die Richtigkeit der ganzen Anschauungsweise zu und berechnet α einfach als den Quotienten $\alpha = \frac{c}{C}$. Die Constante selbst ist von verschiedenen Forschern etwas verschieden gefunden worden, und legte Gauss bei der Berechnung seiner Aberrationstafeln, die er im Jahre 1808 im 17. Bande der „Monatlichen Correspondenz zur Be-

förderung der Erd- und Himmelskunde" herausgegeben von Freiherrn F. von Zach, zuerst mittheilte, die von Delambre nach Beobachtung der Verfinsterungen der Jupitertrabanten abgeleitete Constante $\alpha = 20'',255$ zu Grunde. Späterhin ist dieser Werth durchgängig etwas grösser gefunden worden und hat Nicolai (damaliger Director der Sternwarte in Mannheim) im Jahr 1843 die Gauss'schen Tafeln umgerechnet unter Zugrundlegung eines Werthes von $\alpha = 20'',4451$, welche Tafeln, von uns als Taf. VI schon angeführt, bis daher immer im Gebrauch gewesen sind.

Die neuere Zeit hat das Wesen der Aberration weiter verfolgt, und ist es insbesondere Klinkerfues (Director der Sternwarte in Göttingen) gewesen, der im Jahre 1867 eine Schrift veröffentlichte, die zu einer Reihe weiterer Betrachtungen führte, insbesondere den Satz enthielt, dass der Werth der Aberrationsconstante nicht unabhängig sein könne von der Beschaffenheit des ganzen zur Beobachtung verwandten optischen Apparats. Die betreffende Schrift erschien unter dem Titel: „Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie", Leipzig 1867 bei Quandt und Händel. Ferner verweisen wir für ein genaueres Studium der hier einschlägigen Lehren der Optik im Zusammenhang mit der Aberration auf eine Schrift von E. Ketteler (Professor in Bonn) unter dem Titel: „Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration", Bonn 1873, bei P. Neussner.

Nunmehr wollen wir den Werth der Aberration in einem gegebenen Falle berechnen.

Aufgabe. Es soll der „scheinbare" Ort eines Fixsterns mit Rücksicht auf Æ und δ gefunden werden, wenn dessen „mittlerer" Ort gegeben ist und wenn man hierbei blos den Einfluss der Aberration berücksichtigt.

Da nämlich die Aberration des Lichts einen Einfluss auf Rectascension und Declination ausübt, so kann man sich diesen Einfluss zunächst einmal wegdenken und würde so eine Æ und δ erhalten, welche die „mittlere" heissen möge. Das Greenwicher Jahrbuch 1870 enthält nun auf Seite 325—328 eine Zahl von 147 Fixsternen mit folgenden Ueberschriften:

Fixed Stars 1870

Mean Place For January $0 + 0^d,048$

auf Deutsch dem Sinne nach: „Mittlerer Ort der Fixsterne für 1870 zur Zeit Januar $0 + 0^d,048$". Dieser Moment: „Januar $0 + 0,^d048$" d. h.: Anfang des Januar + 0,048 Tage, ist der Moment, in welchem die mittlere Länge der Sonne 280^0 beträgt, und für diesen Moment gerade enthält das Jahrbuch die Rectascension und Declination, ohne dass diese von Aberration etc. beeinflusst sind. Stellen wir

unsere Aufgabe beispielshalber für den Stern α Aquarii und zwar am 13. October, so liefert der N. A. die mittlere:

$$Æ = 21^h\,59^m\,6^s{,}275 = 329^0\,46'\,34''; \; \delta = -0^0,\,57'\,1'',81$$

und haben wir nun unsere Gleichungen (17) zu beachten. Am 13. October ist

$$\odot = 199^0\,57' = VI^z + 19^0\,57'$$

demgemäss mit Benutzung unserer Tafel VI (A)

$$\log a = 1{,}2779; \; A = 1^0\,38'$$

$$(\odot + A - Æ) = 201^0\,35'\,4'' - 329^0\,46'\,34'' = -128^0\,11'\,30''$$

$$\begin{aligned} \log(-a) &= 1{,}2779_n \\ \log\cos(128^0\,11') &= 9{,}7912_n \qquad \Delta Æ = +11'',72 = 0,^s78 \\ \log\sec\delta &= 0{,}0001 \\ \hline \log\Delta Æ &= 1{,}0692 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des $\Delta\delta$ ist

$$\begin{aligned} \log(-a) &= 1{,}2779_n \\ \log\sin(-128^0\,11') &= 9{,}8954_n \\ \log\sin\delta &= 8{,}2198_n \\ \hline & \;\; 9{,}3931 \end{aligned}$$

mithin ist der erste Summand von $\Delta\delta = -0'',25$.

Ferner ist $\odot + \delta = 199^0\;\;0' = VI^z + 19^0\;\;0'$

$$\odot - \delta = 200\;\;54' = VI^z + 20\;\;54$$

und ist mittelst der Taf. VI (B) der zweite und dritte Summand gleich

$$3'',85 + 3'',80 = 7'',65$$

somit $\quad \Delta\delta = \mathbf{7'',40}$

und demgemäss

$$Æ.\,app = 21^h\,59^m\,6^s{,}275 + 0^s{,}78 = \mathbf{21^h\,59^m\,7,^s06}$$

$$\delta.\,app \;.\;.\;. -57'\,1'',81 + 7'',40 = -\mathbf{56'\,54,''\,41}$$

Wir wollen diese Berechnung des Einflusses der Aberration auf Æ und Decl. noch auf eine andere Weise kennen lernen, indem wir den N. A. benutzen, der auf Seite 329 Gleichungen für gewisse Grössen enthält, die sich zum Theil mit Hilfe von Logarithmen, die auf der jedesmaligen Seite XX zu finden sind, leicht berechnen lassen. Führen wir zu dem Zwecke die rechten Seiten der Gleichungen (17) aus, so erhalten wir:

$$\Delta Æ = -a \sec\delta \left[\cos(\odot + A)\cos Æ + \sin(\odot + A)\sin Æ\right]$$

oder wenn wir anders ordnen:

$$= -\Big(a.\cos(\odot + A)\Big)\cos Æ \sec\delta - \Big(a.\sin(\odot + A)\Big)\sin Æ \sec\delta.$$

Setzen wir ferner mit Gauss

$$-a.\cos(\odot + A) = -20'',445 \;\; \cos\odot\,\cos\varepsilon$$

$$-a.\sin(\odot + A) = -20\;,445 \;\; \sin\odot$$

oder nach dem N. A. einfach

$$\left.\begin{array}{ll} -20'',445\ cos \odot\ cos\,\varepsilon & = A \\ -20\ ,445\ sin \odot & = B \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

wobei selbstverständig das letzte A nicht identisch mit dem in den Gleichungen (17) eingeführten Winkel A anzusehen ist, so ergiebt sich

$$\Delta Æ = A\ (cos\,Æ\ sec\,\delta) + B\ (sin\,Æ\ sec\,\delta)$$

oder wenn wir noch

$$\left.\begin{array}{l} cos\,Æ\ sec\,\delta = a \\ sin\,Æ\ sec\,\delta = b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

setzen:

$$\Delta Æ = A\,.\,a + B\,.\,b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Der N. A. enthält nun auf den Seiten XX die Logarithmen von A und B und können wir somit $\Delta Æ$ auch auf folgendem Wege berechnen. Es ist gemäss unserer $Æ$ und δ

$$log\,sec\,\delta = 0{,}00006$$
$$log\,cos\,Æ = 9{,}93654$$
$$log\,sin\,Æ = 9{,}70189_n$$

mithin

	$log\,a = 9{,}93660$		$log\,b = 9{,}70195_n$
nach dem N. A.	$log\,A = 1{,}24490$	nach dem N. A.	$log\,B = 0{,}85400$
	$1{,}18150$		$0{,}55595_n$
	num. $= 15'',19$		num. $= -3'',59$

mithin $\Delta Æ = 11'',60 = 0^s77.$

Für die Declination ist entsprechend:

$$\Delta\delta = -\Big(a\,.\,sin(\odot + A)\Big)\,cos\,Æ\ sin\,\delta + \Big(a\,cos(\odot + A)\Big)\ sin\,Æ\ sin\,\delta$$
$$-\ 10{,}222\ sin\,\varepsilon\ \Big(cos\,(\odot + \delta) + cos\,(\odot - \delta)\Big)$$

oder nach einiger Reduction und mit Rücksicht auf unsere Abkürzungen:

$$\Delta\delta = A\ \Big(-sin\,Æ\ sin\,\delta + cos\,\delta\ tang\,\varepsilon\Big) + B\ \Big(cos\,Æ\ sin\,\delta\Big)$$

d. h. wenn wir

$$\left.\begin{array}{ll} -sin\,Æ\ sin\,\delta + cos\,\delta\ tang\,\varepsilon & = a' \\ cos\,Æ\ sin\,\delta & = b' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

setzen:

$$\Delta\delta = A\,.\,a' + B\,.\,b' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Für die Berechnung unseres Beispiels ist

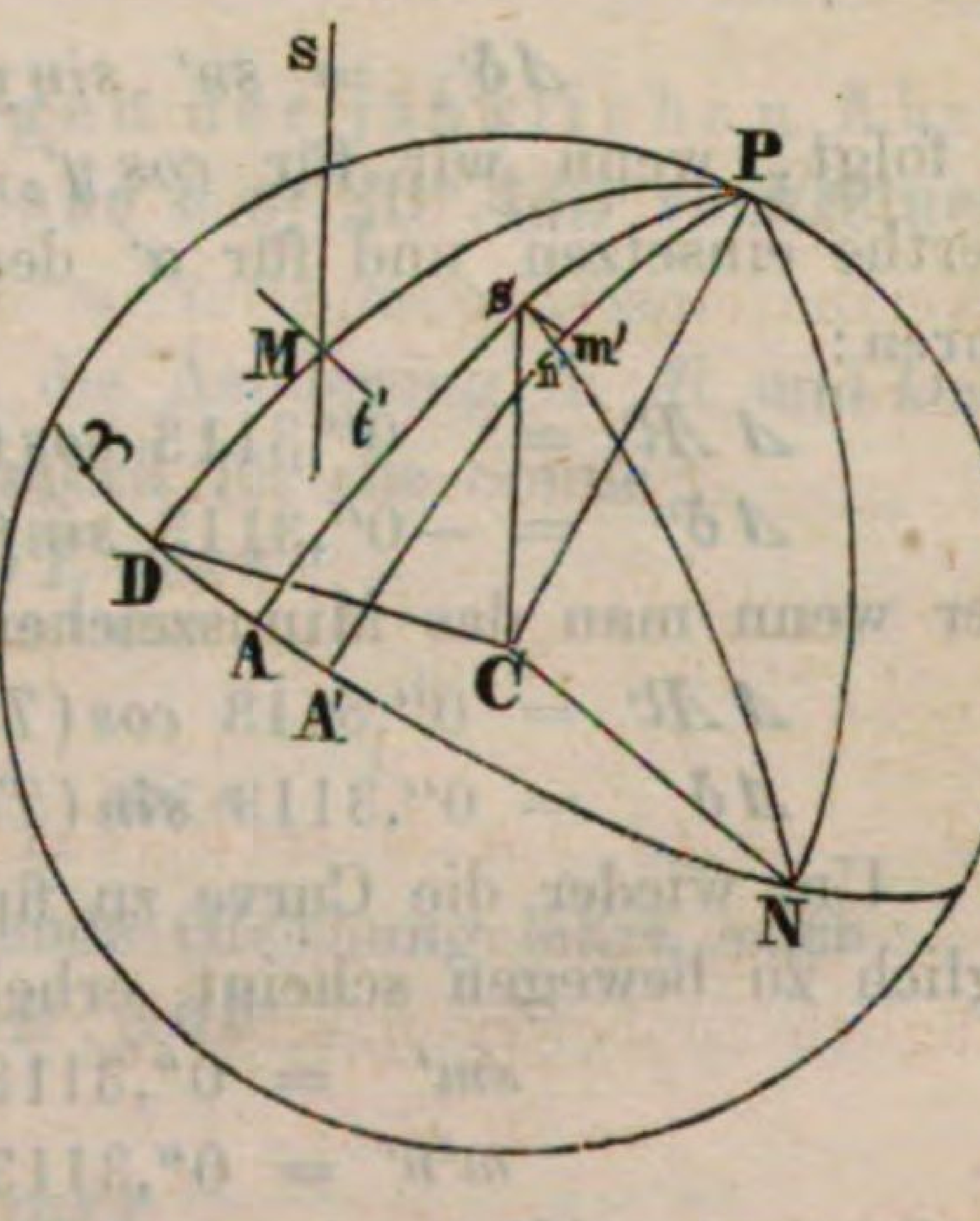
$log\,(-sin\,Æ) = 9{,}70189$	$log\,tg\,\varepsilon = 9{,}63739$	$log\,Cos\,Æ = 9{,}93654$
$log\,sin\,\delta = 8{,}21980_n$	$lg\,cos\,\delta = 9{,}99994$	$lg\,sin\,\delta = 8{,}21980_n$
$log\,A = 1{,}24490$	$lg\,A = 1{,}24490$	$lg\,B = 0{,}85400$
$9{,}16659_n$	$0{,}88223$	$9{,}01034^n$
num. $= -0'',15$;	num. $= +7'',62$;	num. $= -0'',10$

mithin

$$\varDelta\delta = +\ 7'',37.$$

§. 34. Die Aberration, die wir im Vorausgehenden kennen lernten, führt den Namen der jährlichen Aberration der Fixsterne. Zu ihrer Berechnung ist es ohne Einfluss, welchen Standpunkt ein Beobachter auf der Erde selbst einnimmt, indem nur die Ortsveränderung der Erde in der Ekliptik als Hauptmoment in Betracht kommt. Aber wenn man genauer zusieht, überzeugt man sich, dass auch die Rotation der Erde um ihre Axe eine Aberration erzeugt, die zwar viel kleiner ist als die jährliche, aber doch bei genaueren Rechnungen berücksichtigt werden muss. Ein Punkt des Aequators legt in 24 Stunden einen Weg von 5400 Meilen zurück, in einer Secunde mithin $\frac{5400}{24\,.\,60\,.\,60} = \frac{1}{16}$ Meile. Die Geschwindigkeit des Lichts mit 42000 Meilen in Rechnung gezogen, wird demnach die tägliche Aberration, für einen solchen Punkt im Momente wo sein Meridian durch den Stern geht mit α' bezeichnet, gleich $\alpha' = \frac{206265}{16\,.\,42000} = 0'',307$ sein. Die Berechnung von α_*' für einen beliebigen Ort der Erde und eine beliebige Zeit des Tages gelingt leicht und wollen wir zu dem Ende die Figur 42 benutzen, die der Fig. 41 sehr ähnlich ist. In ihr bedeutet ΥAN den Aequator, P den Pol, M den Ort eines Beobachters und sC die Lichtrichtung von irgend einem Fixstern aus. Versetzen wir diese nach dem Punkte M und denken uns an M die Tangente Mt' in die Ebene des von M beschriebenen Parallelkreises gelegt, so ist dieser Winkel $smt' = \beta'$ gesetzt, gleich dem Winkel sCN, wenn wir annehmen, dass der Punkt N vom Punkt D im Aequator um 90^0 absteht.

Figur 42.



Legen wir demnach durch s und N einen grössten Kreis, so wird auf diesem ein Stückchen sn' gleich α_*' gleich der täglichen Aberration und ferner, wenn wir durch s und n' die Meridiane PA und PA' legen, der Bogen $AA' = \varDelta\mathcal{R}'$ gleich dem Einflusse der täglichen Aberration auf die Rectascension und der Bogen $n'm'$ gleich $\varDelta\delta'$ gleich dem Einflusse der täglichen Aberration auf die Declination.

Aus dem Dreieck sPN folgt nun wie früher bei der Figur 41

$$\cos\beta' = \cos\delta \, . \cos(APN)$$

d. h. da $APN = DN - (AR - \Upsilon D) = 90^0 - (AR - T)$

wo T die Sternzeit bedeutet,

$$\cos\beta' = \cos\delta \, . \sin(AR - T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\sin\beta' = \sqrt{1 - \cos^2\delta \ \sin^2(AR - T)} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Wird $\measuredangle AsN$ mit x', $\measuredangle m'sn'$ mit y' bezeichnet, so ist im Dreieck AsN

$$\sin x' = \frac{\cos(AR - T)}{\sin\beta'} = \cos y'$$

$$\sin y' = \frac{1}{\sin\beta'} \sqrt{\sin^2\beta' - \cos^2(AR - T)}\,.$$

oder mit Rücksicht auf (24)

$$\sin y' = \frac{1}{\sin\beta'} \sin(AR - T) \, . \sin\delta.$$

Wenn nun M im Aequator läge, so würde analog dem Werthe α_* bei der jährlichen Aberration sn' gleich $\alpha_*' = \alpha' \, . \sin\beta'$ sein; da aber einem Beobachter mit der Polhöhe φ nur eine Aberrationsconstante $\alpha' \, . \cos\varphi$ zukommt, so ist

$$sn' = \alpha'_* = \alpha' \, . \cos\varphi \, . \sin\beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Da ferner:

$$\varDelta AR' = AA' = \frac{sm'}{\cos\delta} = \frac{sn' \, . \cos y'}{\cos\delta}$$

$$\varDelta\delta' = sn' \, . \sin y'$$

so folgt, wenn wir für $\cos y'$, $\sin y'$ und sn' die eben angegebenen Werthe einsetzen und für α' den gebräuchlichen Werth 0″,3113 einführen:

$$\varDelta AR' = 0'',3113 \ \cos(AR - T) \ \cos\varphi \ \sec\delta$$

$$\varDelta\delta' = -0'',3113 \ \sin(AR - T) \ \cos\varphi \ \sin\delta$$

oder wenn man das Minuszeichen weghaben will auch

$$\left.\begin{aligned} \varDelta AR' &= 0'',3113 \ \cos(T - AR) \ \cos\varphi \ \sec\delta \\ \varDelta\delta &= 0'',3113 \ \sin(T - AR) \ \cos\varphi \ \sin\delta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Um wieder die Curve zu finden, in welcher sich der Punkt n' täglich zu bewegen scheint, erheben wir die Gleichungen

$$sm' = 0'',3113 \ \cos(T - AR) \ \cos\varphi$$

$$m'n' = 0'',3113 \ \sin(T - AR) \ \cos\varphi \ \sin\delta$$

ins Quadrat, addiren sie nach vorausgegangener Division und erhalten

$$\frac{(sm')^2}{0'',3113^2 \cos^2\varphi} + \frac{(m'n')^2}{0'',3112^2 \, . \cos^2\varphi \ \sin^2\delta} = 1$$

woraus wir erkennen, dass auch wegen der täglichen Aberration die Sterne eine kleine Ellipse beschreiben, deren grosse Axe gleich 2.0″,3113 $\cos\varphi$ und kleine gleich 2.0″3113 $\cos\varphi \ \sin\delta$ ist, und wobei ferner die erstere parallel dem Aequator die letztere hierzu senkrecht liegt.

§. 35. Im Vorausgehenden ist die Aberration betrachtet worden, wie sie sich bei Fixsternen zeigt und unterliegt es keinem Zweifel, dass dieselbe auch einen Einfluss auf den scheinbaren Ort der Sonne wie der anderen Himmelskörper: Mond, Planeten und Kometen, ausübt und wollen wir hier noch die Aberration bei der Sonne betrachten, theils weil letztere bei Zeitbestimmungen beachtet werden kann, theils weil sich zeigen wird, dass die Aberration bei der Sonne einen wesentlich andern Verlauf nimmt, wie bei den Fixsternen. Zunächst dürfen wir die Sonne in ihrer Lage im Weltraume als unveränderlich annehmen und uns auch erlauben die elliptische Erdbahn durch einen Kreis zu ersetzen. Es folgt hieraus, dass sämmtliche Lichtstrahlen senkrecht zu der Bewegungsrichtung der Erde in ihrer Bahn angenommen werden dürfen und ergiebt sich, dass die Länge der Sonne jahraus jahrein in derselben Weise wegen der Aberration verändert wird, während wir bei Fixsternen sahen, dass die Längenänderung einer Periodicität innerhalb der Grenzen $+\alpha$ und $-\alpha$ unterworfen ist. Da die Lichtstrahlen senkrecht zur Bewegungsrichtung der Erde laufen, so gilt für die Sonne auch genau die Betrachtung, die wir an die Figur 39 anknüpften und wird man sich sofort von der Thatsache überzeugen können, dass

> „die **Länge** der Sonne wegen der jährlichen Aber-„ration **stets** um die Grösse $\alpha = 20''.445$ **verkleinert** „wird“,

wonach es weiterhin nicht schwer ist, die Aenderung in Æ und Decl. zu finden. Nach Gl. (2) S. 66 ist nämlich für die Sonne:

$$tang\,Æ = tang\,L\,\cos\varepsilon$$

oder wenn wir differenziren:

$$\frac{d\,Æ}{\cos^2 Æ} = \frac{d\,L}{\cos^2 L}\cos\varepsilon.$$

Da aber, wie die erste auf S. 66 stehende Gleichung lehrt, auch:

$$\cos L = \cos Æ\,.\,\cos\delta$$

ist, so ergiebt sich

$$d\,Æ = \frac{d\,L\,.\cos\varepsilon}{\cos^2\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Da ferner, wie man sofort aus dem Dreieck saF Fig. 21 erkennt

$$\sin\delta = \sin L\,\sin\varepsilon$$

ist, so folgt

$$\cos\delta\,.\,d\delta = \cos L\,\sin\varepsilon\,.\,dL$$

mithin

$$d\delta = \cos Æ\,\sin\varepsilon\,.\,dL \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Setzen wir für dL unseren Werth $-20'',445$ ein, so wird

$$\varDelta Æ = -20'',445 \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta}$$

$$\varDelta\delta = -20,445 \cos Æ \sin\varepsilon;$$

da aber $\cos\varepsilon$ ebenso wie $\cos^2\delta$ stets positiv und somit das Vorzeichen der ersten Gleichung stets ein Minus bleibt, so folgt dass auch

„die **Rectascension** der Sonne durch die jährliche „Aberration immer in demselben Sinne geändert „und zwar **stets verkleinert** wird.“

Anders ist es aber mit $\varDelta\delta$, indem dessen Vorzeichen von dem Werthe $Æ$ abhängt.

Wir sind hiernach an einem Punkte angelangt, wo wir einige Nachträge zum Kapitel III. machen können.

Die Angaben „Æ⊙ app.“ und „Decl. ⊙ app.“ auf den Seiten I des Berliner und Greenwicher Jahrbuches deuten durch den Zusatz „app.“ an, dass bei ihnen der Einfluss der Aberration berücksichtigt ist. Wir können demnach nunmehr auch diesen Einfluss numerisch kennen lernen. Da 1870 das $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 22''$ ist, so lassen sich hier zwei constante Logarithmen für die Berechnung hersetzen, nämlich

$$\log\,(-20,445 \cos\varepsilon) = 1,27315_n$$

und

$$\log\,(-20,445 \sin\varepsilon) = 0,91052_n$$

und haben wir zur Berechnung von $\varDelta Æ$ und $\varDelta\delta$ dann nur nöthig, die $\log \frac{1}{\cos^2\delta}$ und $\cos Æ$ zu addiren. Wären also für Berlin 22. Septbr. 1870 diese Grössen zu berechnen, so würde, da am genannten Tage $Æ$. app. $= 11^h 57^m 7{,}^s62 = 179^0\ 16'\ 54'',3$ und die Decl. app. $= 18'\ 42'',4$ ist, unser

$$\varDelta Æ\odot = -18'',75 = -1{,}^s25$$

$$\varDelta\delta\odot = +\ 8,13.$$

Demnach wäre die Æ⊙ und Decl. ⊙ ohne Rücksicht auf den Einfluss der Aberration gleich

$$11^h\ 57^m\ 7{,}^s62 + 1{,}^s25 = 11^h\ 57^m\ 8^s{,}87 = 179^0\ 17'\ 13'',05$$

und

$$18'\ 42'',4 - 8'',13 = 18'\ 34'',27$$

weil jetzt, wo die wahre $Æ$ und Decl. gesucht wird, $\varDelta Æ$ und $\varDelta\delta$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden muss.

Anders verhält sich die Sache mit den Angaben auf Seite II des Berliner Jahrbuches, indem hier die Aberration nicht in Rechnung gezogen ist, so dass wenn z. B. in Col. II_4 die Länge ⊙ steht, wir diese als eine wahre Länge anzusehen haben und um die scheinbare zu bekommen durchweg $20'',445$ abziehen müssen.

Was die tägliche Aberration der Sonne anlangt, so ist klar,

dass für sie die Formel (25) gilt. Denn wir können uns bei der Figur 42 in der Richtung *Cs* auch die ⊙ stehend denken, deren Strahlen *sM* nach dem Orte *M* eines Beobachters, wegen der Kleinheit der Dimensionen des Erdkörpers gegenüber der Entfernung der ⊙ parallel *sC* angesehen werden dürfen, wonach für die ⊙ Alles das gilt, was wir aus der Figur für einen Fixstern ableiteten. Im Falle die Sonne oder ein Fixstern im Meridian steht und $T = Æ$ ist, wird

$$\left.\begin{aligned} \varDelta Æ' &= 0'',3113 \cos\varphi \sec\delta \\ \varDelta\delta' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

und erreicht demgemäss $\varDelta Æ'$ ein Minimum, wenn $\sec\delta = 1$ oder $\delta = 0$ ist, nämlich den Werth $0'',3113 \cos\varphi$, der seinerseits wiederum für $\varphi = 0$ einen Maximalwerth $0'',3113 = 0,^s02$ bekommen würde.

Kapitel V.

Ueber die Abhängigkeit der scheinbaren Lage eines Gestirns vom Standpunkte des Beobachters; über die Bedeutung des scheinbaren Durchmessers der Gestirne sowie über die durch bestimmte Himmelskörper veranlasste Veränderung der Coordinatensysteme.

§. 36. Wir haben im Eingange zum vorigen Kapitel gesehen, dass

III. die Parallaxe

eine Rolle spielt und müssen jetzt diesem Gegenstande unsere besondere Aufmerksamkeit widmen. Der Allgemeinheit wegen wollen wir die Erde nicht als eine Kugel, sondern gleich als ein Rotationsellipsoid ansehen und uns sofort mit einer Figur 43 S. 184 vertraut machen, deren genaue Auffassung für das Verständniss der nächsten Auseinandersetzungen unumgänglich nothwendig ist.

Der Natur des Rotationsellipsoids entsprechend werden sämmtliche Ebenen, die durch die Polaraxe CP gelegt werden, dasselbe in lauter einander congruenten Ellipsen durchschneiden. Nehmen wir an, dass $PMQO$ eine in der Ebene des Papiers gelegene und zugleich durch den Ort M eines Beobachters gehende Meridianellipse sei und verlängern den Radiusvector CM, so trifft dieser bei seiner Verlängerung auf einen Punkt Z_0, den man das „geocentrische" Zenith des Punktes M zu nennen pflegt. Da der Punkt C im Complexe sämmtlicher Radienvectoren des Ellipsoids unzählig viele Zenithaxen besitzt, dem Punkte M aber der gegebenen Definition gemäss nur ein geocentrisches Zenith zukommt, so ist klar, dass wenn man sich in C einen zweiten Beobachter denkt, dieser jederzeit mit irgend einem Beobachter der Oberfläche dieselbe geocentrische Zenithaxe insbesondere auch als etwaige Drehungsaxe eines Winkelinstruments gemeinschaftlich haben kann. Achten wir weiter darauf, dass M ein Punkt einer Ellipse ist, so leuchtet ein, dass die Normale im

Punkte M zwar mit CZ_0 in derselben Meridianebene PMQ liegt, aber keineswegs mit CZ_0 zusammenfällt, sondern unter allen Umständen, wenn M ein zwischen Pol und Aequator gelegener Punkt der Erdoberfläche ist, so liegt, dass ihre nach Innen gehende Verlängerung die Erdaxe in einem Punkte D schneidet, der vom Pole weiter entfernt liegt wie der Mittelpunkt C. Diese Gerade DM weist nach Aussen verlängert aut einen Punkt Z und ist dieser Punkt das Zenith des Beobachters in M, welches zunächst nur beobachtet wird. Denn die Linie DZ ist die eigentliche Verticale auf der im Punkte M zu denkenden Berührungsebene des Ellipsoids oder auf dem für den Beobachter in M anzunehmenden „Horizont." Man pflegt desshalb das Zenith Z das „scheinbare Zenith" zu nennen*) und wenn demnach auch ein Beobachter in C mit einem Beobachter in M im Allgemeinen nicht zugleich dieselbe Zenithaxe besitzt, so lässt sich doch durch C die Gerade CM, $\|$ DM ziehen, die in ihrer Verlängerung auf einen Punkt Z, der Himmelskugel trifft, der das geocentrische Zenith von M, ist, so dass jederzeit zu einem Punkte M auf der Oberfläche der Erde ein mehr nach dem Pole hin und mit M in demselben Meridian liegender Beobachter M, existirt, dessen geocentrisches Zenith gleich dem scheinbaren Zenith von M ist.

Dem entsprechend werden wir auch bezüglich der geographischen Breite der Orte M noch eine Unterscheidung zu machen haben. Man pflegt den Winkel

$$MCQ = \varphi_0$$

die „geocentrische Breite" oder die „verbesserte Breite" oder auch wohl die „wahre Breite" des Ortes M zu nennen, wobei anstatt „Breite" bekanntermaassen auch das Wort „Polhöhe" gesetzt werden darf; den Winkel

$$MdQ = \varphi$$

aber nennt man die eigentlich „geographische Breite" oder auch die „scheinbare Breite" oder Polhöhe.

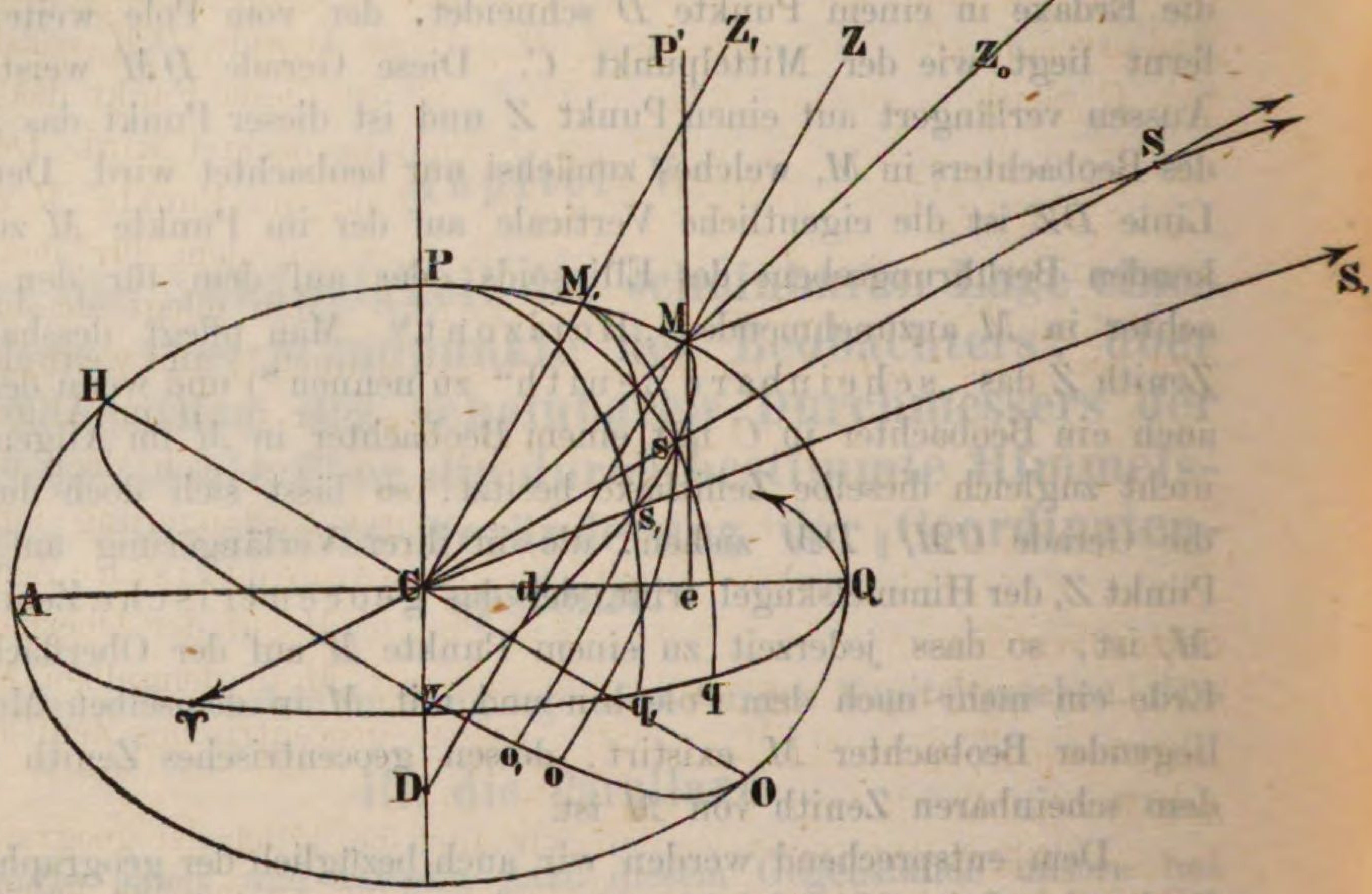
Stellt ferner S einen Punkt des Weltraumes ausserhalb der

---

*) Diese scheinbare Zenithrichtung wird demnach z. B. angegeben durch ein im Punkt M aufgehängtes Loth und ist dieselbe einerlei mit der Richtung der Resultante der Schwerkraft oder Anziehungskraft des Ellipsoids, bei welchem, wie die Mechanik lehrt, sei es nun durchweg homogen oder aus ähnlichen ellipsoidischen Schalen von je gleicher Dichtigkeit bestehend, die Richtung der Resultante der Anziehungskraft in einem Punkte M mit der Normalen desselben Punktes zusammenfällt, die aber nicht wie bei der Kugel durch den Mittelpunkt geht. Die Richtung DZ fällt demgemäss auch mit der vertikalen Drehungsaxe eines Theodolithen oder sonstigen Winkelmessinstrumentes zusammen, wenn diese Axe z. B. mit Hilfe einer Libelle vertikal gerichtet ist.

Erde vor und zwar so gelegen, dass er in der Figur aus der Ebene des Papiers oder des Meridians *PMQ* nach dem Auge des Be-

Figur 43.



schauers hin heraustritt, so kann dieser Punkt von verschiedenen Standpunkten auf der Erde wahrgenommen werden; insbesondere aber könnte man ihn auch von einem Punkte *M* der Oberfläche und vom Centrum *C* des Ellipsoids aus betrachten und werden die Richtungslinien *MS* und *CS* in *S* einen Winkel bilden, den man schlechthin die „Parallaxe" zu nennen pflegt und leuchtet ein, dass hier eine doppelte Ausdrucksweise gebraucht werden kann. Entweder nämlich definirt man die Parallaxe als den Winkel, den die beiden Gesichtslinien zweier Beobachter *M* und *C* in *S* mit einander bilden, oder einfach als den Winkel, unter welchem einem Beobachter in *S* der Radiusvector *CM* erscheinen würde. Läge insbesondere *S* in einer Ebene, die auf dem Radiusvector *CM* senkrecht stünde, so nennt man die Parallaxe dann die „Horizontalparallaxe"; fällt *M* in letzterem Falle noch mit dem Punkte *P* zusammen, so bekommt die Parallaxe den Namen „Polarhorizontalparallaxe" im Gegensatze „zur „Aequatorialhorizontalparallaxe", welche gleich dem Winkel ist, unter dem ein Aequatorialradius von einem Punkte aus gesehen wird, der zugleich in einer Berührungsebene des Aequators liegt. Diesen Horizontalparallaxen gegenüber pflegt man nun auch jede andere Parallaxe

mit dem Namen „Höhenparallaxe“ zu bezeichnen. Wir wählen für letztere allgemein den Buchstaben p und setzen, im Falle dass eine beliebige Horizontalparallaxe gemeint wird, statt des p ein π, im Falle aber die Aequatorialhorizontalparallaxe zu denken ist, ein π_0. Da man den Aequatorialradius mit 1, jeden beliebigen andern Radiusvector mit ϱ zu bezeichnen pflegt, so folgt, die Entfernung S von C gleich e_0 gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\pi &= \frac{\varrho}{e_0} \\ \sin\pi_0 &= \frac{1}{e_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder wenn man annehmen darf, es wären π und π_0 kleine Winkel

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 206265'' \, \frac{\varrho}{e_0} \\ \pi_0 &= 206265'' \, \frac{1}{e_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Setzen wir ferner

$$Z_0MS = z'_0$$

und nennen diese die geocentrische Zenithdistanz des Punktes S für den Beobachter in M, auf der Erdoberfläche, so ist im ebenen Dreieck SMC:

$$\frac{\sin p}{\sin z'_0} = \frac{\varrho}{c_0}$$

$$\sin p = \frac{\varrho}{c_0} \sin z'_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder:

$$\sin p = \sin\pi \sin z'_0$$

oder auch

$$\sin p = \varrho . \sin\pi_0 \sin z'_0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder auch

$$p = \varrho . \pi_0 . \sin z'_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

§. 37. Um Azimuth und Höhe, Rectascension und Declination, Länge und Breite in M sowohl wie in C messen zu können, rüsten wir den Beobachter in M wie den in C mit einem Winkelmessinstrumente aus, dessen eine Drehungsaxe entweder nach dem Zenith oder nach dem Pol des Aequators oder nach dem Pol der Ekliptik weist, während der zu dieser Axe senkrecht liegende Theilkreis im ersten Falle mit dem Horizont, im zweiten mit dem Aequator, im dritten mit der Ekliptik parallel lauft bzw. damit zusammenfällt. Dies vorausgesetzt wird ein Beobachter in C, der nach s sieht, alle Winkel in derselben Weise finden, als wenn er nach S sähe, falls

eben s der Punkt ist, in welchem der von S nach C gerichtete Lichtstrahl die Oberfläche der Erde durchschneidet. Ziehen wir ferner durch C eine Parallele $CS_,$ zu MS, so liegt diese mit MS und CS nothwendig in einer und derselben Ebene und diese Ebene durchschneidet das Erdellipsoid in einem Umkreis $Mss_,w$, in welchem auch der Punkt $s_,$ als Durchschnittspunkt von $CS_,$ mit der Oberfläche der Erde liegt. Es wird sich nun erkennen lassen, dass wenn wir den einen Beobachter von M nach C versetzen, ihm aber eine mit MZ oder der scheinbaren Zenithaxe parallele Zenithaxe $CZ_,$ geben, ihn aber nicht nach s sondern nach $s_,$ sehen lassen, er alle Winkel: Zenithdistanz und Azimuth, Rectascension und Declination, Länge und Breite so misst, wie wenn er in M bliebe und nach S sähe. Denn um das Azimuth und zwar das scheinbare Azimuth $= a'$ von S in M mit einem Winkelmesser zu messen, dessen Verticalaxe mit der scheinbaren Zenithaxe MZ zusammenfällt, müsste man den Höhenkreis aus der Lage, in der er mit der Meridianebene CMQ coincidirt, um MZ soweit drehen, dass er hernach durch den Punkt S gienge, wenn wir unter Azimuth den Winkel zwischen der Meridianebene des Beobachters und dem durch S gehenden Verticalkreis verstehen. Genau dasselbe Azimuth misst aber ein Beobachter in C, wenn die Drehungsaxe seines Winkelmessers mit $CZ_,$ zusammenfällt und er den Verticalkreis eine Drehung aus der Lage $CM_,Q$ $(= CMQ)$ bis zur Coincidenz mit $M_,S_,o_,$ oder $M_,s_,o_,$ machen lässt, da ja $CS_, \parallel$ zu MS und $CZ_, \parallel MZ$ liegt. Um ferner in M die scheinbare Zenithdistanz von S zu messen, müsste in der Verticalebene ZMS (nicht zu verwechseln mit der Ebene Z_0MS) der Winkel $ZMS = z'$ gemessen werden. Genau denselben Winkel misst aber C, wenn er in der Ebene $Z_,CS_,$, in welcher auch $s_,$ liegt, den Winkel $Z_,Cs_,$ misst. Ebenso leicht wird man sich davon überzeugen, dass auch die Rectascension und Declination von S in M und von $s_,$ in C gemessen ganz gleich ausfallen, vorausgesetzt dass man in M und C je ein Winkelmessinstrument aufstellte, dessen Drehungsaxe in M mit $MP' \parallel CP$, in C geradezu mit CP zusammenfiele. Denn stellt MP' die Richtung in M nach dem Pol und $C\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkt vor, so wäre die Rectascension des Punktes S in M gemessen gleich dem Winkel zwischen den Ebenen $MP'\Upsilon$ und $MP'S$. Genau denselben Winkel misst aber auch der Beobachter in C, der um die Axe CP eine Ebene dreht aus der Lage, wo sie ebenfalls den im Unendlichen liegenden Υ trifft, bis zur Lage, in der sie $CS_,$ $(\parallel MS)$ mithin auch den Punkt $s_,$ enthält.

Für unsere weiteren Entwickelungen ersetzen wir desshalb den Beobachter in M durch einen solchen in C mit Instrumenten, deren betreffende Axen den Axen der Instrumente, welche der erstere in

M gebrauchte parallel laufen und lassen ihn anstatt nach S nach $s_{,}$ sehen. Da er nun ferner von C nach s sehend dieselben Winkel misst, wie wenn er nach S sieht, so wird der ganze Einfluss, den die Parallaxe ausübt, in der Verschiedenheit der Lage der Punkte s und $s_{,}$ bestehen; da diese aber jetzt von einem Standpunkte C aus beobachtet werden, und beide auf dem Ellipsoid liegen, so wird die ganze folgende Betrachtung sich sehr viel einfacher gestalten. Denn stellt HO den der Verticalaxe MZ zugehörenden Horizont vor, so durchschneidet ein Verticalkreis, der durch C und s lauft und die mit MZ gleich gerichtete Verticalaxe $CZ_{,}$ enthält, den Horizont in einem Punkte o, ein eben solcher durch $s_{,}$ gelegter Vertical aber in einem Punkte $o_{,}$ und ist der Azimuthalunterschied dieser Winkel $oM_{,}Q$ und $o_{,}M_{,}Q$ mit $\varDelta a$ bezeichnet, gleich dem Winkel $oM_{,}o_{,}$ = Bogen $oo_{,}$. Denken wir die Ebene $M_{,}so$ um $CM_{,}$ bis zur Coincidenz mit $M_{,}s_{,}o_{,}$ gedreht, so beschreibt der Punkt s einen Parallelkreis zum Horizont OH und kommt bei dieser Coincidenz mit $M_{,}s_{,}o_{,}$ nach einem Punkte $\sigma_{,}$ (in der Figur nicht angegeben), so dass die durch die Parallaxe bewirkte Differenz der Zenithdistanz oder $\varDelta z$ gleich dem Winkel $\sigma_{,}Cs_{,}$ wäre. Legen wir ebenso durch s und $s_{,}$ zwei Meridiane, die den Aequator AQ in q und $q_{,}$ durchschneiden, so ist $\varDelta\alpha$ = Winkel $qPq_{,}$ = Bogen $qq_{,}$ die durch die Parallaxe bewirkte Rectascensionsdifferenz. Liessen wir auch hier den Meridian Psq um CP rotiren, bis er mit $Ps_{,}q_{,}$ coincidirte und s hier zu einem Punkte $\sigma_{,}'$ gelangte, so wäre $\varDelta\delta$ = Winkel $\sigma_{,}'Cs_{,}$ die durch die Parallaxe bewirkte „Declinationsdifferenz“ und würden wir, wenn wir noch die Ekliptikaxe zeichnen wollten, uns auch leicht von der geometrischen Bedeutung des $\varDelta\lambda$ und $\varDelta\beta$ überzeugen.

Da unsere Figur wohl hinreichend erläutert ist, so können wir nun eine Uebersicht geben, welche beachtenswerth erscheinen dürfte. Zunächst die Zenithdistanzen und Azimuthe betreffend können wir vier verschiedene Beobachter annehmen:

einen Beobachter	„I“	in M mit der Zenithaxe	MZ_0
„ „	„II“	„ „ „ „ „	MZ
„ „	„III“	„ C „ „ „	CZ_0
„ „	„IV“	„ „ „ „ „	$CZ_{,}$

Diese beiden letzten Beobachter können aber jeder in doppelter Eigenschaft aufgefasst werden, je nachdem sie entweder nach s (= S) oder nach $s_{,}$ (= $S_{,}$) sehen und wollen wir daher an „III“ und „IV“ in der folgenden Uebersicht, um das letztere anzudeuten, ein $_*$ setzen. Die Uebersicht selbst gestaltet sich dann wie folgt:

Beobachtung	Zenithdistanzen		Azimuthe	
	im Winkel.	im Bogen.	im Winkel.	im Bogen.
„I“	$Z_0MS = z'_0$		a'_0	
„II“	$ZMS = z'$		a'	
„III“	$Z_0Cs = z_0$	Ms	$OMs = a_0$	Ow
„III_*“	$Z_0Cs, = z'_0$	$Ms,$	$OMs, = a'_0 = a_0$	Ow
„IV“	$Z,Cs = z$	M,s	$OM,s = a$	Oo
„IV_*“	$Z,Cs, = z'$	$M,s,$	$OM,s, = a'$	$Oo,$

Somit lehrt diese Zusammenstellung

1) dass überhaupt nur vier verschiedene Zenithdistanzen nämlich

$$z_0,\ z'_0,\ z \text{ und } z'$$

in Betracht kommen;

2) dass bei den Azimuthen nur drei verschiedene, nämlich

$$a_0,\ a, \text{ und } a'$$

zu berücksichtigen sind;

3) dass die Beobachtung „I“ identisch ist mit „III_*“ und somit die Beobachtungen „I“ und „III“ ersetzt werden können durch eine Beobachtung „III_*“ und „III“; die verticale Drehungsaxe fällt mit der geocentrischen Zenithaxe zusammen; der Unterschied in der Zenithdistanz besteht in dem Unterschiede der Winkel z_0 und z'_0; für's Azimuth besteht kein Unterschied;

4) dass die Beobachtung „II“ identisch ist mit „IV_*“ und somit die Beobachtung „II“ und „IV“ ersetzt werden kann durch eine Beobachtung „IV_*“ und „IV“; die verticale Drehungsaxe fällt mit der scheinbaren Zenithrichtung zusammen; der Unterschied in der Zenithdistanz und dem Azimuth besteht in dem Unterschiede der Winkel z und z' bzw. a und a'.

In Betreff der Rectascension und Declination ist die Sache viel einfacher, denn die Drehungsaxen haben alle nur eine zu CP parallele Lage und ist die Zusammenstellung hierfür die folgende:

Beobachtung	Rectascension		Declination	
	im Winkel.	im Bogen.	im Winkel.	im Bogen.
„I“	$\Upsilon P'S = \alpha'$		δ'	
„II“	$\Upsilon Ps = \alpha$	Υq	δ	qs
„II_*“	$\Upsilon Ps, = \alpha'$	$\Upsilon q,$	δ'	$q,s,$

Wir ersetzen also „I“ und „II“ durch „II_*“ und „II“

Bezüglich der Länge und Breite überlassen wir es dem Leser, den Zusammenhang zu verfolgen.

Wir erinnern noch einmal, dass durch directe Beobachtung nur

z' und a'

α' „ δ'

gefunden werden kann. Ferner beachten wir noch Folgendes: Wenn wir bis jetzt Bogen für die Winkel setzten, so waren dies elliptische Bogen und somit eigentlich kein Maass für die Winkel; aber wenn wir mit irgend einem Radius und insbesondere mit $CM = \varrho$ um C eine Kugel beschreiben, und deren Oberfläche mit allen in der Fig. 43 gezeichneten Linien und Ebenen im Durchschnitt denken, wenn wir ferner an alle diese Durchschnitte dieselben Buchstaben setzen wie beim Ellipsoid, so haben sich für diese Kugel die Winkel am Centrum C nicht verändert, und dürfen nunmehr alle Bogen, die zu den betreffenden Winkeln an C gehören, auch unmittelbar für letztere gesetzt werden. Wir stellen jedoch die Kugel in einer besondern Figur nicht dar, sondern machen nur darauf aufmerksam, dass die elliptischen Bogen als mit den Bogen dieser Kugel zusammenfallend angesehen werden müssen.

§. 38. Zunächst wollen wir nun erst den Unterschied $\varDelta\varphi$ der geocentrischen und scheinbaren Breite (Polhöhe) und den Radiusvector ϱ berechnen lernen und sodann Ausdrücke für $\varDelta a$, $\varDelta z$ bzw. $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\beta$ zu finden suchen. Bezeichnen wir die Aequatorial- und Polarhalbaxe einer Meridianellipse mit a und b, die Coordinaten des Punktes M mit x und y, so ist, da MZ die Normale im Punkte M der Ellipse vorstellt, das zwischen d und e liegende Stück der Abscissenaxe oder die Subnormale gleich

$$de = \frac{b^2}{a^2}x$$

wenn Ce die Abscisse x und $eM = y$ die Ordinate des Punktes M vorstellt. Es ist aber auch:

$$tang\,\varphi = \frac{y}{de} = \frac{y \cdot a^2}{x \cdot b^2}$$

$$tang\,\varphi_0 = \frac{y}{x}$$

mithin

$$tang\,\varphi_0 = \frac{b^2}{a^2}\,tang\,\varphi\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Nach den Untersuchungen von Bessel ist weiter:

$a = 3272077$ Toisen; $log\,a = 6{,}5148235$

$b = 3261139$ „ ; $log\,b = 6{,}5133694$

und würde demgemäss

$$log\frac{b^2}{a^2} = 0{,}9970918 - 1$$

sein, so dass sich ohne Weiteres nach (6) für ein gegebenes φ das φ_0 berechnen lässt und umgekehrt aus der Gleichung

$$tang\,\varphi = \frac{a^2}{b^2}\,\mathrm{tang}\,\varphi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

wobei

$$log\,\frac{a^2}{b^2} = 0{,}0029082$$

ist, sich φ für ein gegebenes φ_0 findet. Wäre z. B. für **Marburg** $\varphi = 50^0\ 48'\ 46'',9$ gegeben, so wäre

$$log\,tang\,\varphi = 0{,}08873$$

$$log\,\frac{b^2}{a^2} = 0{,}99709 - 1$$

$$log\,tang\,\varphi_0 = 0{,}08582$$

$$\varphi_0 = 50^0\ 37'\ 30''$$

und demgemäss

$$\varDelta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 11'\ 17'' = 677''.$$

Aus einer Reihenentwicklung hat man noch eine andere Formel für $\varDelta\,\varphi$ erhalten, die wir einfach hierher setzen, nämlich

$$\varDelta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 11'\ 30'',65\ sin\,2\varphi - 1'',16\ sin\,4\,\varphi \quad . \; . \; (8)$$

Für ϱ ergiebt sich folgendes. Es ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x}{\varrho} = cos\,\varphi_0\,;\ \frac{y}{\varrho} = sin\,\varphi_0$$

mithin

$$b^2\,\varrho^2\,cos^2\varphi + a^2\,\varrho^2\,sin^2\varphi_0 = a^2\,b^2$$

oder

$$\varrho^2\left(cos^2\varphi_0 + \frac{a^2}{b^2}\,sin^2\varphi_0\right) = a^2$$

oder da nach Gl. (7)

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{tang\,\varphi}{tang\,\varphi_0}$$

auch

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{cos^2\varphi_0 + sin^2\varphi_0\,\dfrac{tang\,\varphi}{tang\,\varphi_0}}}$$

oder nach einiger Umformung und wenn man für a die Einheit setzt:

$$\varrho = \sqrt{\frac{cos\,\varphi}{cos\,\varphi_0\ cos\,\varDelta\varphi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

mithin für Marburg:

$$log\,\varrho = \mathbf{9{,}99913}$$

$$\varrho = \mathbf{0{,}99800}$$

Auch hier hat man nach einer Reihenentwickelung folgende Formel erhalten:

$$\log \varrho = 9{,}9992747 + 0{,}0007271 \cos 2\varphi - 0{,}0000018 \cos 4\varphi \quad . \quad . \quad (10)$$

Bezüglich der Literatur über diesen Gegenstand wollen wir hier nur eine Arbeit erwähnen, die im Berliner astronomischen Jahrbuche v. Jahre 1852 unter dem Titel: „Ueber die Dimensionen des Erdkörpers, nebst Tafeln nach Bessel's Bestimmungen“ enthalten ist. Man findet daselbst eine Zusammenstellung von Constanten aus den verschiedenen Gradmessungen abgeleitet und eine Entwickelung von Gleichungen, von denen wir im Vorausgehenden die wichtigsten auch abgeleitet bzw. einfach mitgetheilt haben. Sodann aber sind dem Texte dieser Arbeit zwei Tafeln beigefügt, deren Gebrauch eine wesentliche Erleichterung bei der Rechnung gewährt. Die erste Tafel daselbst enthält nämlich für das Argument φ von 10 zu 10 Minuten die Differenz $\varDelta\varphi$ und den $\log\varrho$ nebst den zugehörigen Differenzen für die Interpolation. Dieselben Columnen findet man auch in den im Jahre 1871 erschienenen „Astronomischen Tafeln und Formeln von Dr. C. F. W. Peters, Hamburg b. Wilh. Mauke“, welche als eine vermehrte und verbesserte Auflage der von Schumacher im Jahre 1822 und von Warnstorff im Jahre 1845 neu herausgegebenen „Sammlung von Hülfstafeln etc.“ zu betrachten sind.

§. 39. Um nun einen Ausdruck für $\varDelta a$ und $\varDelta z$ zu gewinnen, setzen wir

$$\varDelta a = a' - a = \sphericalangle OM_,s_, - OM_,s$$
$$\varDelta z = z' - z = \sphericalangle M_,Cs_, - M_,Cs.$$

Es ist alsdann im sphärischen Dreieck $M_,s_,s$:

$$ss_, = p;\ \sphericalangle s_,M_,s = \text{Bogen } oo_, = \varDelta a$$

mithin

$$\frac{\sin p}{\sin (M_,s)} = \frac{\sin p}{\sin z} = \frac{\sin \varDelta a}{\sin (M_,s_,s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und im Dreieck $M_,s_,M$

$$\frac{\sin (MM_,)}{\sin (Ms_,)} = \frac{\sin \varDelta\varphi}{\sin z'_0} = \frac{\sin (M_,s_,s)}{\sin (a + \varDelta a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

mithin wenn wir (11) und (12) mit einander multipliciren

$$\frac{\sin p}{\sin z}\,\frac{\sin \varDelta\varphi}{\sin z'_0} = \frac{\sin \varDelta a}{\sin (a + \varDelta a)}$$

oder

$$\frac{\sin p}{\sin z'_0}\,\frac{\sin \varDelta\varphi}{\sin z} = \frac{\tan \varDelta a}{\sin a + \cos a \tan \varDelta a}$$

oder

$$\tan \varDelta a = \frac{\dfrac{\sin p}{\sin z'_0}\,\dfrac{\sin \varDelta\varphi}{\sin z}\,\sin a}{1 - \dfrac{\sin p}{\sin z'_0}\,\dfrac{\sin \varDelta\varphi}{\sin z}\,\cos a}$$

Achten wir darauf, dass nach Gl. (4)

$$\frac{\sin p}{\sin z'_0} = \varrho \,.\, \sin \pi_0$$

ist und setzen ferner

$$\varrho \,.\, \sin \pi_0 \,.\, \sin \varDelta \varphi = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

so folgt:

$$\operatorname{tang} \varDelta a = \frac{R \dfrac{\sin a}{\sin z}}{1 - R \dfrac{\cos a}{\sin z}} = \frac{R \sin a}{\sin z - R \cos a} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

d. h. wenn wir die Division ausführen,

$$\operatorname{tang} \varDelta a = \frac{R}{\sin z} \sin a + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sin z}\right)^2 \sin 2a + \quad . \quad . \quad .$$

oder wenn wir $\varDelta a$ anstatt der Tangente haben wollen:

$$\varDelta a = 206265 \left[\left(\frac{R}{\sin z}\right) \sin a + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sin z}\right)^2 \sin 2a + \quad . \right] \quad . \quad (15)$$

Man könnte aber auch π_0 gleich in Secunden gegeben denken und

$$\varrho \,.\, \pi_0 \,.\, \sin \varDelta \varphi = R_* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

setzen. Geschieht dies, so wird

$$R_* = 206265'' \, R$$

oder

$$R = \frac{R_*}{206265}$$

und würde bei der Einführung des R_* unsere Gl. (15) nunmehr heissen:

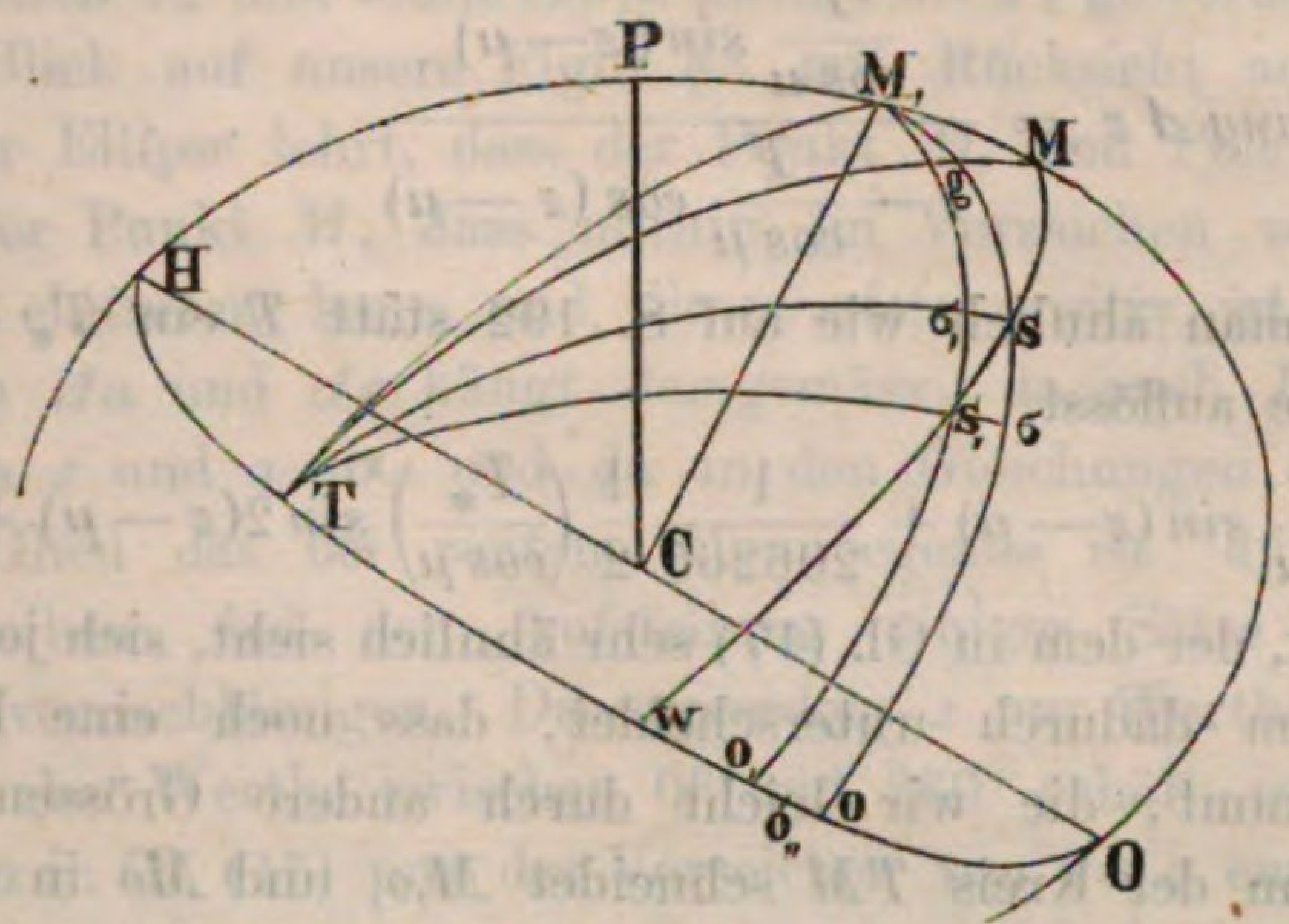
$$\varDelta a = \frac{R_*}{\sin z} \sin a + \frac{1}{206265} \frac{1}{2} \left(\frac{R_*}{\sin z}\right)^2 \sin 2a + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist demnach φ bekannt, so lässt sich nach Gl. (8) und (10) $\varDelta \varphi$ und ϱ berechnen; da ausserdem π_0 in den astronomischen Ephemeriden zu finden ist, so kann R_* nach (16) berechnet werden und ist damit auch $\varDelta a$ gegeben.

Zum Zwecke der Auffindung eines Ausdrucks für $\varDelta z$ copiren wir einen Theil der Fig. 43 und gehen in dieser neuen Figur 44 von einem zwischen o und $o_,$ in der Mitte gelegenen Punkte $o_{,,}$ aus auf dem Horizonte OH um 90° weiter bis zu einem Punkte T. Durch diesen Punkt T legen wir weiter vier grösste Kreise, die einzeln durch $M_,$, M, s und $s_,$ laufen und überzeugen uns, da der Winkel $oM_,o_, = \varDelta a$ ein kleiner Winkel ist, dass diese vier Kreise mit den Kreisen $M_,o$ und $M_,o_,$ beim Durchschnitt sehr nahe lauter rechte Winkel bilden. Dies zugegeben werden die Bogen $s\sigma$ und $s_,\sigma_,$ sehr nahe dieselben sein wie die, die wir oben S. 187 erhielten, indem wir um $CM_,$ die Ebene $CM_,s$ drehten bis zur Coincidenz mit $CM_,s_,$ und umgekehrt,

d. h. es wird auch jetzt, wo $s\sigma$ und $s,\sigma,$ Stücke von grössten Kreisen sind, $s\sigma = s,\sigma,$ als Bogen und $\measuredangle sTs,$ als Winkel gleich unserem

Figur 44.



gesuchten Δz sein. Demgemäss ist im Dreieck ss,T, wo Ts sehr nahe gleich 90^0 und Bogen $ss,$ gleich p ist

$$\frac{\sin \Delta z}{\sin (ss,T)} = \frac{\sin p}{\sin 90^0} = \sin p; \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

ferner im Dreieck Ts,M:

$$\frac{\sin (Ms,T)}{\sin (MTs,)} = \frac{\sin (MT)}{\sin z'_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel M,TM mit μ, so ist

$$\measuredangle MTs, = \text{Bogen}(M,s + \Delta z - \mu) = z + \Delta z - \mu$$

$$\sin (MTs,) = \sin (z + \Delta z - \mu) \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

ferner ergiebt sich aus dem Dreieck TOM

$$\frac{\sin (MT)}{\sin (MO)} = \frac{\sin (MOT)}{\sin (MTO)}$$

oder weil $MO = 90^0 - \Delta\varphi$, $MTO = 90^0 - \mu$ ist

$$\frac{\sin (MT)}{\cos \Delta\varphi} = \frac{1}{\cos \mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

so dass nun, wenn wir aus (21) und (20) die Werthe von $\sin (MT)$ und $\sin (MTs,)$ in (19) einführen und dann den hieraus resultirenden Werth von $\sin (Ms,T) = \sin (ss,T)$ in (18) einsetzen:

$$\sin \Delta z = \frac{\sin p}{\sin z'_0} \, \frac{\sin (z + \Delta z - \mu) \cos \Delta\varphi}{\cos \mu}$$

wird.

Entwickelt man rechts nach *sin.* und *cos.* von $(z - \mu)$ und Δz und dividirt rechts und links mit $\cos \Delta z$, so ergiebt sich nach einiger Reduction und nachdem man unter Berücksichtigung der Gl. (4)

$$\frac{\sin p}{\sin z'_0} \cos \Delta\varphi = \varrho \, . \sin \pi_0 \, . \cos \Delta\varphi = T$$

gesetzt hat,

$$tang\, \Delta z = \frac{\frac{T}{\cos \mu} \sin (z - \mu)}{1 - \frac{T}{\cos \mu} \cos (z - \mu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

oder wenn man ähnlich wie auf S. 192 statt T ein T_* einführt und in eine Reihe auflösst,

$$\Delta z = \frac{T_*}{\cos \mu} \sin (z - \mu) + \frac{1}{206265} \, \frac{1}{2} \left(\frac{T_*}{\cos \mu}\right)^2 \sin 2(z - \mu) + \, . \; . \quad (23)$$

ein Ausdruck, der dem in Gl. (17) sehr ähnlich sieht, sich jedoch wesentlich von ihm dadurch unterscheidet, dass noch eine Hilfsgrösse μ darin vorkommt, die wir leicht durch andere Grössen ausdrücken können. Denn der Kreis *TM* schneidet *M,o,* und *Mo* in zwei so nahe gelegenen Punkten durch, dass wir diese Durchschnittspunkte als einen gemeinsamen Punkt g auffassen können. Dies zugegeben ist aber in dem bei g rechtwinkeligen Dreieck *gM,M*, bei welchem der Bogen $M,g = \mu$; $\measuredangle \, gM,M = a$; $M,M = \Delta\varphi$, nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$tang\, \mu = tang\, \Delta\varphi \, . \cos a$$

oder bei der Kleinheit der Winkel μ und $\Delta\varphi$:

$$\mu = \Delta\varphi \, . \cos a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

wonach die Berechnung des Ausdrucks (23) keine Schwierigkeit mehr bietet.

Nehmen wir auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht, setzen also voraus die Erde wäre eine Kugel, so rücken auf unseren Figuren *M* und *M,* zusammen und wird $\Delta\varphi$ gleich Null. Da hiermit auch R im Ausdruck (13) und mit R auch $tang\, \Delta a$ in (14) gleich Null wird, ergiebt sich der wichtige Satz, dass

> bei der Erde mit Kugelgestalt die Parallaxe auf das **Azimuth** keinen Einfluss ausübt.

Auch Δz lässt sich in diesem Falle viel einfacher berechnen, indem jetzt

$$\mu = o \, ; \; \varrho = 1 \, ; \; T_* = \pi_0$$

und demgemäss die Gl. (23)

$$\Delta z = \pi_0 \, . \sin z + \frac{1}{2} \, \frac{\pi_0{}^2 \, . \sin 2z}{206265} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

wird.

In diesem Fall muss, da Winkel $sM,s, = \Delta a$ gleich Null ist und *M,* mit *M* zusammenfällt, die Grösse Δz gleich *ss,* gleich p

d. h. nach Gleichung (5) gleich $\pi_0 . sin z'_0$ werden, während wir einen complicirteren Ausdruck bekommen haben, der aber daher rührt, dass in (5) die Zenithdistanz z'_0 in (25) aber z steht, welches letztere nunmehr gleich z_0 und somit etwas kleiner als z'_0 geworden ist.

Ein Blick auf unsere Figur 43 mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Ellipse lehrt, dass der Punkt M_s dem Pole immer näher liegt wie der Punkt M, dass mithin im Vorzeichen von $\Delta\varphi$ keine Aenderung eintreten kann und dieses stets positiv ist. Das Vorzeichen von Δa und Δz hängt demgemäss, da auch R_* nur positiv ist, nur von z und a ab, und da in den Gleichungen (17) und (23) das erste Glied das bei weitem überwiegende ist, dürfen wir uns einmal erlauben, bei der Aufstellung einiger Sätze die weiteren Glieder zu vernachlässigen. Da ausserdem z nur Werthe zwischen 0^0 und 90^0, a aber Werthe zwischen 0^0 und 360^0 erhält, so leuchtet ein, dass für Δa in Gl. (17) nur das Vorzeichen von $sin\, a$ entscheidend ist, und somit

Δa positiv wird für a gleich 0^0 bis $a = 180^0$
„ negativ „ „ a „ 180^0 „ $a = 360^0$

Was Δz Gl. (23) anlangt, so hängt sein Vorzeichen ausser von z auch noch von μ ab und da μ gemäss Gl. (24) das Vorzeichen von $cos\, a$ erhält, so kann μ an und für sich sowohl positiv wie negativ ausfallen. Beachten wir aber, dass $\Delta\varphi$ eine kleine Winkelgrösse, und $\Delta\varphi . cos\, a$ noch kleiner wie $\Delta\varphi$ ist, so wird μ höchstens gleich $\Delta\varphi$ werden können und somit $cos\, \mu$ immer positiv sein. Es entscheidet jetzt nur noch das Vorzeichen von $sin\,(z - \mu)$ und wird $sin\,(z - \mu)$ negativ, wenn $z < \mu$ d. h. $z < \Delta\varphi . cos\, a$ und gleichzeitig μ selbst positiv ist, weil sonst $z - (-\mu) = z + \mu$ und auch $sin\,(z + \mu)$ positiv würde. Es kann also ein negatives Δz nur für a zwischen 0^0 und 90^0 oder zwischen 270^0 und 360^0 eintreten. Beschreibt man demnach um M_s einen Kreis mit dem Halbmesser $\mu = \Delta\varphi . cos\, a$, so werden für alle Punkte s, die man innerhalb dieses kleinen Kreises im ersten und vierten Azimuthalquadranten annimmt, Punkte s existiren, für welche $M_s s_s < M_s s$ ausfällt.

Für $z = 90^0$ wird, wenn wir wiederum blos das erste Glied berücksichtigen,

$$\Delta z = T_*$$

sein, d. h. für alle Azimuthe denselben Werth erhalten und stets positiv sein. Daher der Satz:

Die Parallaxe verzögert den Aufgang der Gestirne und beschleunigt ihren Untergang.

Beim Mond z. B. ist am 1. Sept. 1870 für Greenwich im Mittel $p = 59' 15'' = 3555''$; demnach

$$\Delta z = 3555'' . \varrho . \cos \Delta \varphi = 3548'' = 237^s$$

welche Grösse mit $\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi - \delta)}}$ gemäss Gl. (4) des vierten Kapitels multiplicirt das von der Parallaxe herrührende Δt liefern würde, falls man das δ für den Mond ähnlich wie auf S. 163 bei der Sonne berechnete.

§. 40. Um einen Ausdruck für $\Delta\alpha = (\alpha' - \alpha)$ und $\Delta\delta = (\delta' - \delta)$ zu finden, beachten wir in Fig. 43, dass im Dreieck $sPs_,$ die Seite $Ps_, = 90^0 - q_, s_, = 90^0 - \delta'$ und demgemäss, wenn wir des geringen Unterschieds von δ' und δ halber statt δ' ein δ schreiben:

$$\frac{\sin \Delta\alpha}{\sin(ss_,P)} = \frac{\sin p}{\cos \delta}$$

im Dreieck $Ps_,M$ aber, wenn wir den Bogen ΥQ als die Sternzeit ansehen und diese mit t bezeichnen:

$$\sphericalangle\, s_,PM = t - \alpha' = t - (\alpha - \Delta\alpha)$$

mithin

$$\frac{\sin(ss_,P)}{\sin[t - (\alpha - \Delta\alpha)]} = \frac{\cos \varphi_0}{\sin z_0'}$$

ist und demnach

$$\sin \Delta\alpha = \frac{\sin p}{\sin z'_0} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{\cos \delta} \cdot \sin[t - (\alpha - \Delta\alpha)]$$

wird. Entwickeln wir nach $(t - \alpha)$ und $\Delta\alpha$ und setzen

$$\frac{\sin p}{\sin z'_0} \cos \varphi_0 = \varrho . \sin \pi_0 \cos \varphi_0 = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

so ergiebt sich

$$\tang \Delta\alpha = \frac{\frac{S}{\cos \delta} \sin(\alpha - t)}{1 - \frac{S}{\cos \delta} \cos(\alpha - t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

oder wenn wir wiederum ein S_* einführen in eine Reihe entwickeln und beachten, dass $\Delta\alpha$ der Figur gemäss negativ ausfällt:

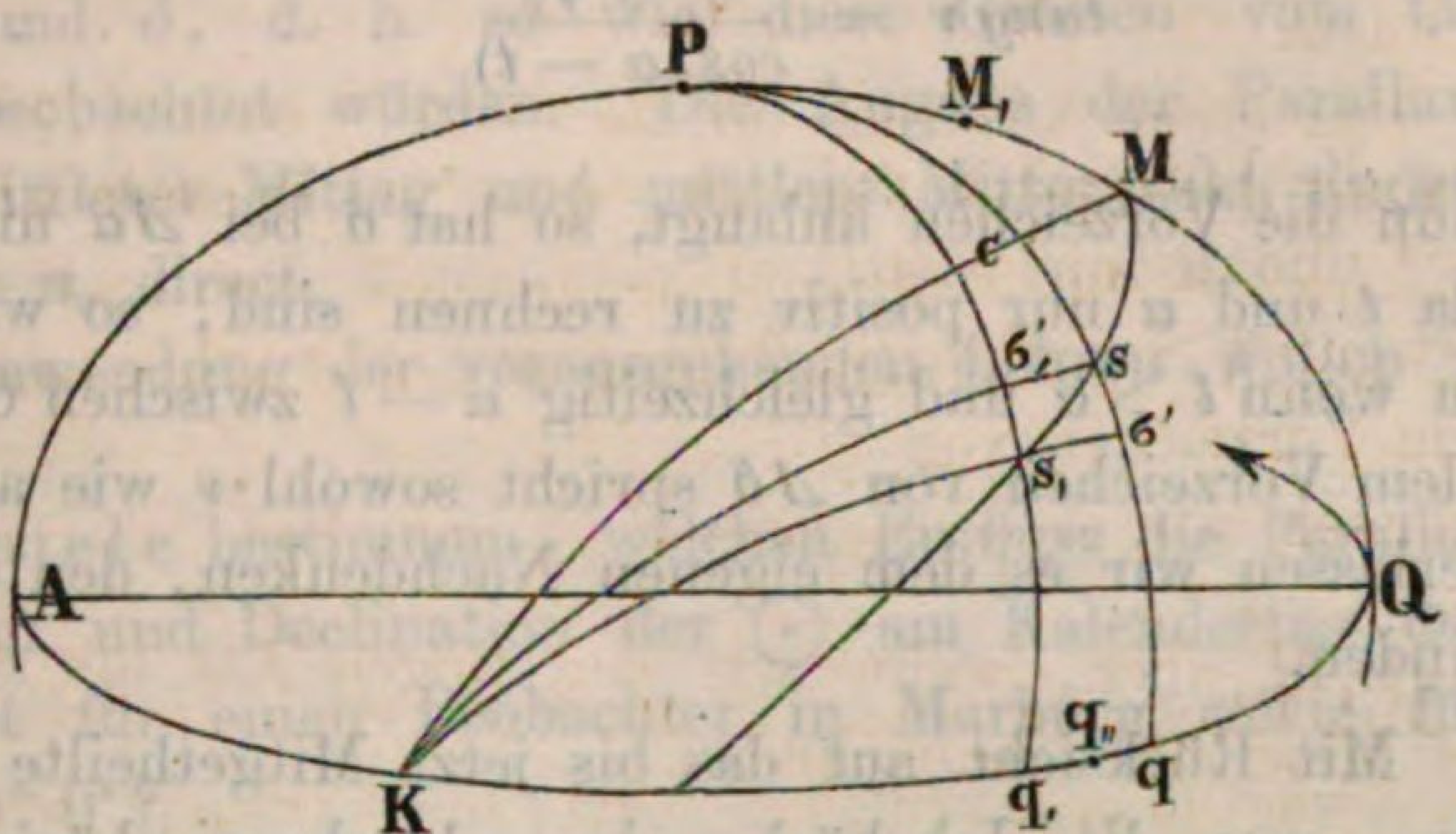
$$\Delta\alpha = \frac{S_*}{\cos \delta} \sin(\alpha - t) + \frac{1}{206265} \frac{1}{2} \left(\frac{S_*}{\cos \delta}\right)^2 \sin 2(\alpha - t) + \quad . \quad (28)$$

Um $\Delta\delta$ zu finden, entwerfen wir uns wiederum eine Copie der Figur 43, worin nur diejenigen Punkte und Linien vorkommen, die wir jetzt brauchen. Gehen wir in ihr, Fig. 45, auf dem Aequator Q von einem zwischen q und $q_,$ in der Mitte gelegenen Punkte $q_{,,}$ um 90^0 weiter bis zu einem Punkte K und legen durch K einerseits und M, s und $s_,$ andererseits grösste Kreise, so sind die Verhältnisse ganz analog denen der Fig. 44. Denn es ist

$$ss_, = p;\ Ks \text{ nahezu } 90^0;\ s\sigma' = s_,\sigma_,' = \sphericalangle\, sKs_, = \Delta\delta.$$

Bezeichnen wir dann noch den Winkel $QKM = qKc$ mit ν und beachten, dass $\angle Ms,K = ss,K$, ferner dass $s,KQ = \delta - \Delta\delta$ und hiernach $s,KM = \nu - (\delta - \Delta\delta)$, so ist im Dreieck $sKs,$

Fig. 45.



$$\frac{\sin \Delta\delta}{\sin (ss,K)} = \frac{\sin p}{\sin (Ks)} = \sin p;$$

ferner im Dreieck Ms,K

$$\frac{\sin (ss,K)}{\sin [\nu - (\delta - \Delta\delta)]} = \frac{\sin (MK)}{\sin z'_0};$$

ferner im Dreieck MKQ

$$\sin \nu = \frac{\sin \varphi_0}{\sin (MK)}$$

mithin nach der Multiplication der letzten drei Gleichungen

$$\sin \Delta\delta = \frac{\sin p}{\sin z_0'} \frac{\sin \varphi_0}{\sin \nu} \sin [\nu - (\delta - \Delta\delta)].$$

Entwickeln wir wiederum nach $(\nu - \delta)$ und $\Delta\delta$ und setzen einfach

$$\frac{\sin p}{\sin z^0,} \cdot \sin \varphi_0 = \varrho \cdot \sin \pi_0 \cdot \sin \varphi_0 = U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

so erhalten wir nach entsprechender Reduction

$$\tang \Delta\delta = \frac{\frac{U}{\sin \nu} \sin (\nu - \delta)}{1 - \frac{U}{\sin \nu} \cos (\nu - \delta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

oder wenn wir wiederum ein U_* einführen, in eine Reihe auflösen und beachten dass $\Delta\delta$ der Figur gemäss negativ ausfällt

$$\Delta\delta = \left[\frac{U_*}{\sin \nu} \sin (\delta - \nu) + \frac{1}{206264} \frac{1}{2} \left(\frac{U_*}{\sin \nu}\right)^2 \sin 2(\delta - \nu)\right] \quad . \quad (31)$$

Zur Beurtheilung des ν erhalten wir aus dem bei c rechtwinkligen

Dreieck PcM, in welchem $\sphericalangle cPM = t - \alpha$, $PM = 90^0 - \varphi_0$; $Pc = 90^0 - \nu$ ist, jetzt

$$tang(90^0 - \nu) = tang(90^0 - \varphi_0)\ cos(t - \alpha)$$

oder

$$tang\,\nu = \frac{tang\,\varphi_0}{cos(\alpha - t)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Was nun die Vorzeichen anlangt, so hat δ bei $\Delta\alpha$ nichts mitzureden und da t und α nur positiv zu rechnen sind, so wird $\Delta\alpha$ negativ werden wenn $t > \alpha$ und gleichzeitig $\alpha - t$ zwischen 0^0 und 180^0 liegt. Bei dem Vorzeichen von $\Delta\delta$ spricht sowohl ν wie auch $(\delta - \nu)$ mit und überlassen wir es dem eigenen Nachdenken, den Zusammenhang aufzufinden.

§. 41. Mit Rücksicht auf das bis jetzt Mitgetheilte wollen wir weiter sehen, was die Jahrbücher bzw. hierher gehörige Tabellen uns unmittelbar an die Hand geben, wobei wir uns jedoch auf die Sonne und den Mond beschränken.

Was die Sonne betrifft, so giebt das Berliner Jahrbuch von 1870 auf S. 100 mit der Ueberschrift „Par. ☉“ die Grösse π_0 direct, die natürlich das Jahr hindurch nicht ganz dieselbe bleibt, weil die Sonne nicht immer in derselben Entfernung zu uns steht und sonach π_0 zur Zeit des Perihels ein Maximum gleich 8″,72, zur Zeit des Aphels ein Minimum gleich 8″,44 erreicht. Diese Angaben gehen von 10 zu 10 Tagen. In gleicher Weise findet man diese Werthe im N. A. S. 242; nur stimmen die letzteren Werthe mit denen im Berliner Jahrbuche nicht überein, weil im Berliner Jahrbuch für π_0 bei der mittleren Entfernung der ☉ von der Erde der Werth 8″,57 im N. A. aber 8″,95 angenommen ist.

Für den Mond würden solche Angaben von 10 zu 10 Tagen nicht genügen und findet man desshalb im B. J. auf den Seiten III und V_6 eine Columne

„*Log sin.*
A. H. Par. ☾“

d. h. $log\,sin\,\pi_0$ oder der Logarithmus der Aequatorial-Horizontalparallaxe des Monds für den Moment: Mittlerer Mittag und mittlere Mitternacht also für je 12 Stunden angegeben. Am 26. October 1870 Mittags ist z. B. $log\,sin\,\pi_0$ gleich 8,24966. Addiren wir hierzu den $log\,206265 = 5{,}31442$, so erhalten wir

$$log\,\pi_0 = 3{,}56408$$

oder

$$\pi_0 = 3665'',1 = 61' \, 5'',1.$$

Der N. A. enthält über den Mond, was zunächst die Rectascension und Declination betrifft, ausführlichere Angaben auf den Seiten V bis XII* für jede Stunde des Tages berechnet und zwar als unsere Winkel α und δ, d. h. so wie diese Grössen vom Centrum der Erde aus beobachtet würden. Die Angabe der Parallaxe für den Moment: mittlerer Mittag und mittlere Mitternacht findet man III_7 und III_8 als π_0 direct.

Als Anwendung der vorausgehenden Lehren wollen wir in dem folgenden

Beispiele bestimmen, welchen Einfluss die Parallaxe auf die Rectascension und Declination der ☉ am Kalendertag des 20. März 1870 ausübt für einen Beobachter in Marburg sowie für $SZ = t$ gleich $20^h \, 0^m \, 0^s$?

Auflösung. Es ist für Greenwich

$$\text{20. März 1870} \quad \dot{AR}☉ = 23^h \, 58^m \, 52^s,61;$$

$$\text{vom 20. auf 19. März} \quad \Delta \dot{AR}☉ = -3^m \, 38^s,43 = -218^s,43$$

$$\text{Decl.} ☉ = -\ 7' \, 18'',3$$

$$\Delta\delta☉ = -23 \ 41 \ ,3 = -1421'';$$

mithin ist die zwischen dem Momente t und dem Greenwicher wahren Mittag liegende Zeit gleich

$$23^h \, 58^m \, 52^s,6 + 35^m \, 5^s,6 - 20^h = 4^h \, 33^m \, 58^s = 16438^s;$$

hiernach also

$$\text{Corr. } AR = -\frac{218 \, . \, 16438}{86400 + 218} = -41^s,3$$

und für Marburg im Momente $t = 20^h$ die

$$AR☉ = \alpha = 23^h \, 58^m \, 52^s,6 - 41^s,3 = 23^h \, 58^m \, 11^s,3$$

$$\alpha - t = 3^h \, 58^m \, 11^s,3 = 59^0 \, 32' \, 49'';$$

ferner

$$\text{Corr. Decl.} = -\frac{1421 \, . \, 16438}{86618} = -269'',7 = -4' \, 29'',7$$

$$\delta = -7' \, 18'',3 - 4' \, 29'',7 = -11' \, 48'';$$

endlich

$$\text{22. März } \pi_0 = 8'',98;$$

$$\text{12. ,, ,, } = 9 \ ,00$$

$$\text{und 20. ,, ,, } = 8 \ ,984.$$

$$\varphi_0 = 50^0 \, 37' \, 30''.$$

Demnach gestaltet sich nun die Rechnung gemäss Gl. (26) und (28) bzw. (29), (32) und (31), wenn wir blos das erste Glied der Reihe berücksichtigen wie folgt:

$\log \pi_0$	0,95347	$\log tang\, \varphi_0$	0,08583	$\log(\pi_0 . \varrho)$	0,95260
$\log \varrho$	9,99913	$\log \cos(\alpha - t)$	9,70486	$\log \sin \varphi_0$	9,88819
	0,95260	$\log tang\, \nu$	0,38097	$\log U_*$	0,84079
$\log \cos \varphi_0$	9,80236	$\nu =$	$67^0\, 25'$	$\log \sin(\delta - \nu)$	$9{,}96596_n$
$\log S_*$	0,75496	$\delta - \nu =$	$-67^0\, 36'\, 48''$		$0{,}80675_n$
$\log \sin(\alpha - t)$	9,93552			$\log \sin \nu$	9,96535
	0,69048				$0{,}84140_n$
$\log \cos \delta$	0,00000			$\Delta\delta =$	$-6''{,}9.$
$\log \Delta \alpha$	0,69048				
$\Delta\alpha =$	$4''{,}9.$				

Die Höhenparallaxe p wäre aber, wenn wir p, $\Delta\delta$ und $\Delta\alpha$ als Seiten eines ebenen Dreiecks ansehen und $\Delta\alpha = qq_{,,}$ da der Mond im gegebenen Falle nahe am Aequator steht, als identisch mit der Seite s,σ' Fig. 45 betrachten, gleich

$$p = \sqrt{(4{,}9)^2 + (6{,}94)^2} = 8''{,}49.$$

Das Beispiel, welches wir wählten, setzte voraus, dass die geocentrischen Coordinaten α und δ, die auch in den vorausgehenden Gleichungen vorkommen, gegeben waren bzw. sich leicht berechnen liessen. Der Fall kann aber auch anders liegen und stehen uns, wenn z. B. die verschiedenen Winkel direct aus der Beobachtung gegeben sind, zunächst nicht die geocentrischen Winkel α, δ, a und z, sondern die scheinbaren Werthe α', δ', a' und z' zu Gebote. Dies angenommen könnte man glauben, dass die mitgetheilten Formeln zur Berechnung von Δa, Δz, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ nicht brauchbar wären. Man sieht jedoch sofort ein, dass man in derartigen Fällen zunächst die scheinbaren anstatt der geocentrischen einsetzen und mit diesen sich ein vorläufiges $\Delta a'$, $\Delta z'$ ... berechnen könnte; hätte man dies, so könnte man nun die angenäherten geocentrischen Coordinaten $a = a' - \Delta a'$, $z = z' - \Delta z'$ .... bilden und mit diesen die Berechnung von Δa, Δz wiederholen. Bei der Sonne und den Planeten, wo die Parallaxe π_0 einen geringen Werth hat, wird man dies Verfahren aber überhaupt nicht einzuhalten brauchen und wird man unmittelbar mit den gegebenen scheinbaren Grössen die Berechnung von Δa ... vornehmen. Beim Monde dagegen wird es vorkommen können, dass eine solche directe Einführung der scheinbaren Coordinaten nach einer einmaligen Rechnung noch nicht die gewünschte Genauigkeit der Werthe von Δa etc. lieferte und müsste demgemäss die Rechnung in der angegebenen Weise wiederholt werden.

§. 42. Es wird nicht ohne Interesse sein, hier noch einige Angaben über die Parallaxe der Sonne, des Monds und der Planeten folgen zu lassen. Was zunächst die Sonne anlangt, so ist bei ihr die Grösse π_0

noch nicht als eine genau feststehende anzusehen. Der Venusdurchgang am 8. December 1874 wurde daher als ein überaus wichtiges Ereigniss angesehen und trägt sicher dazu bei, dass wir diese wichtige Grösse genauer kennen lernen, da wir mit ihr erst im Stande sind, E_0 oder die Entfernung der Sonne von der Erde genau zu finden. Nach der Zusammenstellung von H. J. Klein*), der wir die folgenden Daten entnehmen, ist die Horizontalparallaxe der Sonne,

nach	Leverrier	gleich	8″,950	und E_0	=	19805000	geogr.	Meilen.
„	Hansen	„	8 ,916	„ „	=	19875000	„	„
„	Wineke	„	8 ,964	„ „	=	19770000	„	„
„	Foucault	„	8 ,942	„ „	=	19825000	„	„
„	Stone	„	8 ,924	„ „	=	19860000	„	„
„	Hall	„	8 ,850	„ „	=	20023000	„	„
„	Powalky	„	8 ,860	„ „	=	20009000	„	„

Beim Monde entspricht der nach den neuesten und zuverlässigsten Bestimmungen von Breen im Mittel 57′ 2″,7 betragenden Aequatorialhorizontal-Parallaxe eine Entfernung von 51800 geogr. Meilen. Die Extreme der Aequatorialhorizontal - Parallaxe sind 61′ 30″ und 53′ 48″ und würden diesen die Entfernungen des Monds von der Erde gleich $\frac{57' \, 3'' \, . \, 51800}{61' \, 30''}$ und $\frac{57' \, 3'' \, . \, 51800}{53' \, 48}$ oder 48052 und 54929 Meilen entsprechen.

Ebenso geben wir eine Zusammenstellung der Parallaxen der Hauptplaneten nebst ihren geocentrischen scheinbaren Halbmessern. Sie finden sich im Nautical Almanac Seite 301 unter der Ueberschrift „Aequatorial-Horizontal Parallaxes and Semidiameters at Mean Noon.“

1870.

	Parallaxe:	Halbmesser.
Merkur	6″,2 bis 16″,3	2″,5 bis 6″,1
Venus	5 ,2 „ 32 ,4	4 ,9 „ 30 ,1
Mars	3 ,7 „ 7 ,6	2 ,3 „ 4 ,7
Jupiter	1 ,5 „ 2 ,2	16 ,5 „ 24 ,2
Saturn	0 ,8 „ 1 ,0	7 ,4 „ 9 ,0
Uranus	0 ,5	1 ,9 „ 2 ,1

Alle unsere Betrachtungen bezogen sich bis jetzt auf die sogenannte „tägliche Parallaxe“ und ist dies der Winkel, unter welchem der Erdhalbmesser von der Sonne, dem Mond und den übrigen Planeten aus gesehen wird. Dieser Winkel ist schon für den Uranus

*) Hermann J. Klein: „Das Sonnensystem nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft.“ Braunschweig, Vieweg. 1869. S. 9.

nur noch eine halbe Secunde; für die Fixsterne ist er aber unbedingt gleich Null zu setzen. Anstatt der täglichen kommt aber bei ihnen eine andere Parallaxe, die sogenannte „jährliche Parallaxe“ in Betracht, oder der Winkel, unter welchem die grosse Strecke des Erdbahnhalbmessers, die wir rund zu 20000000 Meilen annehmen, von den Fixsternen aus beobachtet erscheinen würde. Selbst bei dieser grossen Strecke hat es aber lange gedauert, bis man mit Sicherheit im Stande war, eine Parallaxe zu constatiren, und beträgt dieselbe z. B. für den Stern 61 Cygni 0″,37, wonach sich die Entfernung dieses Sterns von der Sonne zu $\frac{206265 \,.\, 20000000}{0{,}37}$ oder in runder Zahl, wenn man den Halbmesser der Erdbahn oder die Erdweite gleich 1 setzt, zu 557473 Erdweiten. Für unsere Zeitbestimmungen hat diese Parallaxe der Fixsterne, wie schon im ersten Kapitel erwähnt, demnach keinen Einfluss und haben wir ihrer hier bloss im Anschluss an das Vorausgehende gedacht.

IV. Scheinbare Durchmesser der Gestirne.

§. 43. Sehr häufig wird bei Zeitbestimmungen es nöthig sein, die Sonne oder den Mond zu beobachten und wird von vornherein die Frage entstehen, welcher Punkt der Sonnen- oder Mondscheibe soll denn hierbei gewählt werden? Es wird dies nun nicht von unserer Willkür abhängen, sondern ist zunächst klar, dass es die Ränder dieser Lichtscheiben sein werden, die sich am schärfsten bei ihrer Fortbewegung in einem Fernrohr verfolgen lassen. Ihre Berührung mit den Fäden eines Fernrohrs wird sich deutlich erkennen lassen und werden es die Zeiten der Faden-Antritte oder Austritte sein, die man zunächst feststellen kann. Dennoch aber wird man genöthigt zu fragen: welche Zeit würde beobachtet worden sein, wenn man nicht den Durchgang eines Randes der Scheibe durch den Faden, sondern den Durchgang des Mittelpunkts selbst hätte beobachten können. Um einen solchen Fall sofort zu bezeichnen, wollen wir denken, man hätte den Durchgang der Sonne durch den Meridian bestimmen wollen und wäre nur im Stande gewesen, den ersten Rand, also den westlichen, in seinem Antritt an den mittleren Faden etwa um $12^h\ 15^m\ 3^s{,}5$ mittlerer Zeit nach der bei der Beobachtung verwendeten Uhr zu beobachten, der Antritt des zweiten Randes sei aber durch inzwischen sich vorlegende Wolken vereitelt worden und entstehe die Aufgabe, die Zeit anzugeben für den Durchgang des Centrums der Sonne. Diese Aufgabe lässt sich nur lösen, wenn man den scheinbaren Durchmesser der

Sonne kennt und wollen wir die einfache Berechnung der Durchgangszeit des Centrums nun kennen lernen.

Da der scheinbare Durchmesser eines Gestirns vom Centrum der Erde aus gesehen, insbesondere der Durchmesser der ⊙ und des ☾ von der Entfernung dieser Gestirne von der Erde abhängt, so wird eine Veränderlichkeit desselben innerhalb gewisser Grenzen zu erwarten sein. Der Bedeutung der genauen Kenntniss dieser beiden Durchmesser wegen ist desshalb der geocentrische Halbmesser der ⊙ in den Ephemeriden von Tag zu Tag, der des Monds im Berliner Jahrbuch und im N. A. von 12 zu 12 Stunden angegeben. Im ersten Jahrbuche nämlich auf den Seiten II in der 9. Columne für die ⊙ und auf den Seiten III in der 8. Columne für den ☾, im Nautical Almanac dagegen in II_5 für die ⊙, in III_5 und III_6 für den Mond. So z. B. giebt der N. A. 1870 am 20. Jan. im mittleren Mittag den R_0☾, wenn wir hierunter den geocentrischen Halbmesser des Monds verstehen, zu 16′ 14″,1 um Mitternacht zu 16′ 15″,1 an und verändert sich dieser in 12^h um $\left(\frac{1{,}0}{12}\right)''$ in einer Minute um $\left(\frac{1{,}0}{760}\right)''$. Da nun Berlin von Greenwich in runder Zahl um $53^m{,}5$ östlich liegt, so wird der scheinbare R_0☾ für Berlin im Mittag $16'\,14'',1 - \frac{53{,}5}{720} = 16'\,14'',1 - 0'',074$ gleich 16′ 14″,03 sein müssen, wie er in der That im Berliner Jahrbuch zu finden ist, indem hier mit der Abrundung auf die erste Stelle nach dem Komma steht 16′ 14″,0. Der scheinbare R⊙ für Berlin 1870 21. März Mittags beträgt 16′ 4″,0, am 22. März 16′ 3″,7 und ist demgemäss die 24stündliche Aenderung gleich $\frac{0'',3}{24}$ und die Aenderung in einer Minute $\frac{0'',3}{24\,.\,60}$. Die Correction für Greenwich würde $\frac{53.0'',3}{24\,.\,60}$ oder 0″,01 betragen und müsste demnach der Greenwicher R⊙ gleich 16′ 3″,9 sein, während ihn der N. A. für 21. März zu 16′ 4″,9, also um eine ganze Secunde grösser angiebt. Der Grund hiervon liegt darin, dass beide Jahrbücher in Bezug auf die Constante: „mittlerer R⊙“ oder den Halbmesser der ⊙ bei ihrer mittleren Entfernung von der Erde ebenso wie in Bezug auf die Grösse π_0 von einander abweichen. Der N. A. nimmt nämlich diese Constante nach seiner Angabe pag. V. der Vorrede zu 16′ 1″,82, das Berliner Jahrbuch dagegen nahezu um eine Secunde kleiner an, indem es*) den Werth 16′ 0″,9 gebraucht.

---

*) Die Grösse 16′ 0″,9 wurde im Berliner Jahrbuch bis zum Jahre 1870 beibehalten, während jetzt ein Werth gleich 16′ 1″,2 zu Grunde liegt.

Der Beobachter steht nun aber nicht im Centrum der Erde, seine Entfernung von der ☉ oder dem ☾ ist nicht die Strecke CS Fig. 43, die wir S. 185 mit e_0 bezeichneten, sondern eine Strecke $MS = e$ und werden wir einen etwas anderen Durchmesser von den beiden Standpunkten C und M aus messen. Der Kleinheit der Winkel wegen werden sich die scheinbaren Durchmesser umgekehrt wie die Entfernungen verhalten, und wird

$$\frac{R}{R_0} = \frac{e_0}{e} \text{ oder } R = R_0 \frac{e_0}{e}$$

sein. Die Entfernungen e_0 und e sind uns aber nicht unmittelbar gegeben und suchen wir desshalb $\frac{e_0}{e}$ durch ein anderes Verhältniss zu ersetzen. Die Figur 43 lässt nämlich erkennen dass

$$\frac{e_0}{e} = \frac{\sin(SMC)}{\sin(SCM)} = \frac{\sin(S,CM)}{\sin(SCM)} = \frac{\sin(Ms,)}{\sin(Ms)}$$

Ferner ergiebt sich aus den Dreiecken MKs und $MKs,$ Fig. 45, weil darin Ks und $Ks,$ sehr nahe gleich 90^0 sind und der Winkel $MKQ = \nu$, $sKQ = \delta$, $s,KQ = \delta'$ ist,

$$\frac{\sin(\nu - \delta)}{\sin(KMs)} = \frac{\sin(Ms)}{\sin 90^0} \text{ und } \frac{\sin(\nu - \delta')}{\sin(KMs)} = \frac{\sin(Ms,)}{\sin 90^0}$$

demnach

$$\frac{\sin(Ms,)}{\sin(Ms)} = \frac{\sin(\nu - \delta')}{\sin(\nu - \delta)} = \frac{e_0}{e}$$

und hiermit auch

$$R = R_0 \frac{\sin(\delta - \nu')}{\sin(\delta - \nu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Hat man daher aus der Parallaxenrechnung ν und δ' gefunden, so lässt sich R aus R_0 d. h. der scheinbare Halbmesser aus dem in den Jahrbüchern zu findenden geocentrischen berechnen. In unserem obigen Beispiele war

$\delta = -11' 48''$; $\Delta\delta = -6'',9$; $\delta' = -11' 55''$; $\nu = 67^0 25'$;

mithin

$$\delta - \nu' = -67^0 36' 55''$$
$$\delta - \nu = -67 \;\; 36 \;\; 48$$

woraus man schon erkennt, dass der Unterschied von R und R_0 bei der Sonne in diesem Falle gleich Null gesetzt werden darf.

Das Maximum des Unterschieds von R und R_0 überhaupt findet statt, wenn

$$e = e_0 - \varrho$$

d. h. wenn Centrum der Erde, Beobachter und Gestirn in einer Geraden liegen. Setzen wir die Erde als Kugel voraus, so wird für

$$e_0 = 20000000 \text{ geogr. Meil.}$$
$$\varrho = 858 \quad " \quad "$$

das

$$e = 19999142 \quad " \quad "$$

und demnach

$$R = R_0 \frac{20000000}{19999142}$$

$$R = R_0 + R_0 . \frac{858}{19999142} = R_0 + 0,00004\, R_0$$

woraus wir erkennen, dass bei der Sonne, wie wir schon angegeben, dieser Unterschied überhaupt vernachlässigt werden darf.

Beim Monde ist die mittlere Entfernung desselben von der Erde gleich

$$e_0 = 51800$$
$$e = 51800 - 858 = 50942$$

mithin $R = R_0 + R_0 \dfrac{858}{50942} = R_0 + 0,0168\, R_0$

d. h. wenn wir den mittleren R_0☾ $= 15' \; 32'',4 = 932''$ annehmen, wäre

$$\varDelta R = 15'',7,$$

bei dessen Vernachlässigung man einen Zeitfehler gleich

$$\varDelta \tau = \frac{15,7}{15} = 1^s,05$$

begehen würde, eine Grösse, die oft nicht übersehen werden darf.

Da wir nun schon im dritten Kapitel S. 106 gezeigt haben, wie man die Durchgangsdauer eines Gestirns mit dem scheinbaren Halbmesser R berechnet, und hierbei die Gleichungen (4) und (4_*) dieses Kapitels gelten, so hätten wir nur R nach der eben mitgetheilten Methode zu berechnen und dies in Gleichung (4) S. 106 einzusetzen. Ein Beispiel mag die Rechnung erläutern.

Aufgabe. Es soll an der Hand des N. A. für Marburg die Durchgangszeit $\varDelta t$ des Monds durch den Meridian bestimmt werden und zwar am 1. Septb. 1870.

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir, um ν zu erhalten, die Rectascension α des Monds im Momente haben, wo dieser den Meridian von Marburg passirt, daher wir zunächst diese Aufgabe zu lösen haben und wollen wir bei dieser Gelegenheit auch die Declination im Momente der Culmination bestimmen lernen. Es ist

$$1870 \text{ 1. Septb. } \overset{+}{A\!R}\bigcirc \text{ für Greenwich} = 10^h\, 41^m\, 47^s,3$$

und beträgt für denselben Moment die Sternzeit in Marburg:

$$10^h\, 41^m\, 47^s,3 + 35^m\, 5^s,6 = 11^h\, 16^m\, 52^s,9.$$

In demselben Momente giebt aber das Greenwicher Jahrbuch auf S. 166 die

$$\overset{+}{\mathcal{AR}}☾ = 15^h\ 32^m\ 54^s,7$$

und müsste demnach der Meridian von Marburg, wenn die $\mathcal{AR}$☾ sich nicht änderte, noch um den Winkel

$$4^h\ 16^m\ 1^s,8$$

weiter rotiren, welcher Winkel Sternstunden bedeutet, die bei der Verwandlung in *MZ*

$$4^h\ 15^m\ 19^s,8$$

liefern und welche Zeitgrösse um

$$15^m\ 19^s,8 = 919^s,8$$

grösser wie 4^h ist. Um 4^h *MZ* nach dem Momente 1. Septbr. 0^h Mittags giebt aber das Jahrbuch die

$$\mathcal{AR}☾ = 15^h\ 42^m\ 20^s,4$$

an mit der nächstliegenden stündlichen Aenderung gleich

$$+\ 2^m\ 21,^s8 = 141^s,8$$

so dass die Corr. ($\mathcal{AR}$☾)

$$\frac{141,8\ .\ 919,8}{3600} = +\ 36^s,2$$

ist. Mithin wäre die gesuchte $\mathcal{AR}$☾ im Momente der Culmination des ☾ für Marburg gleich

$$\mathcal{AR}☾ = 15^h\ 42^m\ 20^s,4 + 36^s,2 = \mathbf{15^h\ 42^m\ 56^s,6} = \mathbf{235^0\ 44'\ 9''}.$$

Um die dieser Rectascension entsprechende *MZ* zu finden ist

$$\begin{array}{rl} \mathcal{AR}☾ = & 15^h\ 42^m\ 56^s,6 \\ + & \\ \text{Marburger } \mathcal{AR}\bigcirc = & 10\ \ 41'\ \ 41'',6 \quad \text{(Siehe S. 142)} \\ \hline & 5^h\ \ 1^m\ 15^s,0 = SZ \end{array}$$

welche *SZ* in *MZ* verwandelt die gesuchte *MZ* im Momente der Culmination für Marburg gleich

$$\mathbf{5^h\ 0^m\ 25^s,6}$$

liefert.

Für die Declination des Monds enthält das Jahrbuch

$$1.\ \text{Septb.}\ 4^h\ \text{das}\ \delta☾ = -15^0\ 36'\ 14'',5$$

mit der nächsten stündlichen Aenderung gleich $-9'\ 54'',0 = -594''$ so dass die betreffende Correction beträgt

$$-\frac{594\ .\ 919,8}{3600} = -151'',7 = -2'\ 31'',7$$

d. h. es ist für den Moment der Culmination des ☾ in Marburg

$$\delta = -15^0\ 36'\ 14'',5 - 2'\ 31'',7 = \mathbf{-15^0\ 38'\ 46'',2}.$$

Hiernach ist es nun leicht, die eigentlich gesuchte Durchgangszeit des Monds zu finden. Denn da für den Moment der Culmination in Gl. (32) $\alpha = t$ angenommen werden muss, so ist

$$\nu = \varphi_0 = 50^0\ 37'\ 30''$$

$$\delta - \nu = -66^0\ 16'\ 16'';\ 2(\delta - \nu) = -132^0\ 32'\ 32''.$$

Ferner ist Greenwich 1. Septbr. 0^h für den Mond $\pi_0 = 59' \, 26'',5$ mit der täglichen Aenderung vom 1. Sept. rückwärts gerechnet gleich $+ 18'',6$ und beträgt mithin die Corr. für Marburg:

$$\frac{18,6 \cdot 2105}{86400} = 0'',4,$$

so dass nun

$$\pi_0 = 59' \, 26'',9 = 3566'',9$$

wird und die Rechnung gemäss Gl. (29) und (31) sich wie folgt gestaltet:

$$\begin{aligned}
log\, \pi_0 &= 3,55229 \\
log\, \varrho &= 9,99913 \\
log\, sin\, \varphi_0 &= 9,88819 \\
\hline
log\, U_* &= 3,43961 \\
log\, sin\, \nu &= 9,88819 \\
\hline
& \ 3,55142 \\
log\, sin\, (\delta - \nu) &= 9,96163_n \\
\hline
& \ 3,51505_n \\
num. &= -3259''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
log \left(\frac{U_*}{sin\, \nu}\right)^2 &= 7,10284 \\
log\, sin\, 2(\delta - \nu) &= 9,86734_n \\
\hline
&= 6,97018_n \\
log\, (2 \cdot 206265) &= 5,61545 \\
\hline
&= 1,35473_n \\
num. &= -23''
\end{aligned}$$

mithin

$$\Delta\delta = -(3259 + 23) = -3282'' = -54' \, 42''$$

und demgemäss

$$\delta' = -15^0 \, 38' \, 46'' - 54' \, 42'' = -16^0 \, 33' \, 28''.$$

Sodann liefert das Jahrbuch am 1. Septbr. Mittags 0^h

$$R_0 ☾ = 16' \, 13'',4 = 973'',4$$

mit einer täglichen Aenderung rückwärts gerechnet gleich $+ 5'',1$, so dass eine Correction für Marburg vernachlässigt werden darf und n. Gl. (33)

$$R = 973'',4 \cdot \frac{sin\, (\nu - \delta')}{sin\, (\nu - \delta)} = 973,4 \cdot \frac{sin\, (67^0 \, 10' \, 58'')}{sin\, (66^0 \, 16' \, 16'')} = 980'',1$$

wird. Demnach wäre nun aber die ganze Durchgangsdauer des ☾ durch den Meridian von Marburg gemäss der im dritten Kapitel gegebenen Gleichung (4) gleich

$$\Delta t = \frac{1960,2}{15 \cdot cos\, \delta'} = 136^s,3 = 2^m \, 16^s,3$$

Um zuletzt auch noch die aus der Gl. (4_*) sich ergebende Corr. (Δt) zu berechnen, haben wir da die stündliche Rectascensionsänderung des ☾ gleich $141^s,8$

$$\text{Corr.}\, (\Delta t) = \frac{141,8 \cdot 136,3}{3600} = 5^s,4$$

und demgemäss nun die genaue Durchgangsdauer gleich

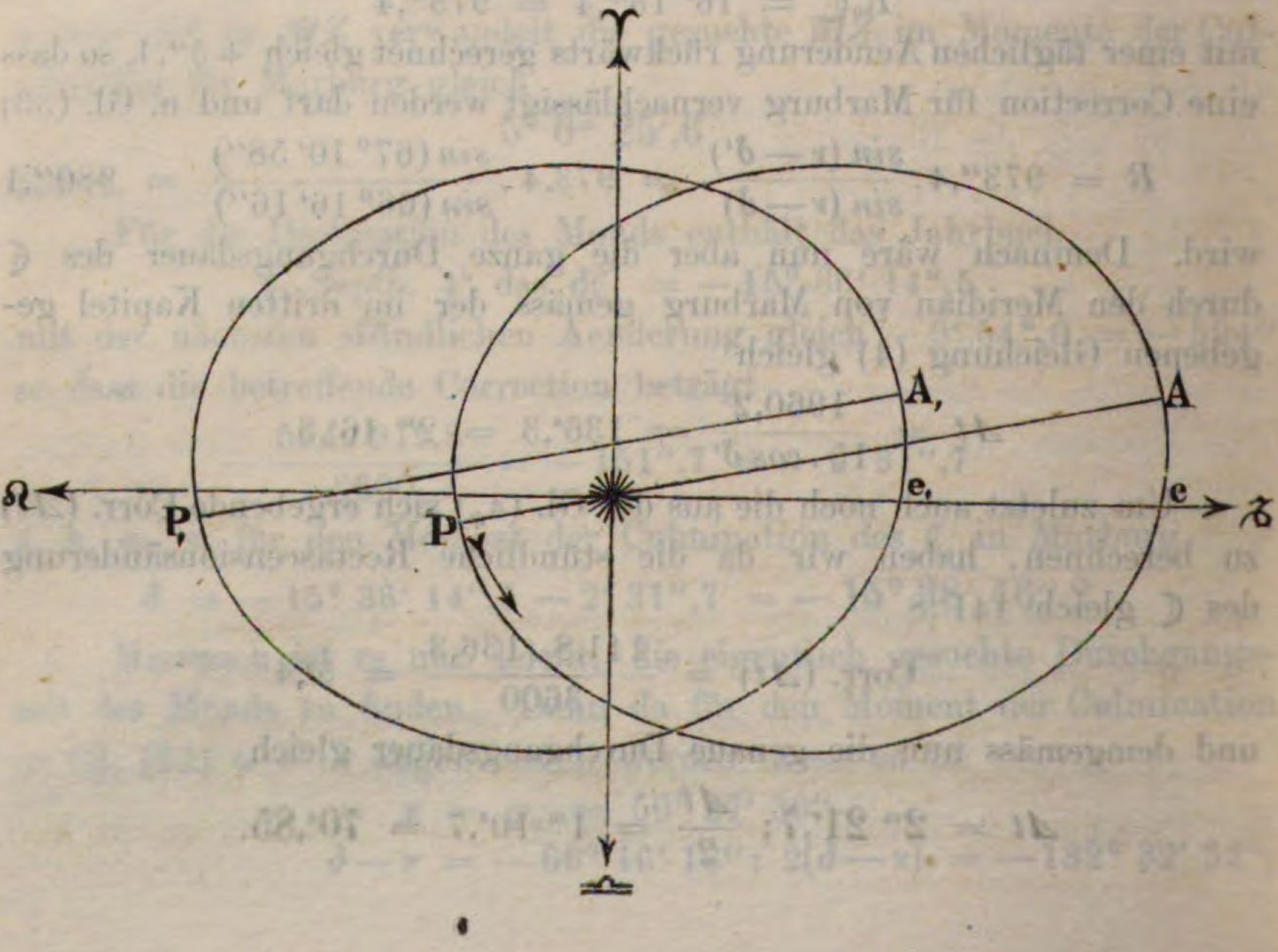
$$\Delta t = 2^m \, 21^s,7; \quad \frac{\Delta t}{2} = 1^m \, 10^s,7 = 70^s,85.$$

Wir wenden uns nun noch zur

V. Präcession, Schiefe der Ekliptik und Nutation.

§. 44. Unseren bisherigen Betrachtungen lag die Voraussetzung zu Grunde: dass die Ebene der Erdbahn im Weltraum eine völlig unveränderliche Lage einnehme, dass zweitens die Erde im Raume eine Translationsbewegung besitze in Verbindung mit einer Rotationsbewegung um ihre einer bestimmten Anfangslage stets parallel gedachte Axe, woraus folgte, dass der Erdäquator unter einem unveränderlichen Winkel ε gegen die Ekliptik geneigt blieb. Die von irgend einem Punkte der Erde beschriebene Translationscurve ist demnach parallel der Ekliptikebene und völlig congruent der vom Mittelpunkt der Erde selbst beschriebenen Ellipse; ferner muss der Durchschnittspunkt der Erdaxe selbst mit einer zur Ekliptik parallelen Ebene eine Ellipse beschreiben, welche senkrecht auf die Ekliptikebene projicirt, nicht mit der vom Erdmittelpunkt beschriebenen Ellipse zusammenfällt, sondern gegen diese parallel verschoben ist, der Art, dass der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ellipsen ebenso wie je zweier anderer zusammengehöriger Punkte der beiden Ellipsen gleich $D . \sin \varepsilon$ wird, falls wir unter D die constante Entfernung eines jener Durchschnittspunkte vom Erdmittelpunkte und unter ε die Schiefe der Ekliptik verstehen. Stellen wir uns demnach in Fig. 46 in der Ebene des Papiers die Ekliptik und unter AP die vom Erdmittelpunkt beschriebene Ellipse vor,

Figur 46.



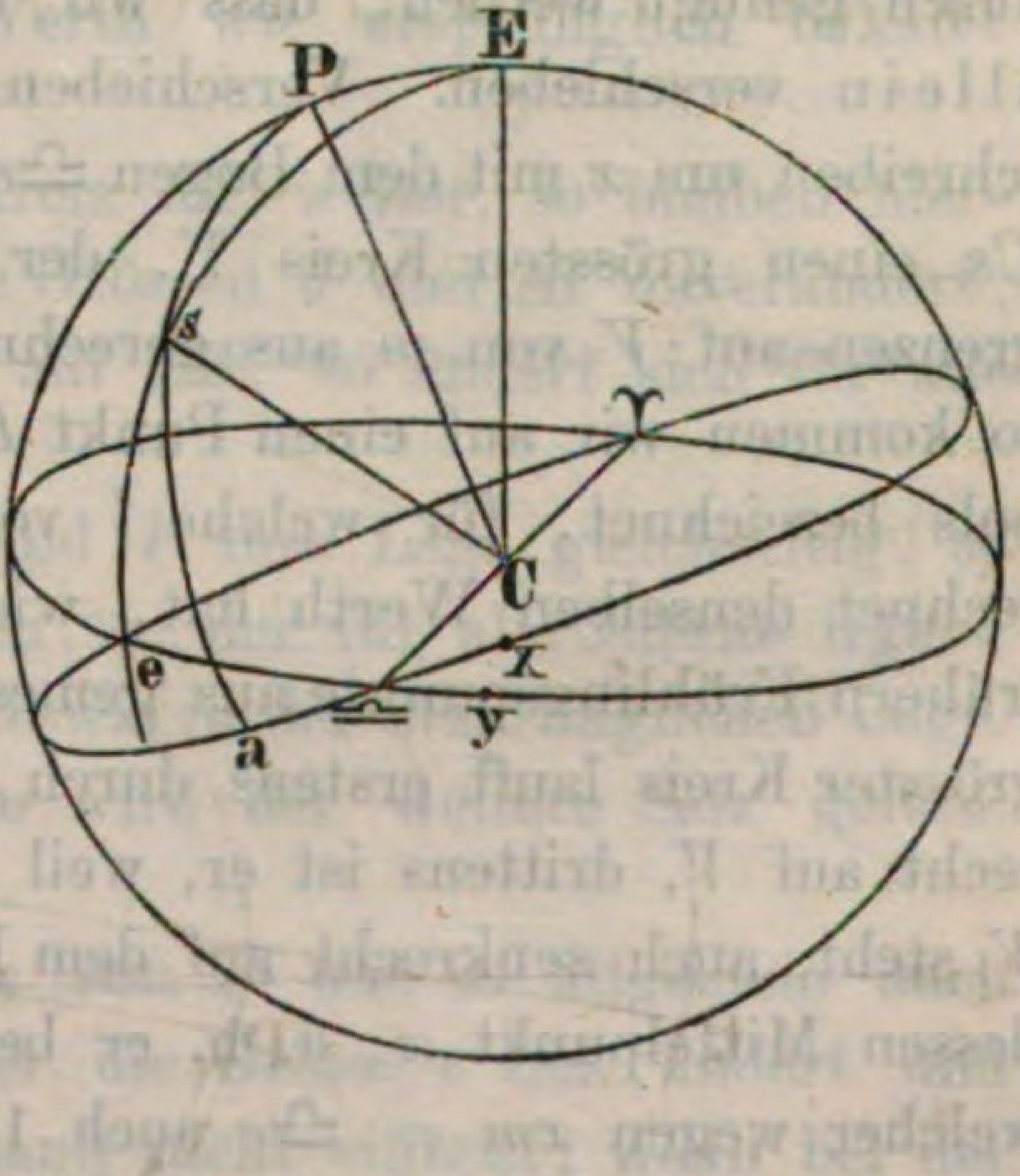
so versinnlicht die Ellipse $A,P,$ die eben angedeutete Projection, wenn D für die Figur so angenommen wird, dass es auf die Ekliptik projicirt gleich $D \cdot sin\,\varepsilon$ gleich $ee,$ ist. Denn die Erdaxe liegt, worauf wir früher schon hinwiesen, in einer zur Ekliptik verticalen und diese in der Geraden ♌♑ schneidenden Ebene, während wegen der Verschiebung der Apsidenlinie, ebenso wie in Figur 28 die grosse Axe der Ellipse, die Lage AP einnehmen muss. Die Ebene des Erdäquators sowie die Ebenen aller Aequatorialparallelkreise erweitert gedacht, schneiden demnach die Ebene der Erdbahn in einer zu ♈♎ parallel gelegenen Geraden und hat die Verschiebung der Apsidenlinie AP keinen Zusammenhang mit einer etwaigen Verschiebung der Richtung der Linie ♈♎. Die Parallel-Verschiebung der Curve $A,P,$ ist somit nicht längs AP sondern längs ♑♌ vorzunehmen.

Die nothwendige Folge hiervon war, dass bei einem Gestirne die Rectascension und Declination, ebenso Länge und Breite, wenn wir von dessen Eigenbewegung absehen und die Einflüsse der Refraction, Aberration etc. wegdenken, niemals eine Aenderung erfuhren. Sehen wir uns nun diesen Gegenstand unter weiteren Annahmen genauer an, und denken uns als beobachteten Körper einen Fixstern und zwar so weit, dass die Dimensionen der Erdbahn gegen seine Entfernung von der Erde verschwinden, so würde Fig. 47 anstatt der Erdbahn ein Punkt C als Mittelpunkt einer Kugel angenommen werden können, auf welcher, wenn Cs die Richtung nach dem Sterne bedeutet, der Bogen

♈e gleich der Länge l; ♈a = $\mathcal{AR}$
es „ „ Breite b; as = δ

ist. Es sind nun folgende Fälle einer Veränderung unserer Coordinatensysteme denkbar.

Fig. 47.



Erster Fall. Es ändert blos die Ekliptikaxe CE ihre Lage und zieht die Ebene der Ekliptik in eine andere Stellung. Da hiermit eine Verschiebung der Linie C♈ erfolgen kann, so leuchtet ein, dass nicht blos l und b, sondern auch $\mathcal{AR}$ verändert werden kann, dass dagegen

die Declination von s hierdurch keine Veränderung erleidet.

Soll hierbei insbesondere aber dennoch

1) eine Aenderung von $\mathcal{AR}$ ausgeschlossen bleiben, so ist klar,

dass dies nur dann der Fall ist, wenn die Linie $C\Upsilon$ sich nicht verschiebt was seinerseits nur wieder möglich ist, so lange die Ekliptik sich nur um $C\Upsilon$ dreht, d. h. so lange die Ekliptikaxe sich nur im „Colur der Sonnenwende“ EP verschiebt. Die Grössen b und l ändern sich dann aber unter allen Umständen, mit Ausnahme in einem singulären Fall, den wir gleich bezeichnen wollen.

Soll nämlich

2) eine Aenderung von b ausgeschlossen bleiben, so leuchtet ein, dass der geometrische Ort der Lagen des Ekliptikpols E, wofür dies stattfindet, ein um s mit dem Bogen sE beschriebener (kleinerer) Kreis g ist. Denn da $sE = 90^0 - b$ ist, so wird, wenn sE sich nicht ändert, auch b sich nicht ändern. Da nun dieser Kreis den Colur der Sonnenwende entweder im Punkte E berührt oder ihn in E und noch einem zweiten Punkte E' durchschneidet, bestimmt dieser Punkt E' mit dem Punkt C eine neue Lage CE', für welche gleichzeitig ausser $\mathcal{R}$ auch noch b ohne Aenderung bleibt und nur l sich ändert. Soll aber

3) eine Aenderung in der Lage von CE keine Aenderung von l für einen bestimmten Stern s nach sich ziehen, so ist dies auf unzählige Weisen möglich. Die Länge l ist nämlich dann dieselbe, wenn der Bogen Υe auf der Ekliptik oder auch der Bogen ♎e derselbe bleibt. Da in unserem ersten Falle der Aequator unveränderlich liegen bleiben soll, so kann dem jetzigen Verlangen nur dadurch genügt werden, dass wir den Punkt ♎ auf dem Aequator allein verschieben. Verschieben wir ihn aber z. B. nach x, beschreiben um x mit dem Bogen ♎e einen (kleinen) Kreis v, legen durch Cs einen grössten Kreis V, der v in einem Punkte m berührt und grenzen auf V von m aus gerechnet über s einen Bogen von 90^0 ab, so kommen wir auf einen Punkt $E_{,}$, der eine solche Lage des Ekliptikpols bezeichnet, für welche l vom jetzigen Frühlingspunkt aus gerechnet denselben Werth hat, wie bei der ursprünglichen Lage vom frühern Frühlingspunkte aus gemessen. Denn ein um $E_{,}$ beschriebener grösster Kreis lauft erstens durch den Punkt m, zweitens steht er senkrecht auf V, drittens ist er, weil er durch m lauft und senkrecht auf V steht, auch senkrecht auf dem Kreise v und geht mithin auch durch dessen Mittelpunkt x, d. h. er bezeichnet die neue Ekliptikebene, auf welcher wegen $xm =$ ♎e auch $180^0 - xm = 180 -$ ♎$e = l$ ist.

Zweiter Fall. Es ändert blos die Aequatoraxe CP ihre Lage. Da hiermit eine Aenderung in der Lage von Υ verbunden ist, so leuchtet ein, dass neben $\mathcal{R}$ und δ auch l sich ändern kann, dass dagegen die Breite von s hierdurch nicht verändert wird.

Auch hierbei kann:

1) eine Aenderung von l ausgeschlossen sein, wenn P sich nur auf dem grössten Kreise PE verschiebt;

2) eine Aenderung von δ unmöglich sein, wenn P sich auf einem mit sP um s beschriebenen Kreise g_1 bewegt;

3) $\mathcal{AR}$ unverändert bleiben, wenn man eine ganz ähnliche Construction für einen Punkt y, auf der Ekliptik gelegen, wie oben für den Punkt x auf dem Aequator ausführt.

Dritter Fall. Es ändert sich die Lage von CP und CE gleichzeitig und werden somit allgemein alle vier Coordinaten $\mathcal{AR}$, δ, l und b des einen Sterns s sich ändern. Es ändert sich aber hierbei:

1) weder δ noch b, wenn der Punkt P sich auf einem Kreise g_1 vom Radius Ps und E auf einem Kreise g vom Radius Es beide um s beschrieben verschiebt. Für den Fall dass

2) diese Verschiebung von P und E auf g_1 und g sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit vollzieht, ist das neue Dreieck E_1P_1s dem ursprünglichen Dreieck EPs congruent und ist somit auch die neue Rectascension und Länge dem $\mathcal{AR}$ und l bei der ersten Coordinatenlage gleich.

Bei diesen Betrachtungen wurde immer der bestimmte Stern s festgehalten und gelten dieselben natürlich nur für ihn. Da mithin für einen zweiten Stern wieder andere Bedingungen wenn auch derselben Art gelten, so fragt es sich weiter: giebt es neue Lagen der Coordinatenaxen CP und CE, bei denen für alle Gestirne die eine oder andere Coordinate denselben Werth wie ursprünglich behält? Antwort: Bewegt sich

1) E allein auf dem grössten Kreis EP weiter, so bleiben hierdurch für alle Sterne nur die Grössen δ und $\mathcal{AR}$ unverändert;

2) bewegt sich ebenso P allein auf EP, so ändert sich für alle Gestirne weder b noch l.

Aendern aber beide Punkte E und P ihre Lage gleichzeitig, so wird es keine einzige neue Lage geben, in der für alle Sterne irgend eine Coordinate dieselbe geblieben wäre wie in der ursprünglichen Lage.

Bei allen diesen Veränderungen wird der weitere Satz gelten, dass mit

> der Aenderung in der Lage von P und E allgemein auch die Schiefe der Ekliptik oder die Grösse ε sich ändert und dass diese Aenderung nur dann nicht eintritt, wenn bei der neuen Lage der Bogen PE derselbe geblieben ist. Dies letztere wird vor allem der Fall sein, wenn wir

P um E einen Kreis oder umgekehrt E und P einen Kreis beschreiben lassen.

§. 45. Wir wollen nun gerade eine solche Bewegung, bei welcher

ein Pol sich um einen andern Pol in einem Kreise bewegt, einer genauern Betrachtung unterwerfen, indem wir allgemein den Pol, um welchen zunächst die Rotation eines andern Pols $P_{,}$ erfolgt, mit P bezeichnen und ebenso unter $P_{,,}$ einen dritten Pol verstehen, der für sich um $P_{,}$ rotirt. Die Kreise, die hierbei von $P_{,}$ um P und $P_{,,}$ um $P_{,}$ beschrieben werden, mögen k und $k_{,}$ heissen und sehen wir k und $k_{,}$ zugleich auch als die sphärischen Radien an, mit denen die betreffenden Kreise beschrieben wurden. Ferner bezeichnen wir die zu P, $P_{,}$ und $P_{,,}$ gehörigen Aequatorialkreise (Ebenen) mit A, $A_{,}$ und $A_{,,}$; einen Durchschnittspunkt von $A_{,}$ und A mit d einen solchen von $A_{,}$ und $A_{,,}$ mit $d_{,}$ dagegen einen solchen von $A_{,,}$ und A mit $d_{,,}$. Ein grösster Kreis durch die Axe CP gelegt heisse K; ebenso ein durch $CP_{,}$ und $CP_{,,}$ gelegter $K_{,}$ und $K_{,,}$. Ein grösster Kreis, der g l e i c h z e i t i g durch P und $P_{,}$ geht, heisse Q; ebenso einer der gleichzeitig durch $P_{,}$ und $P_{,,}$ lauft $Q_{,}$, sowie der durch $P_{,,}$ und P gehende $Q_{,,}$. Demnach kann K zu Q und zu $Q_{,,}$, ferner $K_{,}$ zu Q und zu $Q_{,}$ und ebenso $K_{,,}$ zu $Q_{,}$ und zu $Q_{,,}$ werden. Ebenso können $K_{,}$ und $K_{,,}$ zu jedem der drei Kreise Q, $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ senkrecht zu liegen kommen. Dies vorausgeschickt ergiebt sich nun die Richtigkeit folgender Sätze:

1) Bewegt sich $P_{,}$ um P in einem Kreise k, so beschreibt die Axe $CP_{,}$ einen kreisförmigen Kegel, dessen Spitze in C liegt, die ganze Axe also einen Doppelkegel mit der Spitze in C und dem Winkel an der Spitze gleich $2k$.

2) Jeder Aequatorialradius der Ebene $A_{,}$ für sich aufgefasst beschreibt einen zweiten kreisförmigen Kegel um die Axe CP mit dem Winkel an der Spitze C gleich $2.(90^0 - k)$ gleich $180 - 2k$.

3) Ein Durchschnittspunkt d wird auch erhalten, wenn man aus dem Punkte $P_{,}$ mit einem Bogen gleich 90^0 in A einschneidet; ebenso erhält man auch die Durchschnittspunkte $d_{,}$ und $d_{,,}$, wenn man mit einem Bogen gleich 90^0 aus dem Punkte $P_{,,}$ in $A_{,}$ und A einschneidet; die Punkte d, $d_{,}$ und $d_{,,}$ sind auch die Pole der grössten Kreise Q, $Q_{,}$ und $Q_{,,}$.

4) D r e h t s i c h d e r P u n k t $P_{,}$ u m P i n e i n e m g e w i s s e n S i n n e i m K r e i s e k um, so ä n d e r t s i c h h i e r m i t d i e N e i g u n g d e r E b e n e $A_{,}$ g e g e n A n i c h t, s o n d e r n b l e i b t s t e t s g l e i c h k.

5) Ein Durchschnittspunkt d rückt bei der gleichförmigen Rotation von $P_{,}$ um P ebenfalls mit g l e i c h f ö r m i g e r W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t auf A fort und zwar in d e m s e l b e n S i n n e wie sich $P_{,}$ um P dreht und ebenso umgekehrt: ver-

schiebt sich d auf A mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit, so thut dies auch $P_{,}$ bei seiner Drehung um P.

6) Lassen wir die Kugel um $CP_{,}$ wie die Zeichen des Thierkreises am Himmel aufeinander folgen, rotiren und gleichzeitig die Rotationsaxe $CP_{,}$ um CP, aber im entgegengesetzten Sinne den kreisförmigen Kegel beschreiben, so laufen die Punkte d nach Satz 5 in demselben Sinne wie $P_{,}$ um P, mithin im umgekehrten Sinne der Rotation der Kugel um $CP_{,}$ auf A herum.

7) Diese Sätze gelten für jeden Werth von k und ist insbesondere die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich d auf der Ebene A verschiebt, unabhängig von der absoluten Grösse des k, aber stets gleich der des Punktes $P_{,}$.

Wir können aber, wie schon angedeutet, einen Schritt weiter gehen, indem wir unsere bisherige Drehung des Pols $P_{,}$ um P beibehalten aber voraussetzen, dass nicht die in einer Kegelfläche herumlaufende Axe $CP_{,}$ sondern eine andere Axe $CP_{,,}$ die eigentliche Drehungsaxe der Kugel sei und dass der Pol $P_{,,}$ dieser dritten Axe für sich in einem Kreise $k_{,}$ um $P_{,}$ herumlauft, während $P_{,}$ auf k sich um P dreht. Die Punkte P, $P_{,}$ und $P_{,,}$ bilden sodann auf der Kugel ein sphärisches Dreieck, in welchem P unveränderlich fest liegt, während $P_{,}$ und $P_{,,}$ ihre Lage fortwährend ändern. (Der Leser wird gut thun, eine ebene schematische Figur sich zu entwerfen, welche den gestellten Anforderungen entspricht.) Mit Rücksicht auf unsere gewählten Bezeichnungen gelten dann weiter die folgenden Sätze:

8) Die Durchschnitte d und $d_{,}$ fallen zusammen, wenn $Q_{,}$ mit Q coincidirt; alsdann coincidirt aber auch $Q_{,,}$ mit $Q_{,}$ und Q und fällt somit, wenn $d_{,}$ mit d zusammentrifft, hiermit zugleich auch $d_{,,}$ zusammen.

9) Die Neigung der Ebene $A_{,}$ gegen A ist constant gleich k; die Neigung der Ebene $A_{,,}$ gegen $A_{,}$ ist ebenfalls constant gleich $k_{,}$; die Neigung von $A_{,,}$ gegen A aber ändert sich fortwährend.

10) Die variabele Neigung von $A_{,,}$ gegen A, die wir zum Unterschiede der Neigung k und $k_{,}$ mit ε bezeichnen wollen, erreicht ein Maximum, wenn die Seite $P_{,,}\,P$ des sphärischen Dreiecks $P\,P_{,}\,P_{,,}$ ein Maximum erreicht, d. h. wenn P, $P_{,}$ und $P_{,,}$ in denselben grössten Kreis fallen, oder wenn Q, $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ coincidiren und $P_{,}$ zwischen P und $P_{,,}$ zu liegen kommt.

11) Die Neigung ε ist in diesem Falle gleich

$$\varepsilon_{1} = k + k_{,}.$$

12) Die Neigung ε erreicht einen Minimalwerth, wenn die genannte Coincidenz von Q, $Q_,$ und $Q_{,,}$ stattfindet, aber $P_{,,}$ zwischen $P_,$ und P zu liegen kommt, vorausgesetzt, dass wir $k_, < k$ annehmen. Der Werth von ε ist dann gleich

$$\varepsilon_2 = k - k_,.$$

13) Hieraus ergiebt sich mit Nothwendigkeit, dass ε eine Periodicität erhält, die lediglich nur von der Zeit t, abhängt, welche $P_{,,}$ gebraucht, um seine Rotation um $P_,$ zu vollenden, wie man sofort einsehen wird, wenn man sich um einen Punkt P in der Ebene einen Kreis zieht, auf welchem $P_,$ gleichförmig fortrückt und ebenso um $P_,$ einen zweiten Kreis zieht, auf dem $P_{,,}$ sich dreht. Wäre also z. B. die Rotation von $P_{,,}$ um $P_,$ an eine Zeit $t_,$ gleich 18,6 Jahre geknüpft, so würde ε nach Ablauf dieser Zeit wieder dieselben Werthe bekommen.

Setzen wir weiterhin fest, es wäre

14) die Dauer der Rotation von $P_,$ um P z. B. an eine Zeit t gleich 25800 Jahre geknüpft, so würde innerhalb dieser Zeit ε

$$\frac{25800}{18,6} = 1388\text{mal}$$

seine Periode wiederholen.

15) Da $d_{,,}$ nach Satz 3 der Pol des grössten Kreises $Q_{,,}$ ist, so ist seine Lage auf A an und für sich unabhängig von der absoluten Grösse, der dem grössten Kreise $Q_{,,}$ angehörigen Strecke $P_{,,}P$ und kann demnach die Lage von $d_{,,}$ auf A nur abhängen von dem Winkel, den die Seite $P_{,,}P$ oder der grösste Kreis $Q_{,,}$ mit einer Anfangslage eines beliebigen grössten Kreises bildet. Nehmen wir die Anfangslage dieses letzteren dann an, wenn ein Maximum von ε eintritt, d. h. wenn $Q_{,,}$ mit $Q_,$ und Q coincidirt, und nennen diese Lage einmal Q_0, bezeichnen wir ferner die Lage, in der hierbei $d_{,,}$, $d_,$ und d zusammentreffen mit d_0, so leuchtet ein, dass die Entfernung des $d_{,,}$ von d_0 nach beiden Seiten hin zu einem Maximum wird, wenn der Winkel, den $Q_{,,}$ mit Q_0 bildet, ein Maximum geworden ist. Bezeichnen wir den Winkel zwischen Q und Q_0 mit $q_,$, den Winkel zwischen $Q_{,,}$ und Q mit $q_{,,}$, so ist der zwischen $Q_{,,}$ und Q_0 gelegene Winkel gleich

$$q = q_, + q_{,,}.$$

Nehmen wir aber an, die Winkelbewegung auf k sei verschwindend klein gegen die auf $k_,$ so dürfen wir $q_,$ gegenüber $q_{,,}$ gleich Null setzen und erhalten dann

$$q = q_{,,}.$$

Dieser Winkel $q_{,,}$ erreicht ein Maximum, wenn der Kreis $Q_{,,}$ den Kreis k, berührt, so dass der Winkel an $P_{,,}$ im Dreieck $PP_{,,}P$, ein rechter wird. Von diesem Momente an wird die Strecke $d_0 d_{,,}$ wieder kleiner und überzeugt man sich, dass die Periode des Wachsens und Abnehmens von $d_{,,}d_0$ ebenso wie die Periode des Wachsthums und der Abnahme von ε an die Zeit t, gleich 18,6 Jahre gebunden ist.

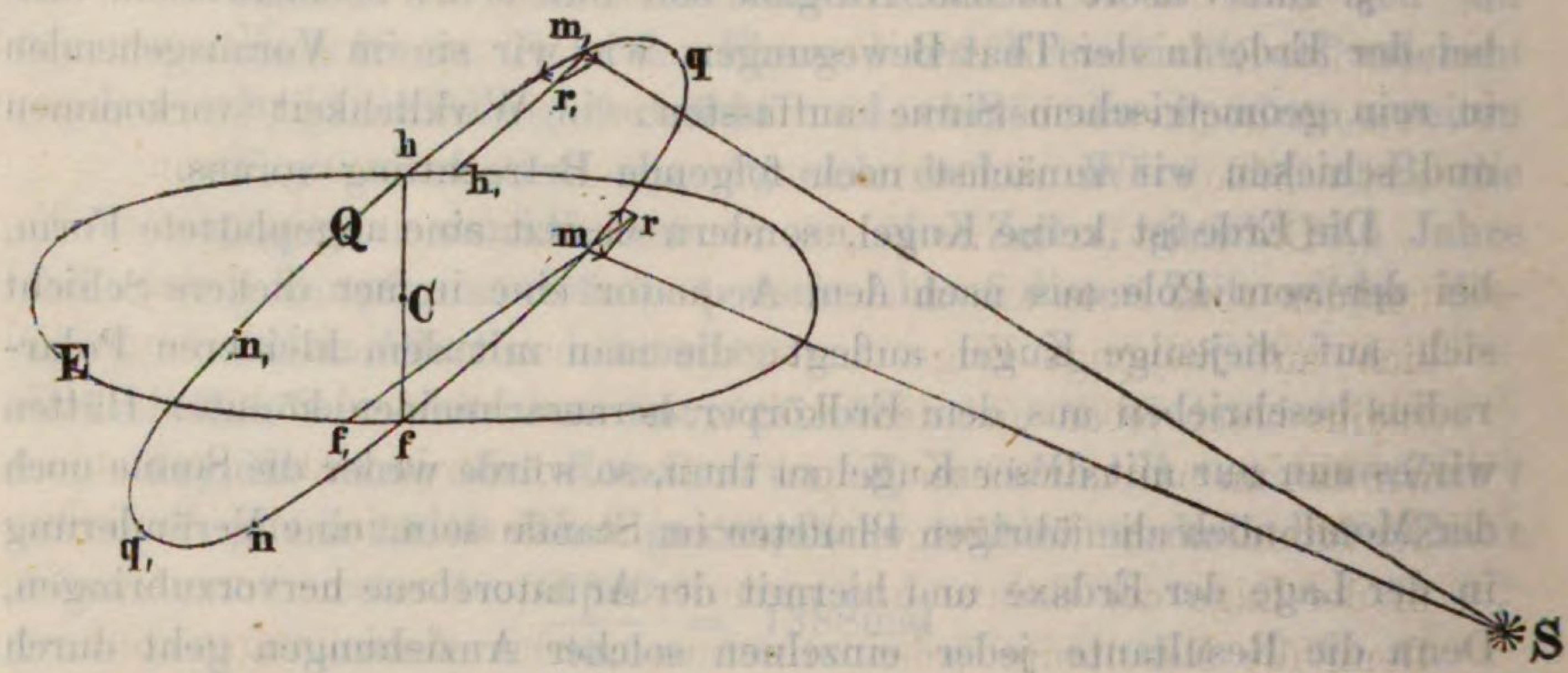
§. 46. Unsere nächste Aufgabe soll nun sein: nachzuweisen, dass bei der Erde in der That Bewegungen, wie wir sie im Voraüsgehenden in rein geometrischem Sinne auffassten, in Wirklichkeit vorkommen und schicken wir zunächst noch folgende Betrachtung voraus.

Die Erde ist keine Kugel, sondern besitzt eine abgeplattete Form, bei der vom Pole aus nach dem Aequator eine immer dickere Schicht sich auf diejenige Kugel auflegt, die man mit dem kleineren Polarradius beschrieben aus dem Erdkörper herausschneiden könnte. Hätten wir es nun nur mit dieser Kugel zu thun, so würde weder die Sonne noch der Mond noch die übrigen Planeten im Stande sein, eine Veränderung in der Lage der Erdaxe und hiermit der Aquatorebene hervorzubringen. Denn die Resultante jeder einzelnen solcher Anziehungen geht durch den Mittelpunkt der Kugel, mithin auch die Gesammtresultante und würde diese zur Drehung der Erdaxe Nichts beitragen, sondern nur die Bewegung des Mittelpunkts beeinflussen, d. h. etwa die Form und Lage der Erdbahn ändern können. Hätte nun die Erdaxe einmal eine bestimmte Neigung erhalten, so würde kein Grund zum Verlassen dieser Neigung gedacht werden können, und würde die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik stets dieselbe bleiben und somit auch die Durchschnittslinie ♈♎ dieser beiden Ebenen eine unveränderte Richtung beibehalten. Anders ist es aber, wenn wir uns jenen Ueberschuss über die herausgeschnittene Kugel, jenen nach dem Aequator hin dicker werdenden Wulstkörper oder der Einfachheit wegen einen um den Aequator herumgelegten Ring hinzudenken. Geben wir diesem von vorn herein eine schiefe Lage gegen die Ekliptik, und lassen die Erde blos eine translatorische Bewegung ausführen, so kommt er während eines Jahres zweimal in eine Lage, in der die Sonne momentan einen drehenden Einfluss auf ihn auszuüben nicht im Stande ist, nämlich zur Zeit der Aequinoctien. Denn in diesen Zeiten steht die eine Hälfte des Ringes oberhalb der Ekliptik ebenso weit von der ⊙ entfernt, wie die andere Hälfte unterhalb. In jeder andern Zeit aber würde die Sonne bemüht sein, den Ring in die Ebene der Ekliptik zu ziehen und zwar, wie man sich leicht überzeugt, zunächst in demselben Sinne. Die Folge hiervon würde ohne Zweifel dann aber die sein, dass die Ebene des Rings nach

und nach in die Ekliptik gezogen würde, um daselbst mit einem Maximum von Geschwindigkeit ankommend nach der entgegengesetzten Seite weiter zu schwingen, dann wieder zurückzukehren und sonach eine Pendelbewegung zu vollführen.

Wesentlich ändert sich aber der ganze Vorgang, wenn wir die Erde mit ihrem Ringe *Q* Fig. 48 rotiren lassen. Geschieht dies in

Figur 48.



der Richtung der an *Q* stehenden Pfeilchen und stellt ferner *E* die Ebene der Ekliptik *S* des Attractionscentrums der Sonne vor, so wird dieses auf einen Punkt *m* und *m,* in der Richtung *mS* und *m,S* eine Anziehung ausüben, und wird diese Anziehung in Verbindung mit der Kraft, vermöge der *m* und *m,* ihre Bahn in dem Aequator verfolgen, eine Resultante *mr* und *m,r,* liefern, von welcher erstere bestrebt ist, den Aequator in die Stellung *rmf,*, die letztere in die Stellung *m,r,h,* zu bringen. Beide Resultanten unterstützen sich demnach im Bestreben, die Durchschnittslinie *hf* zu drehen und zwar in einem der Rotation der Erde um ihre Axe entgegengesetzten Sinne und ebenso auch in einem der jährlichen Scheinbewegung der Sonne um die Erde oder auch in einem der wirklichen jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne entgegengesetzten Sinne. Umgekehrt aber bekämpfen sich beide Resultanten insofern als *mr* auf eine Verkleinerung des Neigungswinkels ε zwischen *Q* und *E*, *m,r,* aber auf eine Vergrösserung dieses Winkels hinzielt und leuchtet ein, wie hierdurch es möglich werden könnte, dass die Neigung ε dieselbe bliebe, während *fh* retrograd sich drehte. Denken wir die Sonne auf der entgegengesetzten Seite vom Ringe *Q*, so werden alle Punkte der Hälfte *hq,f* stärker angezogen, und entwirft man sich wieder die Zeichnung für

zwei Anziehungen z. B. auf die Punkte n und $n_{,}$, so wird man sich überzeugen, wie es bei n auf eine Vergrösserung, bei $n_{,}$ auf eine Verkleinerung, mithin auf eine Gleicherhaltung des Winkels ε abgesehen ist, während in gleicher Weise wie in der Anfangsstellung der Sonne der Fortgang der retrograden Drehung der Linie hf oder ♈♎ unterstützt wird.

Das Resultat unserer Betrachtung wäre somit, dass die Sonne eine continuirliche retrograde Drehung der ♈♎ hervorbringt, ohne dass die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik d. h. der Winkel ε sich ändert. Fragt man nun weiter: ob diese retrograde Bewegung des ♈ eine gleichmässige ist, so führt eine einfache Betrachtung zur Ueberzeugung, dass diese Frage verneint werden muss. Denn man erkennt sofort, dass es vier Momente innerhalb Jahresfrist giebt, in denen momentan die Sonne ausser Stand ist, eine Drehung der Linie fh zu bewirken und entsprechen diesen vier Momenten die Stellungen der beiden Nachtgleichen und der Solstitien. Man wird daher erwarten können, dass in diesem Fortrücken des ♈ sich eine Periodicität bemerklich mache, die jedenfalls sehr einfach sich gestalten würde, wenn die Erdbahn eine Kreisbahn wäre. Da aber diese Bahn eine Ellipse ist und auch die Lage dieser Ellipse sich desshalb fortwährend ändert, weil die grosse Axe derselben, wie wir schon S. 92 sahen, sich jährlich um 61″,7 Secunden gegen die Linie ♈♎ dreht, oder mit anderen Worten, weil die Länge des Perihels sich ändert, so wird diese Aenderung bei jener Periodicität ein Wort mitzureden haben und dieselbe complicirter machen. Fände die Periodicität aber nicht statt, so würde nach Ablauf eines Jahres der ♈ um ein kleines Bogenstück zurückgegangen sein und würde, wenn wir ein gleichmässiges Fortrücken annehmen, eine gegen eine Abscissenaxe schief aufsteigende Gerade dieses continuirliche und gleichmässige Fortrücken des ♈ graphisch versinnlichen, das man mit dem Namen

„Präcession“

oder

„Vorrücken der Nachtgleichen“

bezeichnet.

In Wirklichkeit aber entspricht diese schief aufsteigende Gerade nicht dem Sachverhalte, indem die angeführte Periodicität uns bald etwas über die Gerade hinaus von der Abscissenaxe hinweg, bald etwas unter sie nach der Abscissenaxe hin führt und muss vielmehr eine wellenförmig aufsteigende Curve anstatt der Geraden, deren Ordinaten um gewisse Strecken zu verändern sind, construirt werden, Strecken, die wir in jedem Momente zu den mittleren Ordinaten, welche die Präcession vor-

stellen, mit dem richtigen Vorzeichen hinzudenken müssen, um den wahren Werth der Verschiebung des ♈ zu bekommen.

Diesen periodischen Theil in der Präcession pflegt man nun aber die

„N u t a t i o n"

zu nennen, und denken wir daran, dass es die Sonne war, die diese Bewegungen des ♈ bewirkte, dass vielleicht andere Himmelskörper auch im Stande sind, ähnliche Bewegungen hervorzubringen, so rechtfertigen sich für die bis jetzt betrachteten Einflüsse die beiden specielleren Benennungen

„S o l a r - Präcession"

und

„S o l a r - Nutation."

In der That ist es ein zweiter Himmelskörper, der zwar nicht durch seine Grösse aber durch seine Nähe einen weit stärkeren Einfluss auf die Lage der Linie ♈♎ ausübt als die Sonne, nämlich der M o n d. Lassen wir ihn um die Erde in einer Ebene M laufen, die mit der Aequatorebene der Erde sich in einer Linie km durchschneidet, so sind für die Verschiebung dieser Durchschnittslinie km dieselben Bedingungen vorhanden wie bei der Sonne, d. h. der Mond zwingt die Durchschnittslinie km, wegen der Abplattung der Erde sich retrograd in seiner Bahnebene M zu drehen. Hiermit ist aber, da die Aequatorebene die Ebene E der Ekliptik in der Linie fh durchschneidet, nothwendig auch eine Veränderlichkeit in der Lage des Durchschnitts fh verbunden, d. h. der Mond wird in einer gewissen Zeit die Linie fh in eine Lage $f'h'$ bringen, und da er in demselben Sinne um die Erde lauft, wie die Sonne sich scheinbar um die Erde dreht, so wird dem Sinne nach die Verschiebung, die vom Mond ausgeht, dieselbe sein, und wird, wenn der Frühlingspunkt durch die S o n n e um l_1 durch den M o n d um l_2 verschoben wird, die gesammte Verschiebung gleich $l_0 = l_1 + l_2$ sein.

Auch beim Monde kann man sich vorstellen, dass die von ihm bewirkte Verschiebung der Linie fh Fig. 48 der verflossenen Zeit proportional anwachse und pflegt man diese Verschiebung dann mit dem Namen der

„L u n a r - Präcession"

zu bezeichnen. War aber die Verschiebung des ♈ unter dem Einflusse der Sonne schon mit einer Nutation verbunden, so wird diese vom Monde, dessen Bahnveränderungen viel auffälliger sind, in ähnlicher Weise hervorgerufen werden und wird sich zeigen, dass die

„L u n a r - Nutation"

die Solarnutation übertrifft.

Ausser dem Monde wirken aber auch noch die Planeten ein und suchen die Ekliptikebene und hiermit die Lage des Frühlingspunktes zu verändern, so dass man drittens von einer

„Planeten - Präcession“

reden kann, während eine Nutation von dieser Seite nicht in Rechnung zu ziehen ist.

Fasst man nun diese drei Einflüsse bei der Präcession im Zusammenhang auf, so wird die Präcession dann mit dem Namen der

„Allgemeinen - Präcession“

bezeichnet. Lässt man dagegen den Einfluss der Planeten ausser Acht und fasst denselben von Sonne und Mond zusammen, so erhält die hierdurch bewirkte Präcession den Namen

„Lunisolar - Präcession“

und die entsprechende Nutation den Namen

„Lunisolar - Nutation.“

Als wir oben den Einfluss der Sonne auf die Lage des Frühlingspunktes betrachteten, wurde bemerkt, dass es denkbar sei, wie neben der Verschiebung des ♈ auf der Ekliptik die Neigung der Aequatorebene gegen die Ekliptik unverändert bestehen bliebe. In Wirklichkeit ist dies jedoch nun nicht ganz der Fall und suchen, wie schon bemerkt, die Planeten in ihrer Gesammtheit die Lage der Erdbahn und hiermit die Neigung des Erdäquators gegen die Ekliptik zu ändern, eine Aenderung, die man mit dem Namen

„Säcularänderung der Schiefe“,

bezeichnet und bei welcher sich zunächst nur die Planeten betheiligen. Hierbei findet nun aber noch ein Unterschied statt insofern, als man diese Säcularänderung in Bezug auf die sogenannte „feste“ oder auf die „wahre“ Ekliptik sich denken kann. Die feste Ekliptik E_0 stellt nämlich eine Ebene vor, die mit der Ekliptikebene vom Jahre 1750 — als dem von Laplace für seine Theorie zu Grund gelegten Anfangsjahre — zusammenfällt; die wahre Ekliptik E dagegen bedeutet diejenige Ebene, die ihrer Lage nach identisch ist mit der factisch vorhandenen Ekliptikebene, wie sie eben t Jahre vom Jahre 1750 an gerechnet im Weltraum unter dem Einflusse der Planeten zu liegen kommt.

Abgesehen von dieser säculären continuirlich fortschreitenden Veränderung in der Grösse ε giebt sich aber und zwar unter dem Einflusse der Sonne und des Monds ein periodischer Wechsel kund, den man ebenso wie bei der Verschiebung des Frühlingspunkts mit dem Namen Nutation bezeichnet und der

„Lunisolar-Nutation der Schiefe“
heisst, im Falle man nämlich den Einfluss von Mond und Sonne zusammenfasst oder: falls man den Einfluss der Sonne oder den des Monds einzeln berücksichtigte, den Namen

„Solar-Nutation der Schiefe“

bzw.

„Lunar-Nutation der Schiefe“

erhält.

Setzt man die wahre Ekliptik E voraus und denkt sich den Einfluss der Nutation weg, so wird die Schiefe der Ekliptik einen Werth ε erhalten und nennt man diesen Werth, wie er in einem bestimmten Jahre t von 1750 an gerechnet stattfindet, die

„Mittlere Schiefe der Ekliptik.“

Denkt man ebenso hierbei den Frühlingspunkt, wie er ohne Einfluss der Nutation als Durchschnitt des Aequators mit der wahren Ekliptik zu Stande kommt, so nennt man dieses Aequinoctium das

„Mittlere Aequinoctium.“

§. 47. Wir wollen jetzt diejenigen Formeln *) kennen lernen, welche man für die im vor. §. im Voraus bezeichneten Aenderungen der Lage des ♈ und der Grösse des Winkels ε erhalten hat. Was zunächst die säculare Aenderung der Lage des ♈ betrifft, so ist die allgemeine Präcession, auf der wahren Ekliptik E gemessen, gleich

$$l = 50'',21129 \, . \, t + 0'',0001221483 \, . \, t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

In dieser Gleichung bedeutet t eine Anzahl Jahre, die seit dem Anfange des Jahres 1750 verflossen sind und würde t für den Anfang des Jahres 1870 gleich 120 zu setzen sein, so dass bis zu diesem Jahre die continuirlich fortschreitende Präcession den Frühlingspunkt, um

$$l = 6025'',4 + 1'',7 = 6027'',1 = 1^0 \, 40' \, 27'',1$$

verschoben hat. Nimmt man blos auf die Lunisolar-Präcession, auf der festen Ekliptik E_0 gemessen, Rücksicht, so ergiebt sich diese gleich

$$l_0 = 50'',37572 \, . \, t - 0'',0001217945 \, . \, t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Die Planeten-Präcession mit l_* bezeichnet ist gleich

$$l_* = -0'',17926 \, . \, t + 0'',0002660393 \, . \, t^2 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

woraus, wenn wir vom Gliede mit t^2 ganz absehen, sich der Satz ergiebt:

---

*) Um dem Leser Gelegenheit zu geben, bezüglich der nun folgenden Formeln in diesem und dem folgenden §. ausführlichere Belehrung zu finden, möge hier zunächst eine Abhandlung von Förster erwähnt werden, betitelt: „Ueber die bisherigen Annahmen in den Transformationselementen der astronomischen Ortsangaben“, Berliner astronom. Jahrbuch 1869 S. LVIII und 1870 S. (48). Sodann empfehlen wir in dieser Beziehung die Schrift von Wolfers: „Tabulae reductionum etc.“ Berlin, Ferd. Dümmler. 1858.

dass unter dem Einflusse der Planeten der Frühlingspunkt nicht retrograd sondern jährlich um den kleinen Bogen von 0″,179 vorwärts verschoben wird.

Um die Zahl der Jahre zu finden, innerhalb welcher der ♈ einen vollen Umlauf vollendet, haben wir mit 50,21 in 360 . 60 . 60 zu dividiren und erhalten

$$t = 25812 \text{ Jahre} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Man könnte fragen nach dem Antheile, der im Werthe l_0 Gl. (31) auf die Sonne allein kommt, also nach dem, was wir S. 218 die Solar-Präcession l_1 genannt haben. In dieser Beziehung kann man sich merken, dass von den 50″ der jährlichen Verschiebung auf die Sonne in runder Zahl 14″, dagegen auf den Mond im Mittel 36″ fallen, welche letztere Winkelgrösse wir oben mit dem Namen Lunar-Präcession bezeichneten. Der Mond übt daher einen 2,6mal grösseren Einfluss aus wie die Sonne.

Mit der Grösse l ist eine andere Grösse, die wir mit Δl bezeichnen wollen, nicht zu verwechseln, nämlich diejenige Präcession, welche man die „jährliche“ zu nennen pflegt, d. h. die Präcession, wie sie der Dauer des t^{ten} Jahres (von 1750 an gerechnet) entspricht. Um sie zu finden, müssen wir von einem l_{t+1} den Werth von l_t abziehen. Bezeichnen wir hierbei die Zahlencoefficienten an t und t^2 zunächst einfach mit a und b, so wäre

$$\Delta l = a + b\,[(t+1)^2 - t^2] = a + 2 \, . \, b \, . \, t + b,$$

d. h. wenn wir das dritte Glied $b = 0'',0001217 \ldots$ vernachlässigen und für a und b ihre Werthe wieder setzen

$$\Delta l = 50'',21129 + 0,0002442966 \, . \, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Wollte man ferner in diesem Jahre t nach 1750 wissen, wie gross der Werth der Präcession nach Ablauf eines Theiles Δt des Jahres wäre, so hätte man für diesen Werth der Präcession, mit $\Delta_{,}l$ bezeichnet,

$$\Delta_{,}l = (50'',21129 + 0'',0002442966 \, . \, t)\,\Delta t \quad . \quad . \quad (33_*)$$

zu setzen. Nach Ablauf des ersten Vierteljahres im Jahr 1870 vom 1. Januar an gerechnet wäre demnach

$$\Delta_{,}l = (50'',21 + 0'',00024 \, . \, 120)\,\frac{1}{4} = 12'',56.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Aequator und der festen Ekliptik des Jahres 1750 mit ε_0, den zwischen dem Aequator und der wahren also die mittlere Schiefe der Ekliptik mit ε, so ist

$$\varepsilon_0 = 23^0\, 28'\, 18'',0 + 0,0000098423 \, . \, t^2 \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und

$$\varepsilon = 23^0\, 28'\, 18'',0 - 0,48368 . t - 0,0000027295 \, . \, t^2 \quad (35)$$

worin t wiederum eine Anzahl Jahre von 1750 an gerechnet bedeutet. Die jährliche Aenderung dagegen mit $\Delta\varepsilon_0$ und $\Delta\varepsilon$ bezeichnet wäre

$$\Delta \varepsilon_0 = 0'',0000196846 \,.\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

und

$$\Delta \varepsilon = -0'',48368 - 0,0000054459 \,.\, t \quad . \quad . \quad (37)$$

Lassen wir in (37) das Glied mit t^2 ausser Acht, so wäre allgemein die jährliche Aenderung

$$\Delta \varepsilon = -0'',48368 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37_*)$$

und demgemäss am 1. Januar 1870, also nach Ablauf von 120 ganzen Jahren vom 1. Jan. 1750 an gerechnet die mittlere Schiefe der Ekliptik gleich

$$\varepsilon = 23^0\,28'\,18'',0 - 58'',04 = 23^0\,27'\,19'',96$$

Im N. A. ist die jährliche Aenderung nicht gleich 0″,4836, sondern nach Leverrier gleich 0″,476 angenommen und wird ausserdem anstatt der Besselschen Formel (35) die Formel

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,31'',83 - 0'',47594\,(t - 1850,0) - 0'',0149\,\left(\frac{t - 185,0}{100}\right)^2$$

angewandt, wonach für 1. Januar 1870 sich

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,31'',83 - 0'',47594 \,.\, 20 = \mathbf{23^0\,27'\,22'',31}$$

berechnet, wie man pag. V der Einleitung des N. A. angegeben findet.

Um nun ebenso die Ausdrücke für die Nutation kennen zu lernen, bezeichnen wir diese, sobald die Längenverschiebung des ♈ gemeint ist, mit $\Delta'\lambda$ und dem entsprechend die Nutation in Schiefe mit $\Delta'\varepsilon$. Nach Peters wird dann für 1870 die Nutation

$$\left.\begin{aligned}\Delta'\lambda = &-17'',256\, sin\,☊ + 0'',207\, sin\,2☊\\ &- 0'',204\, sin\,2☾ + 0'',068\, sin\,(☾ - P')\\ &- 1'',269\, sin\,2\odot + 0'',128\, sin\,(\odot - P) - 0'',021\, sin\,(\odot + P)\end{aligned}\right\}(38)$$

und

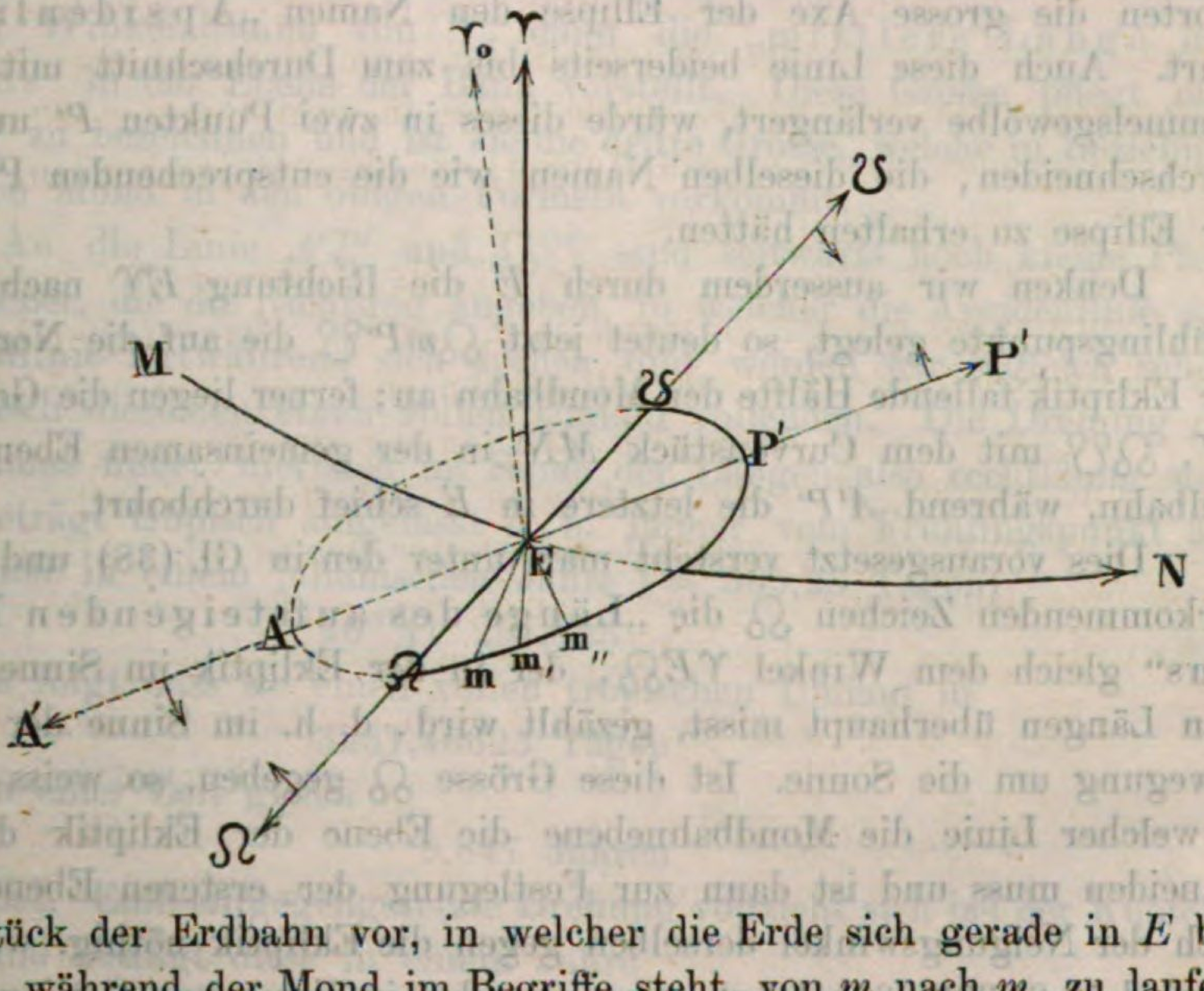
$$\left.\begin{aligned}\Delta'\varepsilon = &+ 9'',224\, cos\,☊ - 0'',090\, cos\,2☊\\ &+ 0'',089\, cos\,2☾\\ &+ 0'',551\, cos\,2\odot + 0'',009\, cos\,(\odot + P)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

In diesen Gleichungen beziehen sich die Zeichen ☊, ☾ und P' auf den Mond, die Zeichen ⊙ und P auf die Sonne und wird man hiernach sofort erkennen, welcher Einfluss bei der Nutation dem Monde und welcher der Sonne zuzuschreiben ist, oder welche Glieder zusammen das bilden, was wir mit dem Namen „Lunar-Nutation in Länge“, „Lunar-Nutation in Schiefe“, „Solar-Nutation in Länge“ und „Solar-Nutation in Schiefe“ bezeichnen können. Was die Zeichen weiter betrifft, so stellt ⊙ die „wahre Länge“ der Sonne, ferner P die „geocentrische Länge des Perihels der Erdbahn“ vor, welche letztere Grösse, wie wir schon S. 92 angaben, im Jahre 1850 gleich 280⁰ 21′ 47″,0 war und wird gemäss der jährlichen tropischen Aenderung von 61″,7 im Jahr 1870 gleich

$$P = 280^0\,42'\,21'',0.$$

Den Mond betreffend wollen wir uns in Kürze eine Vorstellung seiner Bewegung zu verschaffen suchen, dessen Bewegung eine viel complicirtere ist, als sie auf den ersten Blick erscheint. Zunächst muss man sich nämlich klar machen, wie von einer elliptischen Bahn im Weltraum in dem Sinne wie bei den Planeten nicht die Rede sein kann, da der Mond an den Centralkörper der Erde gefesselt, deren Progressivbewegung mitmachen und zugleich seinen Umlauf um die Erde vollziehen muss, demgemäss die Bahn, die er im Weltraum beschreibt, eine von einer Ellipse gänzlich verschiedene doppelt gekrümmte Curve wird. Aber auch dem Erdkörper gegenüber ändert die Bahn, die jetzt zunächst als eine Ellipse aufzufassen ist, so rasch ihre Elemente, dass wir eigentlich nur von einer Ellipse reden können, wie sie einem bestimmten Momente der Erd- und Mondstellung entspricht, oder wenigstens nur kurze Zeit als unveränderlich gelten kann. Stellt nämlich Fig. 49 der Bogen *MN*

Fig. 49.



ein Stück der Erdbahn vor, in welcher die Erde sich gerade in *E* befindet, während der Mond im Begriffe steht, von *m* nach *m,* zu laufen, so gehört dieser Bogen *mm,* einer Ellipse an, die in einer durch *mm,* und *E* gelegten Ebene liegt, welche letztere die Ekliptik in der Linie ☊☋ durchschneidet. Die Apsidenlinie *A'P'* dieser Ellipse besitzt eine bestimmte Lage und ist die Ebene der Ellipse unter einem bestimmten Winkel gegen die Ekliptik geneigt. Blieben nun die Linien ☊☋ und *A'P'* bei der Progressivbewegung der Erde je einander parallel, so würde die Lage der Bahn des Mondes der Erde gegenüber eine constante sein;

aber während der Mond von $m_,$ nach $m_{,,}$ geht, haben sich ☊☋ und $A'P'$ gegen ihre Anfangslagen gedreht und eine neue Ellipse müsste für die kurze Strecke der Bewegung von $m_,$ nach $m_{,,}$ gedacht werden. Solche Ellipsen können wir der Kürze halber mit dem Namen „Momentanellipsen“ bezeichnen und stellt $mP'A'$ eine solche vor, so nennt man die Linie ☊☋ die Knotenlinie der Mondbahn, den Punkt ☊, in welchem der Mond von der südlichen Seite der Ekliptik in die nördliche übertritt, den „aufsteigenden“, den Punkt ☋ aber den „niedersteigenden Knoten.“ Denkt man diese Knotenlinie bis zum Durchschnitte mit der Kugel des Himmelsgewölbes verlängert, so kommt man hier auf zwei Punkte, die man mit denselben Zeichen und mit denselben Namen wie die eigentlichen Knotenpunkte bezeichnen kann. Da die Erde in einem Brennpunkt der Momentanellipse steht, so giebt es beim Monde eine „Erdnähe“ und „Erdferne“, die auch mit dem Namen des „Perigäums“ und „Apogäums“ bezeichnet werden und deren Verbindungslinie oder mit andern Worten die grosse Axe der Ellipse den Namen „Apsidenlinie“ führt. Auch diese Linie beiderseits bis zum Durchschnitt mit dem Himmelsgewölbe verlängert, würde dieses in zwei Punkten P' und A' durchschneiden, die dieselben Namen wie die entsprechenden Punkte der Ellipse zu erhalten hätten.

Denken wir ausserdem durch E die Richtung E♈ nach dem Frühlingspunkte gelegt, so deutet jetzt ☊mP'☋ die auf die Nordseite der Ekliptik fallende Hälfte der Mondbahn an; ferner liegen die Geraden E♈, ☊☋ mit dem Curvenstück MN in der gemeinsamen Ebene der Erdbahn, während $A'P'$ die letztere in E schief durchbohrt.

Dies vorausgesetzt versteht man unter den in Gl. (38) und (39) vorkommenden Zeichen ☊ die „Länge des aufsteigenden Knotens“ gleich dem Winkel ♈E☊, der in der Ekliptik im Sinne, wie man Längen überhaupt misst, gezählt wird, d. h. im Sinne der Erdbewegung um die Sonne. Ist diese Grösse ☊ gegeben, so weiss man, in welcher Linie die Mondbahnebene die Ebene der Ekliptik durchschneiden muss und ist dann zur Festlegung der ersteren Ebene nur noch der Neigungswinkel derselben gegen die Ekliptik nöthig, welcher Winkel $5^0\ 8'\ 39'',96$ beträgt. Um nun aber in dieser nun festliegenden Ebene der Mondbahn die Momentanellipse selbst ihrer Lage nach zu erhalten, müssen wir wissen, wie die grosse Axe $A'P'$ gezogen werden soll, abgesehen davon, dass auch noch die Länge dieser Axe und die Excentricität der Ellipse gegeben sein müsste. Letztere beiden Elemente kommen in obigen Formeln nicht vor und lassen wir sie hier ausser Acht. Dagegen müssen wir die Lage der Linie $A'P'$ bestimmen und ist diese Bestimmung möglich, wenn der Winkelabstand des

Perigäums P' vom Knoten ☊ bekannt ist. Nennen wir diesen π, so können wir den Abstand des ♈ vom ☊ auch in der Mondbahn — also nicht in der Ekliptik — von ☊ aus rückwärts gerechnet abtragen und kommen hiermit auf einen Punkt $♈_0$, den man auch wohl den „übertragenen Frühlingspunkt" zu nennen pflegt. Gemäss dieser Construction ist dann $♈_0$☊ gleich der Länge des aufsteigenden Knotens und setzen wir den Abstand des Perigäums von $♈_0$ ein P', so ist $P' =$ ☊ $+ \pi$ gleich dem, was man mit dem Namen der „Länge des Perigäums der Mondbahn" bezeichnet: die Grösse, die in der obigen Gl. (38) vorkommt. Denken wir uns ferner den Mond in m, so würde der Winkel $♈_0 Em$ die „wahre Länge des Monds und zwar in seiner Bahn gerechnet" vorstellen; aber ebenso wie früher bei der Erde der Sonne gegenüber können wir beim Monde der Erde gegenüber annehmen: dass ein zweiter Mond in einem Kreise um die Erde liefe, und während der eigentliche Mond in der Ellipse in m stehe, der eingebildete im Kreise sich in einem Punkte m' befinde, dessen Winkelabstand von $♈_0$ dann die „mittlere Länge des Monds" in der Ebene der Bahn vorstellt. Diese Grösse pflegt man mit ☾ zu bezeichnen und ist sie die dritte Grösse, welche in Beziehung auf den Mond in den obigen Formeln vorkommt.

An die Linie $A'P'$ und ☊☋ sind seitwärts noch kleine Pfeile gezeichnet, die die Richtung angeben, in welcher die Apsidenlinie und Knotenlinie fortwährend sich drehen und werden wir sogleich sehen, wie rasch dieselben einen vollen Umlauf vollenden. Die Drehung des Perigäums findet hiernach im Sinne der Längen also rechtläufig statt und beträgt tropisch aufgefasst d. h. immer vom Frühlingspunkt aus gerechnet in einem julianischen Jahre (= 365,25 Tagen)

$$40^0\ 41'\ 25'',825$$

woraus folgt dass sie einen vollen tropischen Umlauf in

$$3231{,}46623 \text{ Tagen}$$

oder in einer Zeit gleich

$$8{,}847 \text{ Jahren}$$

vollendet. Eine entgegengesetzte Drehung vollzieht sich bei der Knotenlinie und beträgt diese in einem Jahre

$$19^0\ 20'\ 29'',396;$$

mithin vollendet die Knotenlinie ihren völligen Umgang in

$$6798{,}33553 \text{ Tagen}$$

oder in einer Zeit gleich

$$t_{,} = 18{,}612 \text{ Jahren} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

§. 48. Lassen wir in den Gleichungen (38) und (39) alle Glieder weg, deren Zahlencoefficienten kleiner als 0,5 sind, so reduciren sich dieselben auf:

$$\Delta\lambda = -17'',256 \, sin \, ☊ - 1'',269 \, sin \, 2☉ \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

und

$$\Delta\varepsilon = + \; 9'',223 \, cos \, ☊ + 0'',551 \, cos \, 2☉ \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Man erkennt hieraus die Richtigkeit der folgender Sätze:

1) Bei der Nutation in Länge übt die Sonne im Maximum nur den $\frac{1,269}{17,256} = 0,0735^{\text{ten}}$ Theil oder in runder Zahl den $\frac{7}{100}^{\text{ten}}$ Theil vom Einflusse des Monds aus.

2) Bei der Nutation in Schiefe findet man in runder Zahl dieses Verhältniss gleich $\frac{6}{100}$.

3) Bei der Nutation in Länge giebt sich

   a) eine Periodicität gleich der Zeit $t_{,}$ des Umlaufs der Knotenlinie gleich 18,612 Jahren und

   b) eine von der Sonne herrührende halbjährige Periodicität kund.

4) Bei der Nutation in Schiefe findet dasselbe statt nur mit dem Unterschiede, dass die Maxima der Werthe auf diejenigen Zeit-Momente fallen, wo für die Nutation in Länge die Minima auftreten.

Nach den Erläuterungen, die im Kap. II. §. 20 und §. 21 bezüglich der graphischen Darstellung der Zeitgleichung gegeben wurden, wird der Leser im Stande sein, auch den Verlauf der Nutation graphisch darzustellen.

Vernachlässigen wir auch noch bei der Nutation den geringeren Antheil der Sonne, so erhalten wir anstatt der Gleichungen (40) und (41) die Gleichungen

$$\Delta\lambda = -17'',26 \, sin \, ☊ \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

und

$$\Delta\varepsilon = + \; 9'',22 \, cos \, ☊ \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Zunächst wird man nun unter Beachtung der Gl. (30), ferner der Werthe von t und $t_{,}$ in den Gl. (A) S. 221 und (B) S. 225 die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

5) Während wegen der Präcession in $t = 25800$ Jahren der Frühlingspunkt einmal am Himmel herum lauft, macht sich hierbei eine vom Monde ausgehende Periodicität geltend, die sich alle $t_{,} = 18,612$ Jahre und demgemäss im Zeitraum der t Jahre 1387mal wiederholt.

6) Vermöge dieses Einflusses wird die sonst gleichmässig fortschreitende Präcession l periodisch um $\Delta\lambda = 17'',26$ vermindert und um ebenso viel vermehrt.

Denken wir uns zunächst die Nutation ganz weg, so beschreibt der Pol der Erde, der in diesem Falle identisch ist mit dem

Pole $P_{,}$ im §. 45 um den Pol der Ekliptik, der dem Pole P §. 45 entspricht, einen kleinen Kreis mit dem sphärischen Radius ε und ist dieser Kreis offenbar einerlei mit dem Kreise k, den wir im Anfange des §. 45 auffassten, so dass der Leser alles, was in jenem §. bezüglich der Bewegung von $P_{,}$ um P auseinandergesetzt wurde, mit dem, was als eine Folge der Präcession zuletzt in dem jetzigen Paragraphen mitgetheilt wurde, in Uebereinstimmung finden wird.

Denken wir uns ebenso die Präcession ganz weg, so steht der Pol $P_{,}$ in Bezug auf P oder den Pol der Ekliptik still. Lassen wir aber nunmehr die Nutation und zwar die Nutation in Länge allein zu, so würde jener Stillstand wieder aufhören und $P_{,}$ als ein Pol P' in demselben Kreise k um seine Anfangslage $P_{,}$ einen kleinen Bogen hin und her beschreiben, welche Bewegung an die Periode $t_{,} = 18{,}612$ Jahre gebunden ist. Legen wir durch die Linie ♈♎ und P' dann einen grössten Kreis identisch mit dem Colur der Nachtgleichen, so berührt dieser den kleinen Kreis k in P' und können wir auf die kleine Strecke hin, um die wegen der Längennutation sich P' auf k verschiebt, annehmen, dass diese Bewegung auch als auf dem betreffenden Colur stattfinde. Der halbe Bogen, der dieser Bewegung auf letzterem grössten Kreise entspricht, ist dann gleich

$$\Delta_{,}\lambda = \Delta\lambda \,.\, sin\,\varepsilon = 17'',26 \,.\, sin\,(23^0\;27') = 6'',87 \quad . \quad . \quad (44)$$

d. h. mit anderen Worten

7) wegen der Nutation in Länge allein beschreibt der Pol $P_{,}$ der Erde vom Centrum der Erde aus betrachtet am Himmel scheinbar eine gerade Linie von der Länge $2 \,.\, \Delta_{,}\lambda = 13'',74$.

Lassen wir umgekehrt blos die Nutation in Schiefe zu, so bewegt sich $P_{,}$ als ein Pol P', um $P_{,}$ auf dem Colur der Sonnenwenden um den kleinen Bogen $\Delta\,\varepsilon$ hin und her und beschreibt also

8) wegen der Nutation in Schiefe der Pol $P_{,}$ eine kleine Gerade zu der unter 7. betrachteten senkrecht gelegen und zwar von der Länge $2 \,.\, \Delta\varepsilon = 18'',44$.

Lassen wir aber die beiden Einflüsse der Nutation gleichzeitig gelten, so leuchtet ein, wie der Pol $P_{,}$ als ein Pol $P_{,,}$ um seine Anfangslage $P_{,}$ eine kleine Curve beschreibt, die sich sogleich als eine Ellipse erweisen wird. Denn sehen wir die Geraden $2 \,.\, \Delta_{,}\lambda$ und $2 \,.\, \Delta\,\varepsilon$ als x und y Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, so ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (42) und (43) bzw. die Gleichung (44)

$$x = 6'',87 \,.\, sin\,☊$$
$$y = 9'',22 \,.\, cos\,☊$$

mithin

$$\frac{x^2}{(6{,}87)^2} + \frac{y^2}{(9{,}22)^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

die Gleichung einer Ellipse, die man auch die

„Nutationsellipse"

zu nennen pflegt.

Ersetzen wir sie durch einen kleinen Kreis, so ist dieser ohne Zweifel identisch mit dem, der in §. 45 als Kreis k, bezeichnet wurde und die Bedeutung hatte, dass auf ihm sich der Erdpol $P_{,,}$ zunächst in 18,612 Jahren um seine Mittellage $P_,$ drehen solle, während $P_,$ selbst in 25800 Jahre um den Pol P oder den Pol der Ekliptik sich drehte und werden nunmehr die rein geometrischen Betrachtungen des §. 45 sich im Einklang mit denen des gegenwärtigen §. befinden.

§. 49. Es kommt nun bei Zeitbestimmungen insbesondere darauf an, zu bestimmen: welchen Einfluss die Präcession und Nutation auf die Rectascension und Declination eines Gestirns ausüben, und wollen wir hier diejenigen Formeln mittheilen, welche für die Rectascension und Declination im Gebrauche sind. Für die jährlichen Aenderungen, die die Präcession ausübt, sind diese gleich

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= m + n \,.\, tang\,\delta\, sin\,\alpha \\ &\text{und} \\ \Delta\delta &= n \,.\, cos\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

und ist hierin nach Struve und Peters

$$\left.\begin{aligned} m &= 46'',0623 + 0,02849\left(\frac{t-1800}{100}\right) \\ n &= 20'',0607 - 0,00863\left(\frac{t-1800}{100}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

anzunehmen, wenn t eine vom Jahre 1800 an gerechnete Anzahl Jahre bedeutet. Fürs Jahr 1870 wäre demnach

$$\frac{t-1800}{100} = \frac{70}{100} = 0,7 \text{ und demgemäss}$$

$$m = 46'',0822;\; n = 20'',0547.$$

Hiernach wollen wir auch den Einfluss der Nutation auf $A\!R$ und δ betrachten. Unsere Formeln (38) und (39) haben uns gezeigt, dass bei der Solarnutation die Grössen ⊙ und P, bei der Lunarnutation die Grössen ☊, ☾ und P' gegeben sein müssen. Eine weitere Entwickelung lehrt nun, dass wenn $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ bekannt sind, ebenso wie bei der Präcession auch $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ berechnet werden kann und erhält man für 1870*), wenn wir uns nur auf die Glieder beschränken, bei welchen der Zahlencoefficient grösser als 0,5 ist,

---

*) Wegen der geringen Veränderlichkeit der Zahlencoefficienten könnten jedoch die folgenden Formeln auch als für unser ganzes Jahrhundert gültig angesehen werden.

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\alpha = &-15'',8269\, sin\,☊ - [6'',8673\, sin\,☊\,.\, sin\,\alpha \\ &\qquad + 9'',2237\, cos\,☊\,.\,cos\,\alpha]\, tang\,\delta \\ &- 1'',1645\, sin\,2☉ - [0'',5052\, sin\,2☉\,.\,sin\,\alpha \\ &\qquad + 0'',5507\, cos\,2☉\,.\,cos\,\alpha]\, tang\,\delta \\ \varDelta\delta = &-[6'',8673\, sin\,☊\, cos\,\alpha - 9'',2237\, cos\,☊\,.\,sin\,\alpha] \\ &- [0'',5052\, sin\,2☉\,.\,cos\,\alpha - 0'',5507\, cos\,2☉\,.\,sin\,\alpha]\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (48)$$

wobei man sofort erkennt, welches die von der Sonne und die vom Monde abhängigen Glieder sind. Setzen wir, wie es zu geschehen pflegt, bei den von ☊ abhängigen Gliedern

$$-15'',8269\, sin\,☊ = c$$
$$6'',8673\, sin\,☊\, sin\,\alpha + 9'',2237\, cos\,☊\, cos\,\alpha = b\,.\,cos\,(☊ + B - \alpha)$$
$$6'',8673\, sin\,☊\, cos\,\alpha - 9'',2237\, cos\,☊\, sin\,\alpha = b\,.\,sin\,(☊ + B - \alpha)$$

so ergiebt sich, wenn wir die beiden letzten Gleichungen ins Quadrat erheben und addiren, nach einer kleinen Reduction:

$$b = \sqrt{6,8673^2\, sin^2\,☊ + 9,2237^2\, cos^2\,☊}\,;$$

ferner, wenn wir rechts in diesen beiden Gleichungen nach *cos* und *sin* von B und $(☊ - \alpha)$ auflösen, dann dieselben dividiren, $tang\,B$ heraussetzen und entsprechend reduciren:

$$tang\,B = \frac{(6,8673 - 9,2237)\, sin\,☊\, cos\,☊}{6,8673\, sin^2\,☊ + 9,2237\,.\,cos^2\,☊}$$

so dass nunmehr c, b und B gefunden werden können, wenn ☊ gegeben ist. Man begreift wiederum, dass eine häufige Berechnung von diesem Ausdrucke ein sehr mühsames Geschäft wäre, und hat man, um dieses zu erleichtern, Nutationstafeln berechnet, wobei mit dem Argumente ☊ eingegangen wird, um sofort $log\,b$, B und c zu finden. Solche Tafeln wurden zuerst mit der schon früher betrachteten Taf. VI für die Aberration von Gauss und später von Nicolai berechnet und finden sich in den Schumacherschen astronomischen Nachrichten Bd. XXI S. 177 u. f. mit der Ueberschrift:

„Allgemeine Tafel für die Nutation“

bei welcher nur ☊ das Argument abgiebt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung führt zur Aufstellung einer Tafel für die Solarnutation, indem man in den Gleichungen (48)

$$-1'',1645\,.\,sin\,2☉ = g$$
$$[0'',5052\,.\,sin\,2☉\,.\,sin\,\alpha + 0'',5504\,.\,cos\,2☉\,.\,cos\,\alpha] = f\,.\,cos\,(2☉ + F - \alpha)$$
$$[0'',5052\,.\,sin\,2☉\,.\,cos\,\alpha - 0'',5507\,.\,cos\,2☉\,.\,sin\,\alpha] = f\,.\,sin\,(2☉ + F - \alpha)$$

setzt dann ebenso wie vorhin b und B jetzt f und F als von 2☉ allein abhängig bestimmt und eine Tafel entwirft, aus der mit dem Argumente 2☉ die Grössen g, $log\,f$ und F unmittelbar entnommen werden können. Unser Anhang enthält diese beiden Tafeln als Taf. VII (A) und Taf. VII (B).

Hiernach sind wir im Stande, den Einfluss der Nutation z. B. für α Aquarii am 13. Octob. 1870 zu berechnen. Was zunächst die

Grösse ☊ anlangt, so findet sich dieselbe im N. A. S. 242 mit der Hauptüberschrift: „Obliquity of the ecliptic etc." in der letzten Columne mit der besonderen Ueberschrift: „Mean Longitude of ☾'s ascending Node" und zwar von 10 zu 10 Tagen. Im Berliner Jahrbuch findet man diese Angaben S. 281 mit der Ueberschrift: „Elemente der Mondbewegung." Für unser Beispiel ist nach d. N. A.:

am 8. October ☊ gleich $104^0\ 31',0$
„ 18. „ „ „ $103\ 59,3$

mithin

„ 13. „ „ „ $104\ 15,1 = \text{III}^z + 14^0\ 15',1$

wenn das kleine z wie oben bei der Aberration ein Vielfaches von 30^0 bedeutet. Hiernach gestaltet sich nun die Rechnung zunächst mit Benutzung der Tafel VII (A) wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
☊ & = & \text{III}^z + 14^0\ 15' \\
B & = & 4\ \ 35 \\
\hline
 & & \text{III}^z + 18^0\ 50'' \\
\alpha & = & \text{X} + 29\ \ 46\ \text{(n. S. 175.)} \\
\hline
(☊ + B - \alpha) & = & \text{IV}^z + 19^0\ \ 4' \\
 & = & 139^0\ \ 4' \\
c & = & -15'',34 \\
-b.\cos(☊ + B - \alpha) & = & -0\ ,09 \\
\hline
\Delta,\alpha & = & -15'',43 = \text{Einfl. d. Lunarnut. auf Rectasc.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\log(-b) & = & 0,8470_n \\
\log\cos(☊ + B - \alpha) & = & 9,8781_n \\
\text{(n. S. 175)}\ \log \operatorname{tang} \delta & = & 8,2199_n \\
\hline
 & & 8,9450_n \\
-b.\cos(☊ + B - \alpha) & = & -0'',09
\end{array}
$$

Ferner

$$
\begin{array}{rcl}
\log(-b) & = & 0,8470_n \\
\log\sin(☊ + B - \alpha) & = & 9,8165 \\
\hline
 & & 0,6635_n \\
\Delta,\delta & = & -4'',60 = \text{Einfl. d. Lunarnut. auf Decl.}
\end{array}
$$

Da ferner am genannten Tage

$$☉ = 199^0\ 57';\ 2☉ = 399^0\ 54' = \text{I}^z + 9^0\ 54'$$

so ist mit Hilfe der Taf. VII (B) die weitere Rechnung:

$$
\begin{array}{rcl}
2☉ & = & \text{I}^z + \ 9^0\ 54' \\
F & = & -\ 2\ \ 24 \\
\hline
 & & \text{I}^z + \ 7^0\ 30' \\
\alpha & = & \text{X} + 29\ \ 46 \\
\hline
(2☉ + F - \alpha) & = & \text{II}^z + \ 7^0\ 44' \\
 & = & 67^0\ 44' \\
g & = & -0,74 \\
-f.\cos(2☉ + F - \alpha) & = & 0,00 \\
\hline
\Delta_{,,}\alpha & = & -0,74 = \text{Einfl. d. Solarnut. auf Rectasc.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\log(-f) & = & 9,7266_n \\
\log\cos(67^0\ 44') & = & 9,5785 \\
\log \operatorname{tang} \delta & = & 8,2199_n \\
\hline
 & & 7,5250 \\
-f.\cos(2☉ + F - \alpha) & = & 0'',00
\end{array}
$$

Ferner:

$$
\begin{array}{rcl}
\log(-f) & = & 9,7266_n \\
\log\sin(67^0\ 44') & = & 9,9663 \\
\hline
 & & 9,6929_n \\
\Delta_{,,}\delta & = & -0'',49 = \text{Einfl. der Solarnutat. auf Decl.}
\end{array}
$$

Demnach ist der gesammte Einfluss der Nutation

auf $AR = -15'',43 - 0'',74 = -16'',17$

„ $\delta = -4,60 - 0,49 = -5,09$.

§. 50. Wir haben im vierten Kapitel in den Gleichungen (18) bis (22) gesehen, wie man den Einfluss der Aberration auf AR und δ auch mit Benutzung gewisser im N. A. auf S. 329 stehender Grössen und der hierzu auf den jedesmaligen Seiten XX stehenden Logarithmen berechnen kann. Diese Gleichungen (20) und (22) des genannten Kapitels lassen sich nun mit Rücksicht auf Präcession und Nutation vervollständigen, wenn man ihnen noch zwei Summanden hinzu fügt, wodurch sie nunmehr zu

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= A.a + B.b + C.c + D.d \\ \Delta\delta &= A.a' + B.b' + C.c' + D.d' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

werden. Die Grössen c und c' kennen wir schon, denn es sind keine andern als die Grössen, die in den Gl. (46) S. 228 auch mit $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ bezeichnet wurden, wo aber diese Bezeichnung $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ nur mit Rücksicht auf Präcession zu betrachten ist, während jetzt in der Gleichung (49) unter $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ auch der Einfluss der Aberration und Nutation hinzugedacht werden muss. Es ist also, wie man auch auf S. 329 des N. A. findet

$$\left.\begin{aligned} c &= 46'',0822 + 20'',0547 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta \\ c' &= 20'',0547 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

während die Coefficienten

$$\left.\begin{aligned} C &= t - 0,02519 \sin 2\odot - 0,34243 \sin ☊ \\ &\quad + 0,00410 \sin 2☊ - 0,00405 \sin 2☾ \\ D &= -0'',5507 \cos 2\odot - 9'',2237 \cos ☊ \\ &\quad + 0'',0895 \cos 2☊ - 0,0885 \cos 2☾ \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (51)$$

und ausserdem

$$\left.\begin{aligned} d &= \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \\ d' &= -\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

sind.

Die Grösse t bedeutet darin nicht wie z. B. in den Gleichungen (47) eine beliebige Anzahl Jahre, sondern den Theil des Jahres, der seit 0. Januar + 0,^{d}048 verflossen ist, wie wir hernach auseinander setzen wollen. Um also den ganzen Einfluss der Präcession und Nutation innerhalb eines Jahres zu haben, wird man t gleich 1 zu setzen haben. Bildet man nun die Produkte $C.c$, $D.d$, $C.c'$, $D.d'$, so erhält man, wenn man im Ausdruck für C und D nur die Glieder mit $2\odot$ und ☊ beibehält: die Summanden, welche man erhalten würde, falls man die rechten Seiten der Gleichungen (46) und (48) addirte, d. h. also den Einfluss der Präcession und Nutation auf Rectascension und Declination z u s a m m e n f a s s t e. Da nun die $\log C$ und $\log D$ ebenso

wie *log A* und *log B* (siehe S. 176) unmittelbar im N. A. auf den Seiten XX zu finden sind, so lässt sich dieser vereinigte Einfluss der Präcession und Nutation nun noch anders berechnen, wie folgt:

$\log 20{,}0547$	$= 1{,}30222$	$\log \cos \alpha$	$= 9{,}93654$
$\log \sin \alpha$	$= 9{,}70189_n$	$\log \operatorname{tang} \delta$	$= 8{,}21990_n$
$\log \operatorname{tang} \delta$	$= 8{,}21990_n$	$\log d$	$= 8{,}15644_n$
	$9{,}22401$	(n. N. A.) $\log D$	$= 0{,}24840$
num.	$= 0'',1675$		$8{,}40484_n$

mithin

c	$= 46'',0822 + 0'',1675$	$D.d$	$= -0{,}025$
	$= 46'',2497$		
$\log c$	$= 1{,}66511$		
$\log C$	$= 9{,}63740$		
	$1{,}30251$		
$C.c$	$= 20'',07$;		

mithin $(C.c + D.d)$ = Einfluss der Präcession und Nutation auf Rectascension zusammengenommen gleich

$$\mathbf{20'',045 = 1^s,336.}$$

Die Declination betreffend ist

$\log 20'',0547$	$= 1{,}30222$	$\log d' = \log(-\sin\alpha)$	$= 9{,}70189$
$\log \cos \alpha$	$= 9{,}93654$	$\log D$	$= 0{,}24840$
$\log c'$	$= 1{,}23876$		$9{,}95029$
$\log C$	$= 9{,}63740$	$D.d'$	$= 0'',89$
	$0{,}87616$		
$C.c'$	$= 7'',52$		

mithin $(C.c' + D.d')$ = Einfluss der Präcession und Nutation auf Declination zusammengenommen gleich

$$\mathbf{8'',41.}$$

Ausser Präcession, Nutation und Aberration kommt aber nun auch noch die „Eigenbewegung" der Fixsterne in Betracht und wird im N. A. S. 329 der jährliche Betrag hiervon in Bezug auf *Æ* mit $\varDelta c$, auf Decl. mit $\varDelta c'$ im B. J. mit m und m' bezeichnet, so dass $t.\varDelta c$ und $t.\varDelta c'$ bzw. $t.m$ und $t.m'$ die für einen bestimmten Bruchtheil t des Jahres d. h. für einen bestimmten Datum anzubringenden Werthe bedeuten.

Zur leichteren Auffindung von t als der Grösse, die schon in dem Ausdrucke des Coefficienten C Gl. (51) vorkommt und auch für die Berechnung des Antheils der Eigenbewegung bekannt sein muss, enthält der N. A. für jeden Monat eine Columne XX_9 mit der Ueberschrift:

„Fraction of the Year"

d. h. die Angabe: der wievielste Theil des Jahrs ein in der unmittelbar vorausgehenden Columne XX_8 mit der Ueberschrift

„Day of the Year"

angezeigter Tag ist. Diese Tage der Col. XX_8 werden nun vom mittleren **Mittag** des, im Kalender als 1. Januar angesehenen, Tages an gezählt und ist ihre Ordnungszahl um 1 geringer, wie die Zahlen der Columne XX_1 mit der Ueberschrift:

„Day of the Month"

wie man für den Januar unmittelbar aus dem Jahrbuche ersieht, und auch für die übrigen Tage sehen würde, falls man die Tage der Columne XX_1 im Februar etc. continuirlich weiter zählte. Rechnen wir nun die Zeit von einer Anfangs-Mitternacht bis zur nächsten Mitternacht als den 1. Januar, die Zeit von dieser bis zur nächsten Mitternacht als den 2. Januar etc., so ist klar, dass z. B. der 2. Januar, wenn er in einem Jahresbruch ausgedrückt und von der Anfangs-Mitternacht aus gezählt würde, nicht die Bruchzahl 0,0027 der Columne XX_9, sondern 0,0055 erhalten müsste. Rechnen wir aber nicht von jener 0. Mitternacht, sondern von dem oben angegebenen Momente 0. Mitternacht + $0^d,048$, so liegt dieser Moment fürs Jahr 1870 in der Richtung der Zählung um 0,048 Tage weiter vor, und muss in Folge davon die Zahl 0,0055 um $\frac{0,048}{T}$ vermindert werden, oder es muss die Bruchzahl des vorausgehenden Tages der Colume XX_9 um $\frac{1-0,048}{T} = \frac{0,952}{T}$ erhöht werden, falls $T = 365,25$ die Anzahl der Tage des Jahres bedeutet. Führt man diese Division aus, so erhält man fürs Jahr 1870 den Werth 0,0026 und ist mithin der dem 2. Januar des Kalenders entsprechende Jahresbruch dann $0,0027 + 0,0026 = 0,0053$. Was aber für den 2. Januar gilt, gilt für jeden Datum, d. h. man muss zur Bruchzahl der Columne XX_9 stets 0,0026 addiren, wenn man mit Rücksicht auf den Anfangspunkt: Januar 0 + $0,^d048''$ für ein Kalenderdatum des Jahrs 1870 das t haben will. Da dies Verhältniss besteht, so findet man in der Ueberschrift der Col. XX_9 durch ein Sternchen auf eine Anmerkung der Seiten XX hingewiesen, deren Worte lauten:

„Add., 0,0026 of Fraction be required for the time t see page 329;" denn die Seite 329 enthält, wie wir auf Seite 231 schon andeuteten, eine Grösse t, die eine Anzahl Tage von dem Momente:

„Januar 0 + $0,^d048$"

gerechnet bedeutet. Da nun die Col. XX_9 für den 13. October 1870 den Jahresbruch gleich 0,7803 enthält, so ist unser

$$t = 0,7803 + 0,0026 = 0,7829.$$

Des geringen Betrags wegen setzen wir $t \,.\, \Delta c$ und $t \,.\, \Delta c'$ gleich Null und

ergiebt sich nun hiernach die scheinbare Rectascension für α Aquarii am 13. October 1870 gleich

Mittlere Rectasc. am 1. Januar + { Einfl. d. Aberrat. $(= A.a+B.b)$,, ,, Präc. + Nut. $(= C.c+D.d)$,, ,, Eigenbeweg. $(= t.\Delta c)$ }

die scheinbare Declination gleich

Mittlere Decl. am 1. Januar + { Einfl. d. Aberrat. $(= A.a'+B.b')$,, ,, Präc. + Nut. $(= C.c'+D.d')$,, ,, Eigenbeweg. $(= t.\Delta c')$ }

oder nach unseren Berechnungen S. 176 und 232

$$\text{Æ app.} = 21^h\,59^m\,6^s{,}275 + \left.\begin{array}{r} 0^s{,}770 \\ +\,1{,}336 \\ 0{,}000 \\ \hline 2{,}106 \end{array}\right\} = \mathbf{21^h\,59^m\,8^s{,}381}$$

$$\text{Decl. app.} = -\,57'\,1'',81 + \left.\begin{array}{r} 7'',37 \\ +\,8\,{,}41 \\ 0\,{,}00 \\ \hline +\,15\,{,}78 \end{array}\right\} = \mathbf{-\,56'\,46'',03.}$$

Da nun der N. A. und das B. J. für die Fixsterne die scheinbaren Oerter von S. 332 bis 387 bzw. 196 bis 242 enthalten, so können wir das zuletzt gewonnene Resultat mit den vom Jahrbuch gelieferten Werthen vergleichen. Es ist aber nach dem N. A. für α Aquarii

13. Oct. 1870 $\text{Æ app.} = 21^h\,59^m\,5^s{,}385$

$\text{Decl. app.} = -\,0^0\,56'\,46'',05$

welche Werthe mit unseren Berechnungen sehr nahe übereinstimmen.

Es muss hierbei noch bemerkt werden, dass die Berechnungen n. Gl. (49) streng genommen nur für den Ort Greenwich und die Zeit: 13. October 1870 Mitternachts gelten und dass, wenn man für eine andere Tageszeit bzw. auch für einen anderen Ort die genaue scheinbare Æ und δ finden wollte, man alle Coefficienten und Logarithmen, welche in den Rechnungen vorkamen, entsprechend durch Interpolation zu verändern hätte. Ferner muss noch erwähnt werden, dass der Einfluss der täglichen Aberration im Vorausgehenden nicht berücksichtigt worden ist und im Falle er berücksichtigt werden soll, die Gleichungen (26) S. 178 anzuwenden sind.

In unserem Falle würde, da die Sternzeit im mittleren Mittage oder

$$\begin{aligned} T &= 13^h\,27^m\,22^s{,}55 \\ Æ_* &= 21\;\;59\;\;\;8\,{,}38 \\ \hline (T - Æ_*) &= 15^h\,28^m\,14^s{,}17 = 232^0\,3'\,32'' \\ \varphi &= 51^0\,28'\,38'' \\ \delta &= -\;\;56'\,46'' \end{aligned}$$

ist, diese Berechnung sich so gestalten:

$$\begin{aligned}
log\, 0'',3113 &= 9{,}49318 \\
cos\,(T - Æ_*) &= 9{,}78878_n \\
cos\,\varphi &= 9{,}79393 \\
sec\,\delta &= 0{,}00006 \\
&\ 9{,}07595_n \\
log\, 15 &= 1{,}17609 \\
log\, \varDelta Æ' &= 7{,}89986_n \\
\varDelta Æ' &= -\,0^s{,}008
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
log\,(0{,}3113 \,.\, cos\,\varphi) &= 9{,}28758 \\
sin\,(T - Æ_*) &= 9{,}89688_n \\
sin\,\delta &= 8{,}21779_n \\
log\, \varDelta\delta' &= 7{,}40225 \\
\varDelta\delta' &= 0'',003
\end{aligned}$$

Im Anschlusse an unsere beiden letzten Kapitel und auch mit Rücksicht auf verschiedene Lehren des nun folgenden zweiten Theils mögen noch folgende Angaben Platz finden, die vielleicht manchem Leser erwünscht sein können.

Was insbesondere die Berechnung der scheinbaren Oerter der Fixsterne anlangt, so können specieller in Betracht kommen:

Sawitsch, „Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung." Hamburg bei Perthes - Besser und Mauke 1851. Bd. II. S. 445 mit der Ueberschrift: „Verzeichniss der mittleren Oerter von vierzig nördlichen Circumpolarsternen, mit den nöthigen Constanten zur Reduction auf den scheinbaren Ort, nach der Bessel'schen Methode." Ferner Brünnow's schon wiederholt citirtes Werk „Sphärische Astronomie" 3. Aufl. insbesondere: vierter Abschnitt I. S. 199 mit der Ueberschrift: „Von der Reduction der mittleren Oerter der Sterne auf scheinbare und umgekehrt." Ferner die schon S. 220 citirte Schrift Wolfers „Tabulae reductionum etc." Ferner unter den Fixsternkatalogen insbesondere „The Catalogue of stars of the British Association etc." Dieser Catalog erschien im Jahre 1845 zu London, und enthält 8377 Sterne aufgeführt für die Zeit 1. Januar 1850 auf den geraden Seiten für Æ, auf den ungeraden für δ. Insbesondere würde auch die Einleitung in Betracht kommen. Der von uns gewählte Stern α Aquarii trägt auf S. 342 und 343 die Nummer 7688.

Weiter nennen wir noch unter den Schriften, die eine vorbereitende Darstellung der im Vorausgehenden zuletzt besprochenen Gegenstände enthalten insbesondere Mädler, „der Fixsternhimmel, eine gemeinfassliche Darstellung der neueren auf ihn sich beziehenden Forschungen." Leipzig, Brockhaus 1858. Man wird hierin namentlich auch über die Eigenbewegungen der Fixsterne Belehrung finden. Ferner empfehlen wir noch ein schon oben S. 201 genanntes Werk von J. K. Klein, „Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung etc." Insbesondere II. Thl. „der Fixsternhimmel", Abschnitt „Eigenbewegung der Fixsterne."

Zweiter Theil.

Die Methoden der Zeitbestimmung.

Kapitel VI.

Einrichtung und Theorie der Libelle.

§. 51. Zum Horizontalstellen einer Fernrohraxe bzw. einer Fernrohrebene bedient man sich eines Apparates, den man „Libelle" oder „Niveau" zu nennen pflegt und der in doppelter Form zur Anwendung kommt: nämlich bald als sogenannte „Dosenlibelle" bald als „Röhrenlibelle." Letztere ist vorzugsweise im Dienste des Astronomen und Geometers zu finden, wesshalb wir ihr allein unsere Aufmerksamkeit schenken wollen.

Die Röhrenlibelle besteht aus einer Glasröhre, die mit Aether gefüllt ist, jedoch so, dass noch ein kleiner Raum bei der Füllung übrig bleibt, der hernach, wenn die Röhre beiderseits ätherdicht verschlossen ist und der horizontalen Lage sich sehr nähert, einen Blasenraum bildet, dessen Formverhältnisse vom Verfasser nach verschiedenen Richtungen hin einer Experimentaluntersuchung *) unterworfen wurden, und glaubt derselbe an dieser Stelle auf die betreffende Arbeit hinweisen zu sollen.

Innere Form der Libellenröhre.

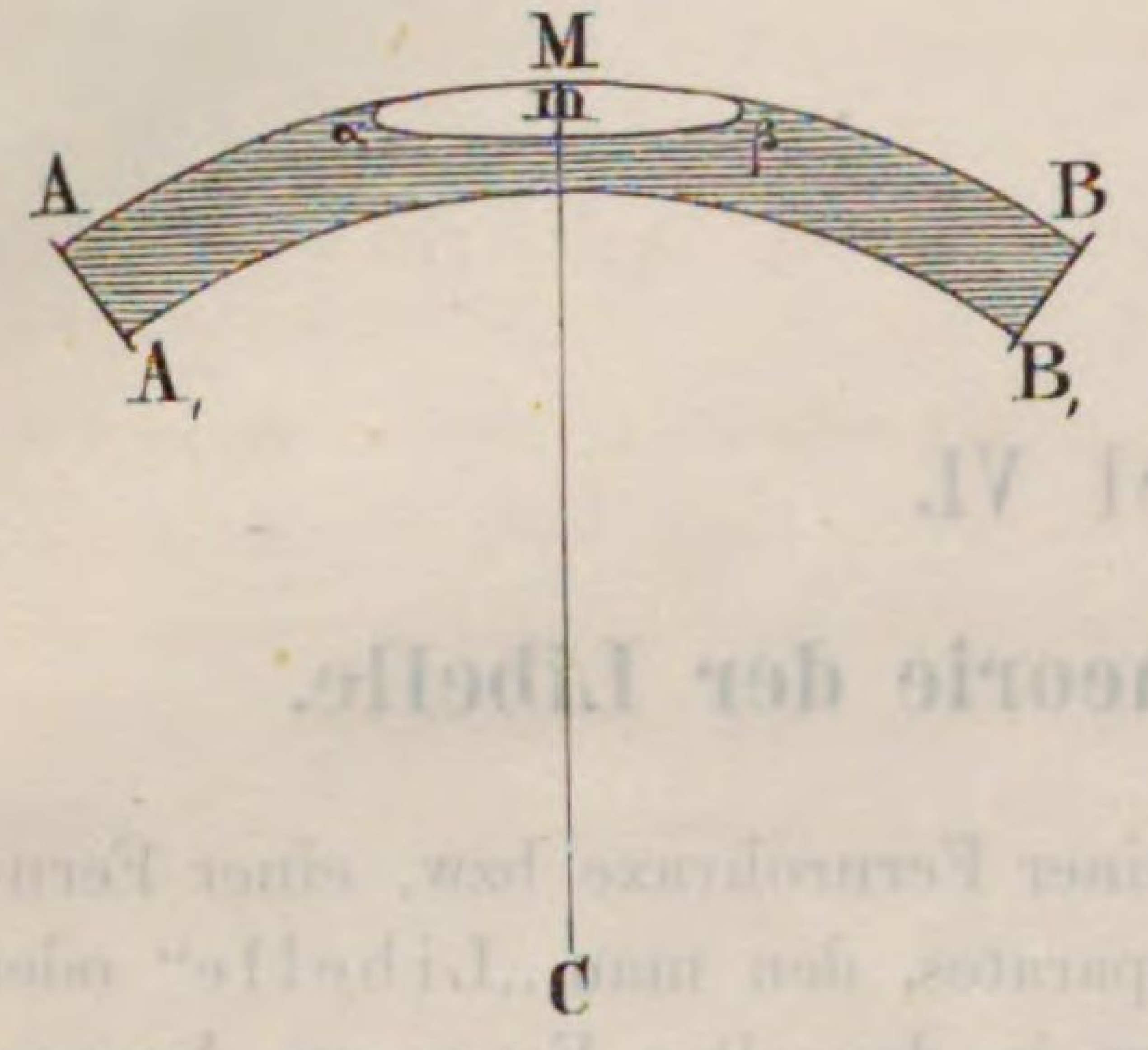
Eine Blase der genannten Art hat bekanntermaassen die Eigenthümlichkeit, dass sie die höchste Stelle der Röhre einzunehmen bestrebt ist, eben darum, weil die den Blasenraum eigentlich bildende Flüssigkeit die tiefste Stellung zu erlangen sucht. Wollte man nun die Röhre genau cylindrisch wählen, so würde die Blase an einer anderen Stelle als an den Enden der Röhre nur dann zur Ruhe kommen, wenn die Axe der Röhre ganz genau horizontal läge, und würde ein Minimum Abweichung von dieser Lage die Blase sofort bis zu dem Ende zum völligen Aufsteigen bringen, das eben bei der Neigung höher zu liegen kam.

---

*) F. Melde: „Experimentaluntersuchungen über Blasenbildung in kreisförmig cylindrischen Röhren." Thl. I. Abschn. 1 u. 2. Marburg. N. G. Elwert.

Man giebt daher dem Innern der Libellenröhre zwei andere Formen. Die eine ist in Figur 50 dargestellt, und ist hierbei die Röhre $ABA_{,}B_{,}$ nach einem Kreisbogen so gebogen, dass das Centrum des äusseren Kreises AB in C liegt. Es wird jetzt die Mitte m des Blasenkörpers und zugleich der höchste Punkt desselben nach eingetretener Ruhe mit dem Punkte zusammenfallen, den eine im Punkte M an AB gelegte horizontale Berührungsebene mit AB gemein hat. Bei der Figur ist angenommen, es liefe der Radius $CM = r$ zugleich durch die Mitte M der äussersten Contour des Röhrenkörpers und sei ausserdem CM vertical, woraus folgt, dass die Mitte m der Blase dann nothwendig mit M zusammenfallen muss. Es sind also hier und im Folgenden immer zwei Mitten, die wir mit M und m bezeichnet haben, zu unterscheiden. Ausserdem wird die Strecke $\alpha\beta$, im Folgenden mit λ bezeichnet, oder die „Länge“ der Blase in Betracht kommen, und ist dieselbe gleich dem Abstande zweier an die äussersten Enden der Blase bei α und β angelegten verticalen Berührungsebenen.

Figur 50.



Denken wir nun die Libellenröhre durch eine Ebene der Länge nach in zwei symmetrische Hälften zerlegt, so geht diese Ebene zugleich durch den Radius MC und möge „Längsmittelebene der Röhre“ heissen. Jede andere hierzu senkrechte Ebene, die zugleich durchs Centrum C geht, schneidet die Röhre in einem Kreise durch und möge „Quermittelebene der Röhre“ heissen. Ebenen der letzteren Art giebt es bei dieser Form der Röhre unzählig viele, während die Längsmittelebene nur einmal vertreten ist.

Mit einer Röhrenlibelle können zunächst blos gerade Linien in horizontale Lagen gebracht werden, also z. B. eine Fernrohraxe, oder eine in der Ebene eines Theilkreises liegende Gerade horizontal gestellt werden. Denken wir uns eine solche Gerade PQ im Raume, so wird durch sie jederzeit eine Verticalebene hindurch gelegt werden können, die wir im folgenden immer kurz die „Hauptverticalebene“ nennen wollen. Denken wir ferner die Libelle zur Horizontalstellung der Geraden PQ irgend wie angebracht, so wäre es möglich, dass die Längsmittelebene der Röhre mit der Hauptverticalebene coincidirte, oder wenigstens hierzu parallel verliefe. Gewöhnlich aber wird dies ohne Weiteres noch nicht der Fall sein und sind dann

drei wesentlich verschiedene Lagen der Längsmittelebene denkbar, nämlich:

1) sie durchschneidet die Hauptverticalebene in einer verticalen Geraden;
2) sie ist nicht vertical und durchschneidet die letztere in einer horizontalen Geraden;
3) sie ist nicht vertical und durchschneidet die Hauptverticalebene in einer schiefen Geraden.

Die Praxis verlangt nun stets eine Coincidenz der Längsmittelebene der Röhre mit der Hauptverticalebene bzw. den Parallelismus damit und um diese Coincidenz herbeizuführen, falls sie nicht vorhanden sein sollte, wird eine Correction am Mechanismus der Libelle nöthig, die man mit dem Namen der

„Seitencorrection"

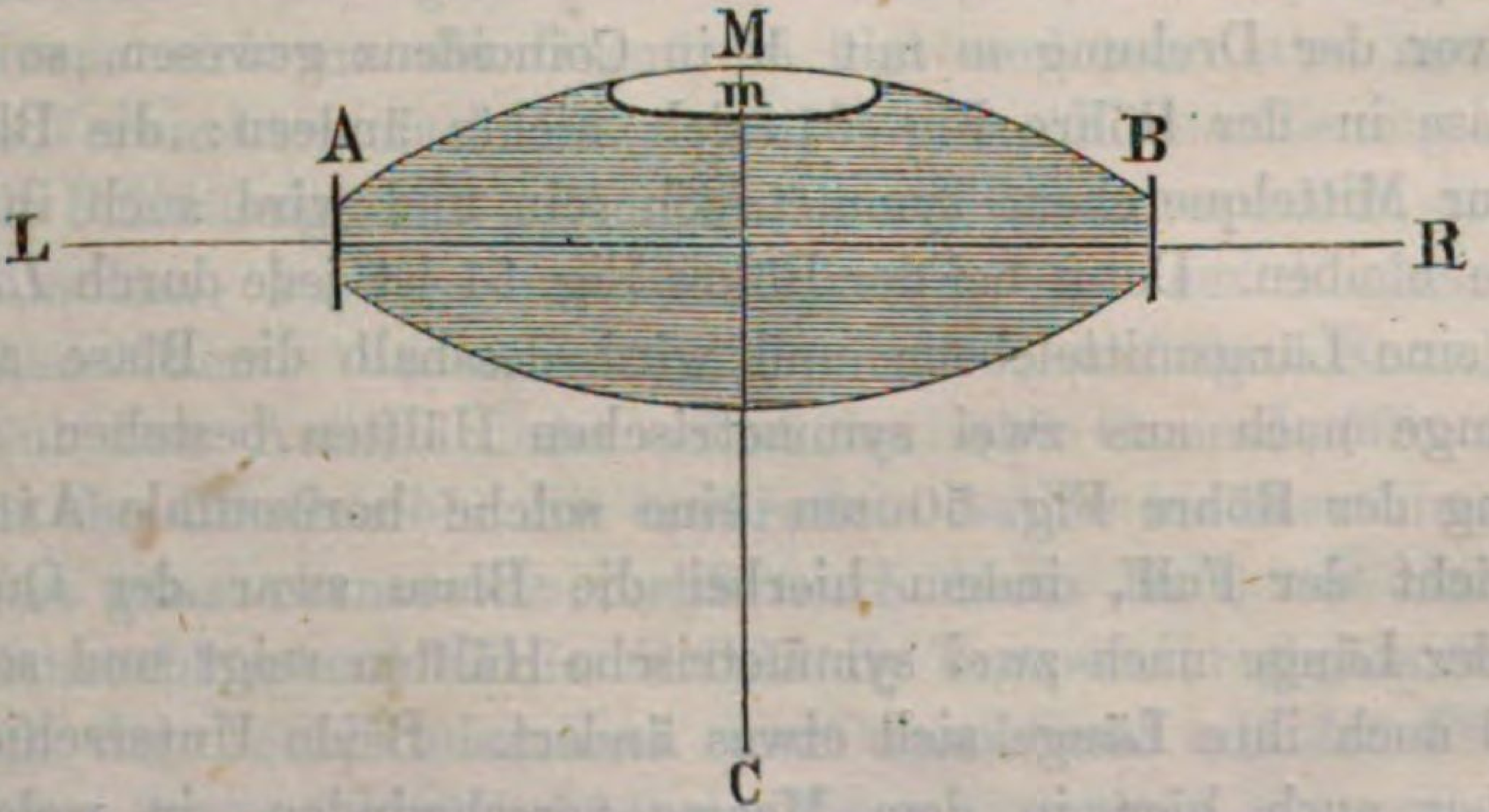
bezeichnet. Die Praxis verlangt ferner, falls wir die genannte Coincidenz bestehend denken und annehmen, dass PQ schon von vorn here'n horizontal liegt, eine Libelle, bei welcher auch zweitens der Punkt m genau mit M zusammenfällt. Ist das nicht der Fall, so, liegt der Fehler ebenfalls an dem Mechanismus der Libelle und eine zweite Correction wird nöthig, die man mit dem Namen

„Höhencorrection"

belegt hat.

Bevor wir aber diese beiden Correctionen genauer betrachten, wollen wir uns die zweite Form ansehen, die man dem inneren Raum des Libellenkörpers zu geben pflegt. Denken wir in der Figur 50 den Kreisbogen AB um eine zu MC senkrechte Axe, die zugleich mit AB in dieselbe Ebene fällt, rotirend, so wird vom Kreisbogen AB eine Rotationsfläche beschrieben, die als die „Fassform" bezeichnet werden kann und in Figur 51, woselbst LR die Rotationsaxe bildet, dar-

Figur 51.



gestellt ist. Würde es möglich sein, einen solchen Ausschliff im Innern einer Glasröhre genau herzustellen, so würde eine solche Libelle im Vergleich zu der in Figur 50 gezeichneten manchen Vorzug andererseits aber auch manchen Nachtheil besitzen. Um dies einzusehen, beachte man folgendes. Gesetzt bei beiden Libellen sei die oben bezeichnete Coincidenz der Röhren-Längsmittelebene mit der Hauptverticalebene erreicht und man neigte, ohne dass diese Coincidenz aufhörte, das eine Ende der Libelle etwas, so würde bei der Libelle Fig. 50 die Blase sich dem andern Ende nähern, sich mit ihrer Mitte m auf einen andern Punkt einstellen, hierbei aber g e n a u ihre Länge λ beibehalten; auch würde eine durch m gelegte Querebene die Blase immer in zwei genau symmetrische Hälften theilen, so dass, wenn man die Enden α und β der Blase von der Röhrenmitte M aus mässe und das Vorzeichen dieser Entfernungen beachtete, der Ort des Punktes m gegeben würde durch $\frac{M\alpha + M\beta}{2}$. Nicht so fiele die Sache bei der Röhre Fig. 51 aus. Bei ihr sind die Querschnitte nach den Enden hin andere und wird bei einer Neigung des einen Endes die Blase sich um ein Stück nach der entgegengesetzten Seite bewegen, wobei $\frac{M\alpha + M\beta}{2}$ wohl noch die Mitte der Blase, aber nicht mehr eine solche Mitte ist, zu welcher beiderseits genaue symmetrische Hälften angenommen werden können. Dieser Unterschied der beiden Formen, darin also bestehend, dass dort bei jeder Neigung des einen Endes stets die Länge der Blase dieselbe bleibt und diese auch stets in zwei symmetrische Theile durch eine Querebene getheilt werden kann, dass hier dagegen beides nicht der Fall ist, wird aber in dem Maasse mehr verschwinden, als der Radius CM grösser und grösser wird. Diese Eigenthümlichkeit der Röhre Fig. 50 gab ihr gegenüber der von Fig. 51 einen entschiedenen Vorzug. Drehen wir dagegen beide Röhren um eine horizontale Axe, die zugleich parallel der Hauptverticalebene oder in derselben liegt und nehmen wir an: es sei vor der Drehung m mit M in Coincidenz gewesen, so wird bei der Blase in der Röhre Fig. 51 sich nichts ändern: die Blase wird stets zur Mittelquerebene symmetrisch sein und wird auch ihre Länge dieselbe bleiben. Denn bei der Röhre Fig. 51 ist jede durch LR gelegte Ebene eine Längsmittelebene und wird desshalb die Blase auch stets der Länge nach aus zwei symmetrischen Hälften bestehen. Bei der Drehung der Röhre Fig. 50 um eine solche horizontale Axe ist das aber nicht der Fall, indem hierbei die Blase zwar der Quere aber nicht der Länge nach zwei symmetrische Hälften zeigt und somit ohne Zweifel auch ihre Länge sich etwas ändert. Beide Unterschiede werden aber auch hier in dem Maasse verschwinden, in welchem der

Radius CM grösser wird und beide Formen sich mehr der Form der geraden cylindrischen Röhre nähern.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass wir nicht im Stande sind, die beiden Formen der Fig. 50 und 51 mathematisch genau herzustellen. Denn: denken wir, es wäre zur Herstellung von Fig. 50 zunächst ein genau geradlinig cylindrisches Rohr gegeben und man solle es durch Erhitzen nach einem Kreisbogen biegen, so leuchtet ein, dass dies genau genommen unmöglich ist. Von einer solchen Biegung muss man daher ganz absehen und sucht sich statt dessen aus vorhandenen Glasröhren, die selten der ganzen Länge nach genau geradlinig gefunden werden, nach erlangter Uebung und Kenntniss solche Stellen aus, von denen man erwarten kann, dass sie eine sehr schwache und nach beiden Seiten hin regelmässige Krümmung, die sehr nahe als eine Kreiskrümmung angesehen werden darf, besitzen. Noch weniger aber lässt sich wohl die Fassform mathematisch genau erreichen, denn das Innere der Röhre müsste mit einem festen Körper, der nach einem Kreisbogen geformt und mit Schmirgel bestäubt ist, ausgeschliffen werden. Ein solcher Körper lässt sich aber selbst schwerlich genau herstellen und fällt hiermit auch die absolute Genauigkeit dessen, was man mit ihm herzustellen bestrebt ist, weg. Da der Libellenkörper in praxi nicht viel um die Axe PQ gedreht und desshalb die Fassform nicht ringsum zu besitzen braucht, so wird es daher auch wohl als genügend erachtet, wenn man ihn blos am Rücken möglichst danach ausschleift.

§. 52. Ist nun auf solche oder ähnliche Weise ein Libellenrohr zu Stande gekommen, so wird dasselbe zunächst entweder am Rücken eingetheilt oder erst gefüllt. Die Füllung geschieht in der Weise, dass die offenen Enden der Glasröhre conisch ausgeschliffen und zwei ebenfalls conisch abgeschliffene Glasdeckel dazu als Verschluss passend gemacht werden. Sobald diess geschehen, wird das eine Deckelchen aufgesetzt und mit Hausenblase so überzogen, dass diese über den Rand hinaus sich um die Glasröhre legt und jede etwa noch übrig bleibende Verbindung nach Aussen durch einen Firnissüberzug beseitigt wird. Als Füllflüssigkeit wird immer Schwefeläther verwandt, doch wäre es zu wünschen, auch andere Flüssigkeiten, die der Fortschritt der organischen Chemie uns fast täglich liefert, auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen. Der Aether siedet schon bei 35° C. und füllt man zu dem Ende das Libellenrohr mit erwärmtem Aether bis oben hin voll und verschliesst ganz ebenso wie vorhin auch dieses Ende mit einer Glasplatte, Hausenblase und Firniss. Sobald die Temperatur abgenommen hat zieht sich der Aether zusammen und umschliesst mit der Röhre den Blasenraum, der natürlich nicht ein leerer, sondern ein mit Aether-

dämpfen gefüllter Raum ist. In dem Maasse aber, wie diese Zusammenziehung des Aethers fortschreitet, wird die Blase grösser und grösser, woraus folgt, dass unter Umständen eine Libelle nicht bei jeder Temperatur gebraucht werden kann, da bei grösserer Kälte die Blase vielleicht länger wird, als die Röhre ist, d. h. zur Ausbildung ihrer gewöhnlichen freien Enden eine längere Röhre verlangt. Für diesen Fall würde man eine solche Libelle durch eine andere ersetzen müssen.

Da der Aetherdampf im Blasenraum auch eine Spannkraft ausübt, die bei 35^0 C. schon gleich einem Atmosphärendruck ist, so kann die Frage entstehen, ob neben der Ausdehnung und Zusammenziehung des Aethers auch durch diesen Gasdruck die Form, also insbesondere die Länge der Blase geändert werden kann. Der Verfasser hat jedoch im §. 8 seiner oben angeführten Abhandlung nachgewiesen, dass dies erst bei der Vermehrung des Drucks um mehrere Atmosphären der Fall ist und dass bei den Druckveränderungen, wie sie die wechselnden Lufttemperaturen herbeiführen, ein Einfluss der Spannkraft des Aetherdampfes als Null angesehen werden kann.

Was ferner die Eintheilung auf dem Rücken der Libellenröhre anlangt, so sei bemerkt, dass man das Libellenrohr meistens von der Mitte *M* aus beiderseits in eine gleiche Anzahl Theile von 10 zu 10 oder 5 zu 5 theilt. Die Entfernung der Theilstriche ist im Allgemeinen gleichgiltig, doch wird man sie meist gleich 1 par. Lin. antreffen. Weil diese Theilung natürlich blos auf der Aussenseite des Glasrohrs angebracht werden kann, so wird bei dem Ablesen der beiden Enden auch eine Parallaxe in Betracht kommen, die um so bedeutender ausfallen kann, je dicker die Glaswand der Röhre ist. Um diesen parallaktischen Fehler zu vermeiden, muss das Auge sich in einer Ebene befinden, welche senkrecht zur Röhre das eine abzulesende Ende der Blase zugleich tangirt, was ohne besondere Hilfsmittel nicht möglich ist. Man wendet diese jedoch beim Ablesen der Blasenenden nicht an und besteht hierin schon eine Ungenauigkeit. Da wo es darauf ankommt, diese zu vermeiden, kann man sich etwa solcher Mittel bedienen, wie sie der Verfasser in seiner citirten Abhandlung §. 3 Absatz 4 und §. 12 Absatz 1 angegeben hat.

Bezüglich der Armirung kommt es darauf an, ob man eine sogenannte „Hängelibelle“ oder eine „Setzlibelle“ zu machen gedenkt. Erstere wird benutzt zum Anhängen an Fernrohraxen, letztere zum Aufsetzen darauf sowie auch zum Aufsetzen auf horizontal zu stellende Flächen. Für die Hängelibellen wird dann die Sache so eingerichtet, wie die Figur 52 versinnlicht, indem der ganze Apparat mit den Hacken *s* an die betreffende Fernrohraxe angehangen wird. Die Setzlibelle wird an ihren beiden Enden mit „Stützen“ versehen, die

entweder direct auf eine Messingbasis aufgeschraubt sind, falls die Libelle auf einer Fläche beliebig verschoben werden soll, oder frei enden und dann unten für das Aufsitzen auf einer Fernrohraxe entweder einen kreisförmigen oder einen Winkelausschnitt erhalten.

Fig. 52.

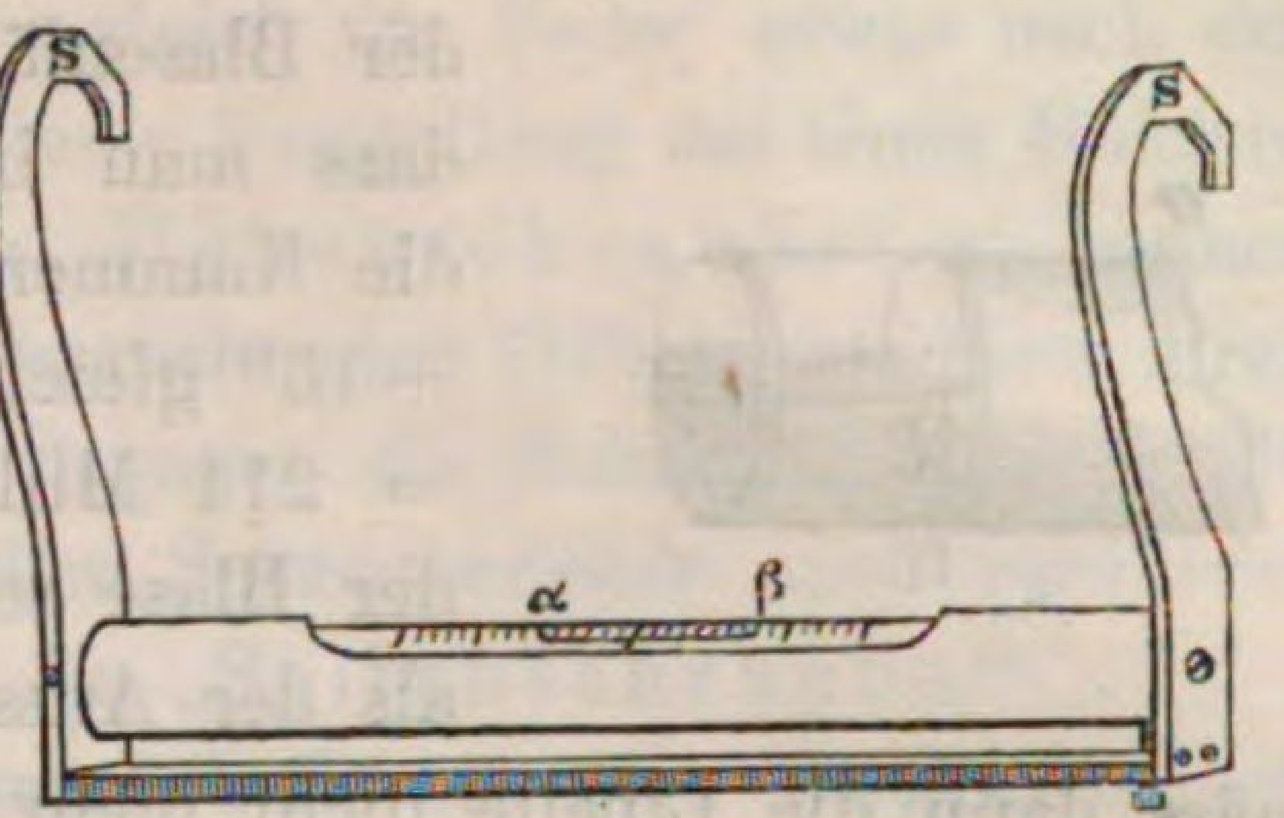
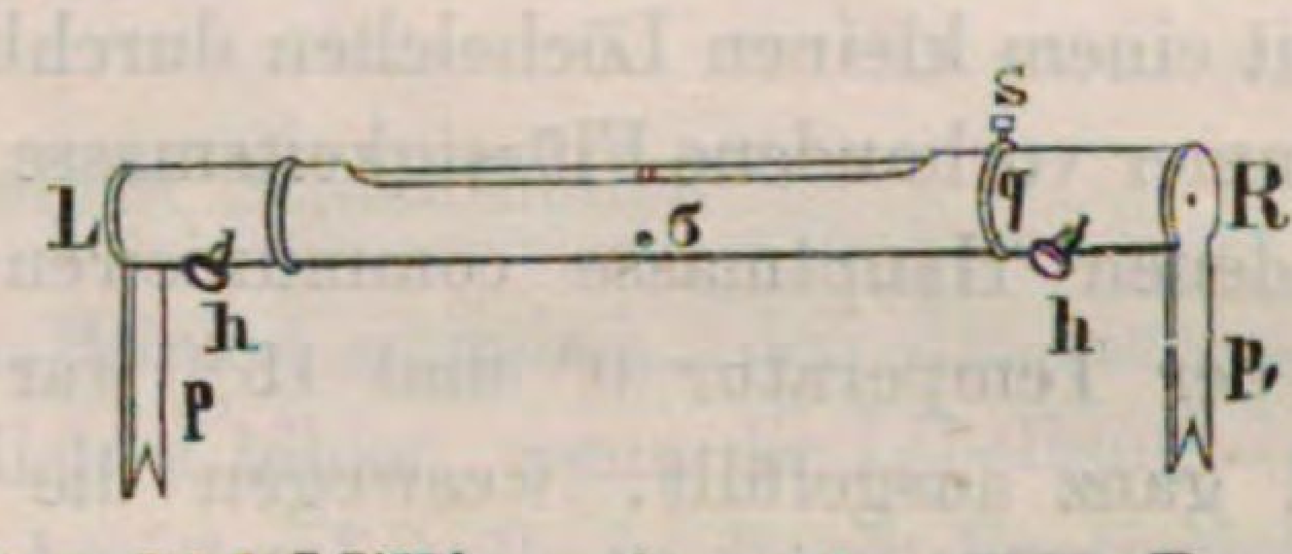


Fig. 53. *a* stellt eine Libelle vor, wie sie dem im Marburger mathematisch-physikalischen Institut befindlichen Passageinstrument von Ertel beigegeben ist und zwar in $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse. Die ganze Länge des Apparats beträgt 347 Millimeter, die Höhe der Stützen von einem Ende bis zum andern 99 Millim. Das Glasrohr besitzt bei einer Länge von 296 Millim. einen äusseren Durchmesser von 21,5 Millim. und ist durchaus mit einem Messingmantel umgeben, der nur oben auf eine Länge von 185 und einer grössten Breite von 18 Millim. ausgeschnitten ist, um eben die Röhre mit der Theilung und die Blase beobachten zu können.

Fig. 53. a



Da das innere Caliber des Messingmantels etwas grösser ist, als das äussere Caliber der Röhre, und so diese ohne Weiteres nicht fest in ersterem liegt, so wird dies Festliegen durch eine Feder bewerkstelligt, deren Mitte mit einem Schräubchen σ innen an die Cylinderhülse festgeschraubt ist und deren beide Hälften federnd die Glasröhre nach oben fest andrücken, jedoch nicht so fest, dass namentlich nicht das eine Ende durch zwei sogleich zu erwähnende Schrauben wieder etwas herunter oder etwas seitlich bewegt werden könnte. Um die beiden federnden Hälften der Feder ausser Thätigkeit zu setzen, tragen sie an den Enden zwei Schraubenspindelchen, die frei durch den Messingmantel hindurchgehen und mittelst zweier kleiner Schraubenmuttern *hh* angezogen werden können.

Fig. 53. *b* stellt das Ende einer Libellenstütze vor und sieht man, wie die Ausschnitts-Kanten $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ nach einem Punkte γ hin und zwar vorliegenden Falls unter einem Winkel von 80^0 convergiren.

Fig. 53. b

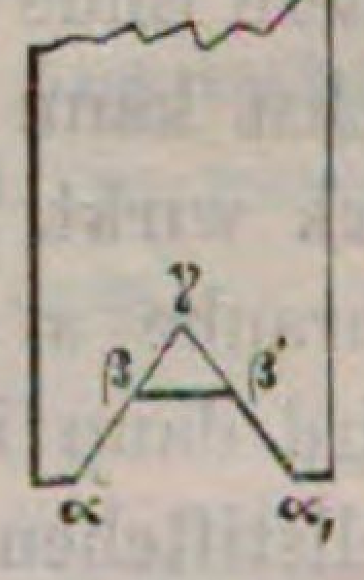
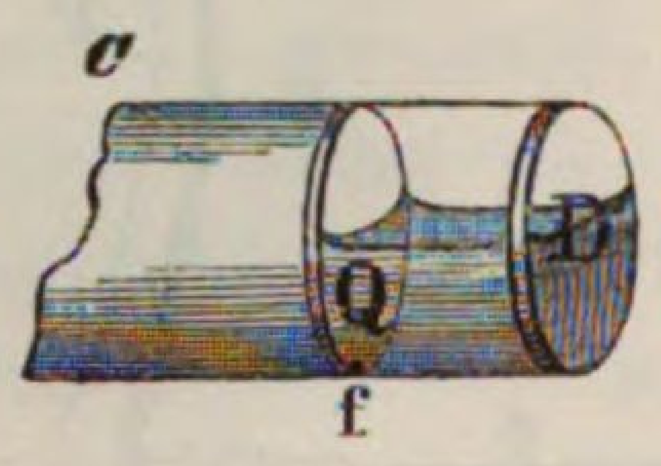


Fig. 53. *c* versinnlicht das eine Ende der aus ihrer Fassung herausgenommenen Glasröhre und zwar das Ende, welches mit der sogenannten „Blasen- oder

Fig. 53. c



Reservekammer" versehen ist. Das Maximum der Blasenlänge, welches dadurch erhalten wird dass man in der sogleich anzugebenden Weise die Kammer ganz mit Aether anfüllt, war bei $+15^0$ gleich 19, bei 0^0 gleich 94 Theilstrichen = 211 Millim., woraus folgt, dass die Länge der Blase schon bei 0^0 länger geworden wäre, als der Ausschnitt im Messingcylinder, demgemäss dann die Libelle nicht mehr hätte benutzt werden können. Um dies aber doch wieder zu ermöglichen, ist zwischen *D* und *Q* Fig. 53. *c* eine Kammer hergestellt dadurch, dass bei *Q* eine Scheidewand von Glas eingekittet ist, die wie die Figur zeigt, unten an der Basis der Röhre bei *f* mit einem kleinen Löchelchen durchbohrt ist, durch welches eine in der Kammer vorhandene Flüssigkeitsmasse mit der in der übrigen Röhre vorhandenen Hauptmasse communiciren kann. Bei unseren Versuchen bei der Temperatur 0^0 und 15^0 war die Reservekammer mit Flüssigkeit ganz ausgefüllt, weswegen die Blasenlängen ein Maximum besassen. Will man also die Blase verkleinern, so hat man nur die Libelle vertical mit der Kammer nach oben und umgekehrt wenn sie vergrössert werden sollte vertical mit der Kammer nach unten zu halten, und ein wenig daran zu klopfen, damit die Aetherbläschen in der einen oder andern Richtung sich durch *f* hindurchdrängen können.

Von besonderer Bedeutung sind noch zwei Druckschrauben *s* und *s'*, von denen die eine *s* in Fig. 53. *a* zu sehen ist, während die andere 90^0 hievon ab auf der hinteren Seite der Libelle gedacht werden muss. Diese Schrauben müssen einen sicheren Gang haben und sind desshalb nicht direct in den Messingcylinder eingeschraubt, sondern durchsetzen zuerst einen über denselben herumlaufenden Messingring *q*. Sehen wir uns die Wirkung dieser Schrauben genau an. Die Feder, welche die Libellenröhre an die oberen Theile der innern Messinghülse andrückt, drückt nicht vertical in die Höhe, sondern etwa unter 45 Grad schief nach oben und wirkt mit ihrer vollen Kraft, wenn die kleinen Schraubenmütter *h* ganz zurückgeschraubt werden. Das eine Ende der Röhre liegt alsdann unmittelbar an der innern Cylinderwand an und wird dort durch den schiefen Druck festgehalten; das andere Ende aber stösst an die Schraubenenden von *s* und *s'* an. Zunächst kann nun die Röhre ohne Weiteres, da die Feder nicht allzu stark wirkt, mit der Hand so um ihre Axe gedreht werden, dass die Schraube *s* möglichst genau in die Richtung der Theilung kommt. Wird dann in das Löchelchen vom Schraubenköpfchen von *s* ein kleines Stellstiftchen gesteckt, so kann man mit diesem das eine Ende der

Röhre etwas höher oder tiefer stellen, indem beim Einschrauben von s dies Ende etwas nach unten und zugleich die Feder etwas nach der Seite gedrängt wird. In Folge von dieser Verstellung des einen Röhrenendes pflegt man die Schraube s die „Höhenschraube" zu nennen und wird sie sogleich bei der zu besprechenden Höhencorrection ihren Namen weiter rechtfertigen. Wird dagegen die Schraube s' verstellt, so bewegt sich die Röhrenaxe an dem Schraubenende nach vorn oder nach hinten und heisst s' desshalb die „Seitenschraube."

§. 53. Nachdem der Bau einer Libelle so weit beschrieben ist, dass wir glauben, auch hiermit das leichte Verständniss des Mechanismus jeder andern Libelle ermöglicht zu haben, wollen wir die eigentliche Theorie nun weiter verfolgen und eine erste Aufgabe lösen, nämlich den

Winkelwerth eines Scalentheiles

zu bestimmen suchen, d. h. den Winkel angeben, den die neue Lage der Libellenaxe mit der ursprünglichen bildet, wenn die Libellen-Längsmittelebene vertical liegt und die Axe der Libelle in dieser Verticalebene so weit verstellt wird, dass die Blase um einen Scalentheil (1 par. Lin.) fortrückt.

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen wir uns zunächst verständigen, wie wir den Stand der Blase, d. h. den Scalentheil, auf dem die Mitte m des Blasenkörpers liegt, bestimmen, und welche Bezeichnung in Buchstaben wir hierbei einführen wollen. Wenn man die Theilung von einem Ende aus rechnet, so entspricht bei unserer oben beschriebenen Libelle dem Punkte M der Scalentheil 45 und werden demnach Zahlen, die den Stand von m angeben und grösser als 45 sind, ein Einstehen der Blasenmitte nach der einen Hälfte, dagegen Zahlen die kleiner als 45 sind, den Stand nach der anderen Hälfte andeuten. Denken wir die Axe der Libelle z. B. von West nach Ost gerichtet und bezeichnen die Enden der Blasen entsprechend mit w und o, ganz abgesehen davon, ob das Libellenrohr einmal so oder um 180^0 herumgelegt ist, rechnen wir ferner auch ein für allemal die Zahlen von Westen nach Osten, so liegt die Mitte der Blase beim Scalentheil:

$$m = \frac{w + o}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

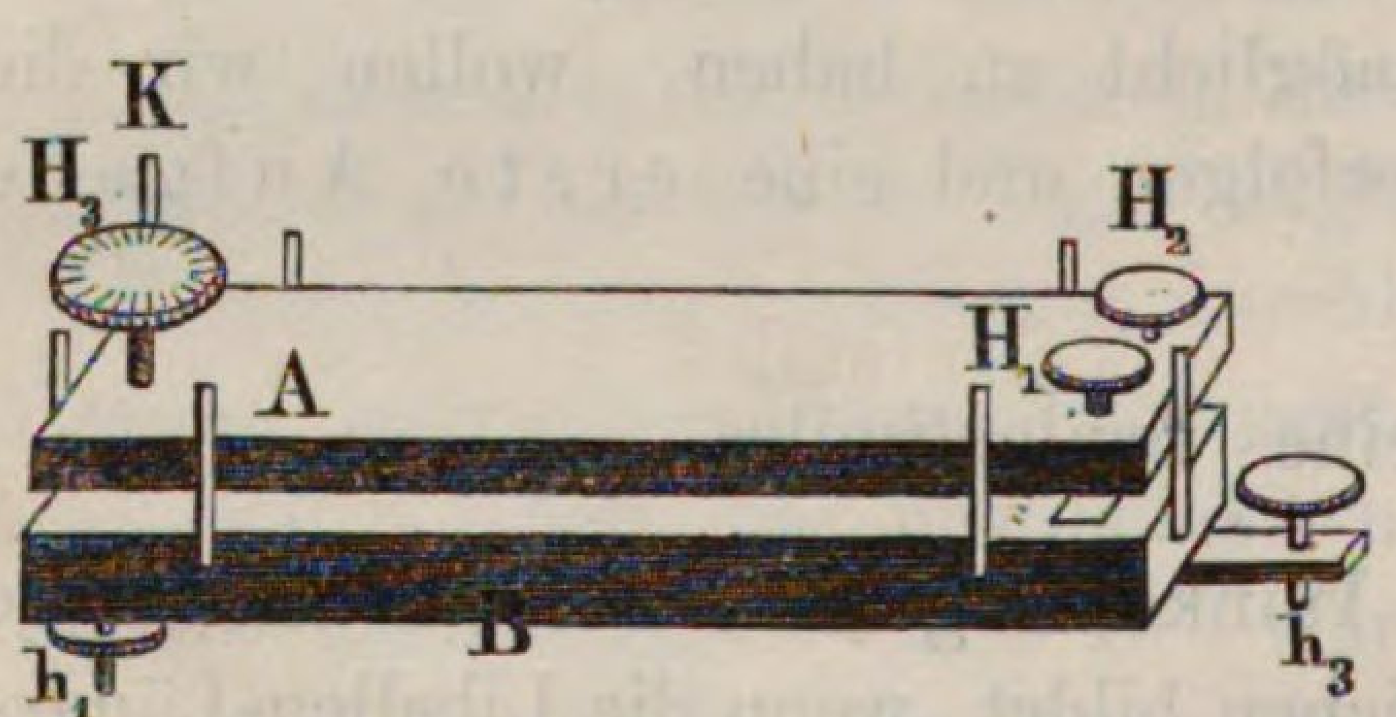
vom Nullpunkt aus gerechnet. Hierbei wäre unter allen Umständen $o > w$. Wollte man aber den Stand von der Mitte M aus rechnen, so müsste wenn μ den der Mitte zukommenden Scalentheil (in unserem Beispiele „45") bezeichnet, dies μ abgezogen werden, so dass

$$m = \frac{w + o}{2} - \mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die Formel für die Lage des Punktes m ist, wonach die Mitte der Blase nach Osten hin liegt, wenn m positiv und umgekehrt die Blasenmitte nach Westen hin einsteht, wenn m negativ ausfällt. Für die Lösung unserer Aufgabe ist die Formel (1) die bequemste und lesen wir ihr gemäss zunächst ab; später werden wir noch eine andere Eintheilung und Ablesung kennen lernen.

Zur praktischen Lösung unserer Aufgabe bedient man sich nun des sogenannten „Libellenjustirbrets“, eines Apparates, der mit geringen Kosten hergestellt werden kann und zeigt die Fig. 54 ein in unserem Gebrauche befindliches Instrument. Dasselbe besteht aus zwei starken Bretern von Birnbaumholz: beide 140^{mm} breit, 430^{mm} lang, während A 22^{mm} und B 60^{mm} dick ist. B bildet einen Tisch, indem es seinerseits auf drei Fussschrauben h_1, h_2, h_3 auf einer Mauer oder sonstwo unverrückbar aufsteht und auf ihm wiederum A auf drei Fussschrauben H_1, H_2, H_3 ruht, eine Einrichtung, die mancherlei Vortheile gewährt. Soll aber A auf B entsprechend aufsitzen, so kann das nur in der Weise geschehen, dass die Schrauben H_1 und H_2 auf einer Glas- oder Achatplatte und ebenso H_3 auf einer solchen ruhen. Diese Platten sind in das Holz von B eingelassen und sind ausserdem, um ein Rutschen von A auf den Glasplatten zu verhindern, an B kleine verticale Holzleistchen befestigt, zwischen denen sich A möglichst ohne Reibung beim Heben und Senken bewegt. Um auf A eine Libelle mit oder ohne Fassung festzulegen, wird man im gegebenen Falle die nöthigen Hilfseinrichtungen treffen können.

Fig. 54



Die Hauptschraube und der wesentlichste Theil des Ganzen ist die Schraube H_3. Sie ist eine eigentliche Micrometerschraube mit einer 82^{mm} im Durchmesser haltenden Messingtrommel, die am Umfang in 100 Theile getheilt ist. Die Spindel ist 10,2^{mm} dick, geht durch eine in A sitzende Messingmutter hindurch und steht mit dem unteren Ende auf der in B eingelassenen Glasplatte. Das Schraubengewinde der Spindel lässt sich ohne Weiteres mit blossem Auge verfolgen und ergab sich bei einer directen Zählung zwischen zwei Zirkelspitzen auf 58 Millimeter eine Zahl von 66 Schraubengänge, so dass die Höhe eines Schraubengangs gleich $\frac{58}{66} = 0{,}8787^{mm}$ ist. Da aber die Trommel der Micrometerschraube in 100 Theile getheilt ist, so kann man noch be-

quem den hundertsten Theil dieser letzten Grösse, also 0,0087^{mm} einer Höhendifferenz bestimmen.

Zur Lösung unserer Aufgabe ist es unerlässlich, das Libellenjustirbret auf eine vollständig sichere Unterlage zu bringen und wurde zu dem Ende dasselbe auf die Mauer einer steinernen Fensternische gestellt und die Libelle auf A befestigt. Die weitere Beobachtung geschah in der Weise, dass die Blase durch Verstellung der Micrometerschraube H_3 bzw. auch mittelst der Schraube h_3 an das eine Ende der Röhre gebracht und dann die Trommel der ersteren um allemal fünf Theilstriche verstellt wurde, so dass nach und nach die Blase bis zum anderen Ende lief. Zwischen jeder Einstellung und der darauf folgenden Ablesung und ebenso zwischen dieser und der nächsten Einstellung verfloss allemal eine Minute. Die Beobachtung lieferte nun die sonderbarsten Abweichungen und theilen wir eine solche Zahlenreihe mit, um zu zeigen, dass es hierbei auf allerhand Dinge ankommt, die einen Unbewanderten zu mancherlei Fehlschlüssen, die wir noch näher bezeichnen werden, führen können. Die Zusammenstellung enthält unter S den Trommelstand, λ die ganze, $\frac{\lambda}{2}$ die halbe Länge; ferner unter m die Lage der Mitte und unter d die auf 5 Trommeltheile kommende Verstellung der Blase. Die Schraube H_3 lag hierbei zur Linken (Westen). Die Mitte der Theilung trug wie erwähnt den Scalentheil 45.

S	o	w	λ	$\frac{\lambda}{2}$	m	d
0	89,5	67,0	22,5	11,25	78,25	
						10,15
5	79,4	56,8	22,6	11,30	68,10	
						5,85
10	73,5	51,0	22,5	11,25	62,25	
						15,00
15	58,5	36,0	22,5	11,25	47,25	
						18,35
20	40,0	17,8	22,2	11,10	28,90	
						13,55
25	26,5	4,2	22,3	11,15	15,35	

Man sieht, die Grössen λ sind sehr nahe dieselben, aber die Verstellungen d stimmen so wenig überein, dass hierfür nothwendig der Grund gefunden werden musste. Die von uns beschriebene und der Prüfung unterworfene Libelle führt seit langer Zeit bei uns den Namen Hilfslibelle gegenüber einer zweiten und anders gefassten, die den Namen Hauptlibelle trägt. Um nun zu entscheiden, ob vielleicht der Apparat des Justirbrets die Ursache der sonderbaren Abweichungen sein möchte, wurde auch die Hauptlibelle auf dasselbe gesetzt und eine Beobachtungsreihe eröffnet, indem dreimal hintereinander die Blase von demselben Ende aus nach dem entgegengesetzten zur Bewegung gebracht wurde. Die Beobachtung ergab folgendes:

S	o	w	λ	$\frac{\lambda}{2}$	m	d	
			I.				
0	90,5	60,5	30,0	15,00	75,50	11,70	
5	78,8	48,8	30,0	15,00	63,80	11,80	
10	67,0	37,0	30,0	15,00	52,00	11,90	Mittel = 11,56
15	55,2	25,0	30,2	15,10	40,10	10,85	
20	44,0	14,5	29,5	14,75	29,25		
			II.				
25	90,6	60,0	30,6	15,30	75,30	13,00	
30	77,8	46,8	31,0	15,50	62,30	13,80	
35	64,0	33,0	31,0	15,50	48,50	11,10	Mittel = 12,51
40	53,0	21,8	31,2	15,60	37,40	12,15	
45	41,0	9,5	31,5	15,75	25,25		
			III.				
50	94,0	61,8	32,2	16,10	77,90	12,50	
55	81,6	49,2	32,4	16,20	65,40	13,20	
60	68,4	36,0	32,4	16,20	52,20	11,70	Mittel = 12,35
65	56,8	24,2	32,6	16,30	40,50	12,00	
70	44,8	12,2	32,6	16,30	28,50		

Man sieht, die einzelnen Versuchsreihen stimmen entschieden besser überein, wie die bei der Hilfslibelle und ergeben sich bei den drei Versuchen die neben der Columne d stehenden drei Mittelwerthe und hieraus das Gesammtmittel der Blasenverschiebung gleich **12,14** Theilstriche der Libelle für eine Verstellung um 5 Trommeltheile. Es war demnach sehr unwahrscheinlich, dass der Fehler im Justirbret zu suchen sei, vielmehr wurde angenommen, dass die Füllflüssigkeit erneuert werden müsse und wurde desshalb die Röhre mit neuem Aether gefüllt. Die herausgenommene Flüssigkeit hatte in der That nicht ein spec. Gew. von 0,7358 wie reiner Aether haben muss, sondern von 0,8500, und wich also bedeutend von reinem Aether ab. Nach geschehener neuen Füllung wurde die Bewegung der Blase von Neuem verfolgt und lieferte die Beobachtung folgendes:

S	o	w	λ	$\frac{\lambda}{2}$	m	d	
			I.				
0	81,4	56,5	24,9	12,45	68,95	12,10	
5	69,3	44,4	24,9	12,45	56,85	8,70	
10	60,5	35,8	24,7	12,35	48,15	14,15	Mittel = 11,66
15	46,2	21,8	24,4	12,20	34,00	11,70	
20	34,4	10,2	24,2	12,10	22,30		

S	o	w	λ	$\frac{\lambda}{2}$	m	d	
			II.				
20	86,6	63,2	23,4	11,70	74,90	11,15	
25	75,5	52,0	23,5	11,75	63,75	11,25	
30	64,2	40,8	23,4	11,70	52,50	10,00	Mittel = 11,66
35	54,5	30,5	24,0	12,00	42,50	13,90	
40	40,2	17,0	23,2	11,60	28,60	12,00	
45	28,2	15,0	23,2	11,60	16,60		
			III.				
45	84,2	61,2	23,0	11,50	72,70	13,00	
50	71,2	48,2	23,0	11,50	59,70	12,20	
55	59,0	36,0	23,0	11,50	47,50	10,75	Mittel = 12,18
60	48,2	25,3	22,9	11,45	36,75	12,75	
65	35,5	12,5	23,0	11,50	24,00		

Einzelne Zahlen weichen zwar immer noch stark von einander ab, doch können wir die Beobachtung und das aus ihr abgeleitete Gesammtmittel gleich **11,833** ruhig gelten lassen. Denn die Differenzen für d bei I in der zweiten und dritten Reihe zeigen offenbar, da 8,70 + 14,15 durch 2 dividirt 11,42 liefert, dass die Blase bei der dritten Einstellung sich etwas festgesetzt hatte, bei der vierten aber wieder ihren richtigen Stand der Einstellung gemäss einnahm. Auf solches zeitweise Hängenbleiben einer Blase wird man immer einmal gefasst sein müssen für den Fall, dass das Glasrohr vor der Füllung nicht aufs Sorgfältigste gereinigt oder dass der Aether nicht völlig frei von jeder mechanischen Beimengung war, indem beim Einfüllen vielleicht vom Zimmerstaub kleine Theilchen in die Röhre mitgenommen wurden.

Benutzen wir nun die erhaltenen Zahlen zur weiteren Lösung unserer Aufgabe und bedeutet h die Höhe eines Schraubengangs der Micrometerschraube H_3, ferner p die Anzahl Trommeltheile, die eine Verstellung der Blase um n Theile hervorrufen, ferner e das Perpendikel vom Fusspunkt von H_3 auf die Verbindungslinie der Fusspunkte von H_1 und H_2, und φ den gesuchten Winkelwerth, so ist in Secunden:

$$\varphi = \frac{p \,.\, h \,.\, 206265}{100 \,.\, n \,.\, e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Bei unserem Justirbret ergab sich $e = 357^{mm}$ und h, wie schon mitgetheilt, gleich 0,8787 d. h. $\frac{h}{100} = 0{,}008787$; da nun ferner gemäss der Beobachtung an der Hilfslibelle $p = 5$, dagegen $n = 11{,}83$ war, so wird

$$\varphi = \frac{0{,}008787 \,.\, 5 \,.\, 206265}{11{,}83 \,.\, 357} = \mathbf{2'',146}$$

dessen Logarithmus gleich **0,33158** ist und ebenso für die Hauptlibelle

$$\varphi = \frac{0{,}008787 \,.\, 5 \,.\, 206265}{12{,}14 \,.\, 357} = 2'',091$$

dessen Logarithmus gleich **0,32034**. Wäre es nothwendig, den Winkel φ in Zeitsecunden auszudrücken, so müssten wir noch mit 15 dividiren und erhielten als constante Logarithmen:

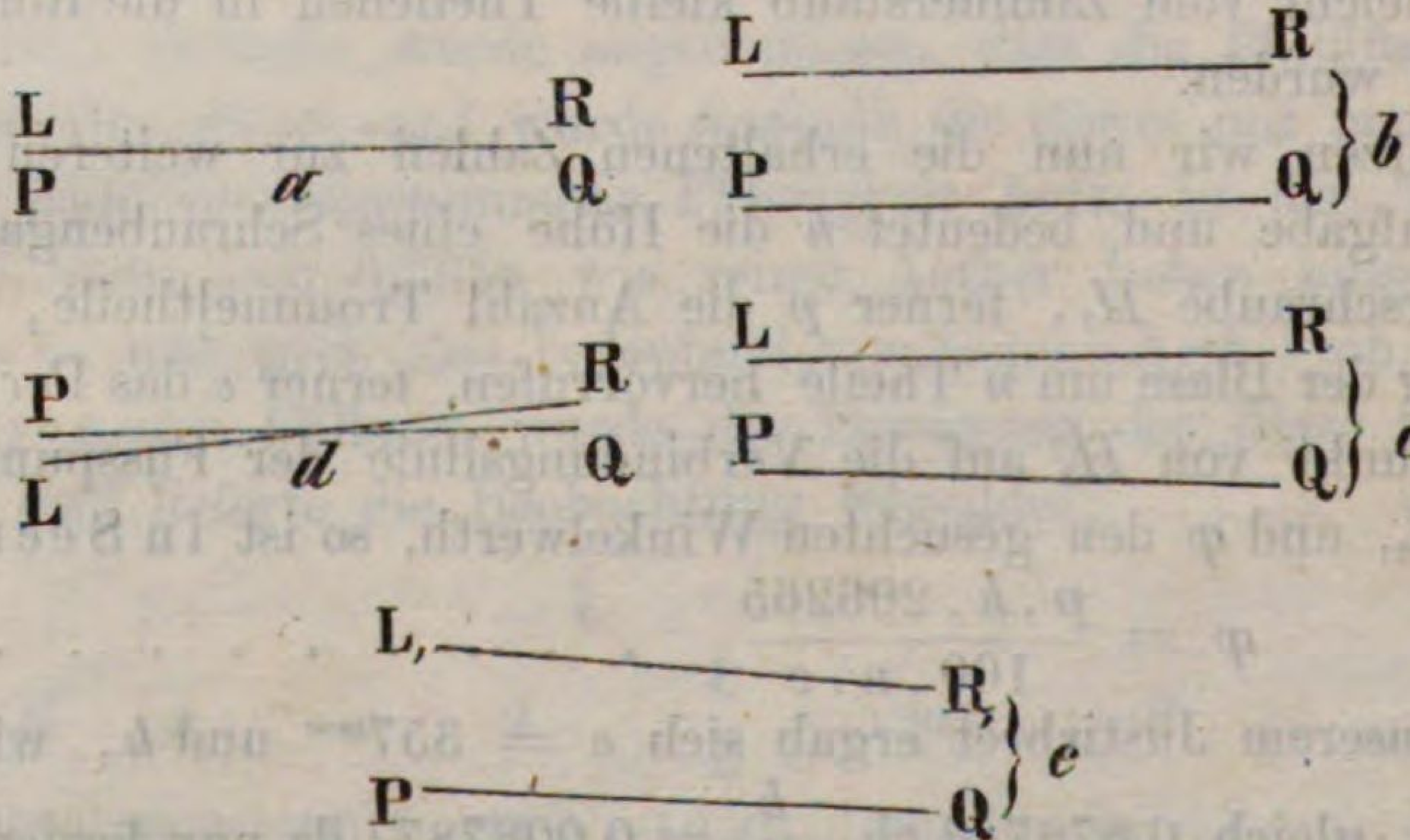
für die Hilfslibelle den Logarithmus **9,15549**
„ „ Hauptlibelle „ „ **9,14425**.

§. 54. Unsere zweite Aufgabe soll darin bestehen, dass wir eine Libelle darauf prüfen, ob ein

Höhen- oder Seitenfehler

oder beide zusammen vorkommen und wie das Verhalten einer Blase beim Vorhandensein dieser Fehler sich gestaltet. Sind wir darüber gehörig unterrichtet, so werden wir dann auch leicht die Mittel erkennen, die wir anzuwenden haben, um diese Fehler möglichst wegzuschaffen. Zum Zwecke der Prüfung auf diese Fehler setzen wir die Libelle mit den Stützen p und $p_,$ auf eine Fernrohraxe PQ, die so liegt, dass ihr eines Ende über eine der drei Fussschrauben des Fernrohrs kommt, und bringen durch diese Fussschraube die Blase zur Einstellung auf die Mitte M. Findet nun die Coincidenz der Libellenmittelebene mit der Hauptverticalebene genau statt, d. h. geht eine durch LR gelegte Verticalebene zugleich durch PQ, so würde der Grundriss dieser beiden Axen in einer Horizontalebene das Aussehen der Figur 55, a

Figur 55.



besitzen. Die Projection der Axen auf eine Verticalebene aber könnte zweifach verschieden ausfallen, nämlich erstens so wie bei Figur 55, b, wo die Fernrohraxe und die Libellenaxe horizontal liegt, und die Libelle weder einen Seiten- noch einen Höhenfehler besitzt. Ob dies

aber der Fall ist, erkennt man erst aus dem Verhalten der Blase, wenn man den Libellenkörper etwas um die Axe PQ dreht, so dass die Stützen p und p, auf dem Axenkörper bleiben: Bei dieser Drehung wird nämlich die Blase die Mitte M der Röhre nicht verlassen, man mag nach der einen oder nach der andern Seite diese Drehung vornehmen weil eben die Axe LR der Libelle eine Cylinderfläche mit horizontaler Erzeugungslinie beschreibt. Die Verticalprojection der beiden Axen LR und PQ kann zweitens wie bei c ausfallen, ohne dass der Grundriss a sich ändert. In diesem Falle besitzt die Libelle nur einen Höhenfehler: die Entfernungen LP und RQ sind ungleich, die Stützen der Libelle also nicht gleich lang. Dreht man jetzt den Libellenkörper um PQ, so wird die Blase nicht ruhig stehen bleiben, denn es wird hierbei LR eine Kegelfläche beschrieben, deren Erzeugungslinie bei 90^0 Drehung auf die Hauptverticalebene projicirt mit PQ zusammenfällt. Das Ende R der Blase wird bei dieser Drehung gegenüber L immer tiefer zu liegen kommen und muss die Blase demnach von rechts nach links wandern, wobei es einerlei ist, ob man die Drehung der Libelle im einen oder andern Sinne vornimmt. Die Blase wandert, wenn die linke Stütze der Libelle zu kurz ist, nach links und selbstverständlich umgekehrt nach rechts, wenn die rechte Stütze zu kurz ist *).

Es ist ferner möglich, dass die obige verlangte Coincidenz nicht stattfindet und der Grundriss vielmehr wie bei d, der Aufriss aber so wie bei b aussieht. In diesem Falle ist blos eine Seitencorrection nöthig. Die Blase, die einstand in der Mitte, wird jetzt, wenn man die Libelle um PQ im einen oder andern Sinne dreht, sich aber anders bewegen wie beim Fall a, c. Es beschreibt nämlich jetzt LR weder eine Cylinder- noch eine Kegelfläche, sondern ein Rotationshyperboloid mit horizontal liegender Axe PQ und ist klar, dass wenn man die Blase in der Richtung LR ansieht und die Libelle direct wie die Zeiger der Uhr dreht, die Axe LR sich mit dem Ende L dem Horizont nähert und umgekehrt, wenn man entgegengesetzt wie die Zeiger der Uhr die Drehung vornimmt, dies Ende sich erhebt. Die Blase wird also bei der directen Drehung sich vom Auge weg, bei der umgekehrten aber sich nach ihm hin bewegen. Das je Entgegengesetzte würde natürlich eintreten, wenn die Abweichung von der Coincidenz entgegen-

*) Den Beweis für dies Verhalten wird man auch einfach so führen können, dass man LR parallel mit sich selbst soweit verschoben denkt, dass L mit P zusammenfällt. Dreht man jetzt LR um PQ, so beschreibt LR einen Kegel mit der Spitze in P und leuchtet jetzt ohne Weiteres ein, dass die festliegende Spitze P bei der Drehung von LR um PQ immer höher ist, als der bewegliche Endpunkt R, der einen Kreisbogen beschreibt.

gesetzt stattfände, d. h. wenn *LR* auf den Horizont projicirt eine zu *PQ* symmetrische Lage wie in *d* einnähme.

Der allgemeinste Fall wird aber der sein, dass ein Seiten- und ein Höhenfehler zugleich vorkommt, wobei die Horizontalprojection wie bei *d*, die Verticalprojection wie bei *c* aussieht. Dreht man jetzt wie die Zeiger der Uhr, indem man in der Richtung *LR* sieht, so wird wegen des Seitenfehlers die Blase vom Auge weg, wegen des Höhenfehlers aber, wie wir sahen, nach ihm hin wandern und somit der Differenz dieser Fehler gemäss sich bewegen. Dreht man aber umgekehrt wie die Zeiger der Uhr, so unterstützen sich beide Fehler und die Blase wird weiter bzw. rascher sich fortbewegen, als wenn nur ein Fehler vorhanden wäre. Stellen wir nun die vier Fälle übersichtlich zusammen, zugleich mit der Angabe des Verhaltens der Blase, wenn die Libelle vom einen Ende aus in der Richtung der Länge angesehen und einmal direct wie die Zeiger der Uhr das anderemal umgekehrt gedreht wird.

Nr.	Höhenfehler.	Seitenfehler.	Drehung d. Libelle.	Die Blase.
I.	Nicht vorhanden.	Nicht vorhanden.	1. Direct.	Bleibt stehen.
			2. Umgekehrt.	„ „
II.	Vorhanden.	Nicht vorhanden.		
	1. Stütze b. Auge zu kurz.		a. Direct.	Lauft n. d. A. hin.
			b. Umgekehrt.	„ „ „ „ „
	2. Zu lang.		a. Direct.	„ v. d. A. weg.
			b. Umgekehrt.	„ „ „ „ „
III.	Nicht vorhanden.	Vorhanden.		
		1. Axe d. Libelle weicht b. Auge n. rechts ab.	a. Direct.	Lauft v. d. A. weg.
			b. Umgekehrt.	„ n. „ „ hin.
		2. Weicht n. links ab.	a. Direct.	„ n. d. A. hin.
			b. Umgekehrt.	„ v. „ „ weg.
IV.	Vorhanden.	Vorhanden.		
	1. Stütze b. Auge zu kurz.	a. Axe weicht n. rechts ab.	α. Direct.	Folgt d. Differenz der Fehler.
			β. Umgekehrt.	Nähert sich d. A. n. d. Summe d. Fehler.
		b. Weicht nach links ab.	α. Direct.	Nähert sich d. A. n. d. Summe der Fehler.
			β. Umgekehrt.	Folgt der Differenz d. Fehler.
	2. Stütze b. Auge zu lang.	a. Weicht nach rechts ab.	α. Direct.	Entfernt sich v. A. n. d. Summe.
			β. Umgekehrt.	Folgt d. Differenz d. Fehler.
		b. Weicht nach links ab.	α. Direct.	„ „ „ „ „
			β. Umgekehrt.	Entfernt sich v. A. n. d. Summe d. Fehler.

Nehmen wir nun irgend einen der vier Fälle an, so wird man auch leicht mittelst der Höhenschraube s und der Seitenschraube s' den betreffenden Fehler beseitigen können. Läge z. B. das Schraubenende der Libelle auf der Seite RQ und es fände der Fall IV, 2, b statt, so würde man die diesem Falle entsprechenden Projectionen von LR und PQ im Grundriss und Aufriss erhalten, wenn man die betr. Zeichnungen der Fig. 55 nämlich d und c von der Rückseite betrachtete, indem ja bei der Aufstellung der Uebersicht ein für allemal das Auge auf der linken Seite der Figur und beim Drehen der Libelle das linke Ende derselben ansehend gedacht wird. Da das Schräubchen s' in unserer Figur 53 a dann links an dem dem Auge entgegengesetzten Ende liegt, so folgt, wenn wir die Seitencorrection anbringen wollen, dass wir dieses Schräubchen etwas zurückschrauben müssen, damit die Feder im Innern des Messingmantels das Libellenrohr am Ende R nach links und somit die Axe LR in die Hauptverticalebene drückt, bzw. sie damit parallel richtet.

§. 55. Es muss jedoch sofort bemerkt werden, dass das Erkennen des Höhenfehlers auf die mitgetheilte Art häufig schwer fällt: nicht als wenn unsere Theorie einen Fehler enthielte, sondern weil die Verstellungen der Libellenaxe, falls man sich nur auf Drehungen der Libelle um einen Winkel ϑ um die Fernrohraxe einlässt, meist nicht so bedeutend sind, dass die Blase eine Wanderung antritt, die immer gleich mit Bestimmtheit den Höhenfehler anzeigen könnte und weil sich so die Veränderungen im Stand der Blase, da sie gering sind, geradezu hinter anderen noch weiter zu bezeichnenden Unvollkommenheiten des ganzen Apparates verstecken können. Um dies einzusehen, achte man nur auf die Figur 55, c. Wenn wir ihr entsprechend die Libelle um $\vartheta = 90^0$ um PQ drehten, würde die Libellenaxe mit dem Horizonte erst einen Winkel bilden gleich dem Winkel i, den die Axe PQ selbst damit bildet. Da aber in Wirklichkeit die Libellenröhren blos oben auf dem Rücken ausgeschliffen und getheilt sind, so vertragen schon desshalb die Libellen um PQ nur eine Drehung von wenigen Graden oder noch viel weniger, und ist mithin die Winkelverstellung von LR gegen die ursprüngliche horizontale Lage in Wirklichkeit nur eine sehr geringe: insbesondere noch — und dies überlassen wir dem Leser zu beweisen — weil diese Verstellung von LR gegen den Horizont, sich proportional der Aenderung des *Cosinus* von ϑ vollzieht. Anders beim Seitenfehler. Denn hier vollzieht sich die Verstellung von LR proportional der viel stärkeren Aenderung des *Sinus* von ϑ und während eine Drehung um PQ wegen des Seitenfehlers einen deutlichen Ausschlag giebt, kann dieser bei gleichem Höhenfehler ganz unmerklich sein und muss man daher nach

einem anderen Verfahren suchen, durch welches er bestimmter constatirt werden kann. Ein solches Verfahren ergiebt sich aber sofort aus der Betrachtung der Figur 55. *c*. Steht nämlich, wie es die Zeichnung verlangt, die Blase bei *c* in der Mitte ein, und existirt ein Höhenfehler, so wird dies Einstehen sofort aufhören, wenn wir die Libelle um 180° umsetzen, d. h. das rechte Ende *R* nach *L*, das linke nach *R*, bringen, ohne dass hierbei die Lage der Fernrohraxe *PQ* geändert wird. Es nehmen hierbei die Axen gegenseitig die Stellung wie in *e* ein, und die Blase wird nach links wandern. Denken wir in Fig. 55, *c* *LR* bis zum Durchschnitt mit *PQ* verlängert, so entsteht links in diesem Durchschnitt ein Winkel *i*, der zugleich einerlei ist mit dem Winkel, den die Fernrohraxe *PQ* auf der rechten Seite mit dem Horizont bildet. Denken wir ferner in Fig. 55, *e* die Axe $L_{,}R_{,}$ bis zum Durchschnitt mit *PQ* verlängert, so entsteht rechts zwischen $L_{,}R_{,}$ und *PQ* der nämliche Winkel *i* mithin zwischen $L_{,}R_{,}$ und dem Horizont ein Winkel $= 2i$, und ergiebt sich hieraus folgender wichtige Satz:

> „Stellt man mit der Fussschraube des Fernrohres die Libellen-
> „blase ein (Fig. 55, *c*) und setzt die Libelle dann auf der
> „Axe um (Fig. 55, *e*), so giebt die Verstellung der Blase in
> „einen Winkel verwandelt den doppelten Winkel *i* an, den
> „die Fernrohraxe mit dem Horizont bildet und dieser Winkel
> „$2i$ ist auch gleich dem doppelten Höhenfehler, den die Libelle
> „wegen der Ungleichheit der Stützen besitzt."

Will man also den Höhenfehler für sich bekämpfen bzw. ganz wegschaffen, so wendet man folgendes Verfahren an:

Erstens: man setzt die Libelle auf eine Fernrohraxe und bringt mittelst der Fussschraube des Fernrohres die Blase in der Mitte *M* zum Einstehen;

zweitens: man setzt die Libelle um 180° auf der Fernrohraxe um; hierbei kann es sich ereignen, dass wegen eines bedeutenden Höhenfehlers die Blase sich ganz nach dem einen Ende begiebt und nur das andere Ende abgelesen werden kann. Da nun die Verstellung der Blase nach dem doppelten Höhenfehler $2i$ d. h. wegen des Höhenfehlers *i* und des gleichen Neigungsfehlers *i* der Axe erfolgt, so leuchtet ein, dass zur Wegschaffung des Höhenfehlers sowohl die Libellenaxe als auch die Fernrohraxe in gleichem Sinne und um gleich viel in ihrer Lage zu ändern sind. Der Figur 55, *e* gemäss müsste also das linke Ende der Libellen- und der Fernrohraxe um gleich viel niedriger oder was zu demselben Ziele führt: das Ende $R_{,}$ und *Q* um gleich viel höher gemacht werden, einfach in der Weise: dass man durch Correction an der Höhenschraube *s* der Libelle die Blase um

eine Anzahl Scalentheile nach rechts zurückgehen und darauf auch durch Correction an der betreffenden Fussschraube des Fernrohrs die Blase um eine gleiche Anzahl Scalentheile in demselben Sinne sich verstellen lässt. Auf diese Weise wird man es bald dahin bringen, dass beide Enden der Blase wieder abgelesen werden können und fährt man dann so weiter fort, bis die Blase durch die gleichmässige Verstellung der Höhenschraube s und der Fussschraube des Fernrohres wieder in der Mitte M einsteht. Somit wäre der Höhenfehler weggeschafft und auch die Fernrohraxe horizontal, wenn man von Anfang an auch das andere Ende der Blase hätte ablesen und ganz genau das erforderliche Zurückgehen der Blase hätte einleiten können; so dies aber angenommenermassen nicht möglich war, wird man jetzt die Libelle erst wieder in die ursprüngliche Lage umsetzen und wieder beobachten: da nunmehr ihre Enden von vornherein wohl beide ablesbar sind und das Einstehen in M zur Hälfte mit der Höhenschraube, zur Hälfte mit der Fussschraube erzielt werden kann. Man sieht, dass durch diese Manier, den Höhenfehler wegzuschaffen, zugleich eine d r i t t e A u f g a b e praktisch gelöst wird, nämlich

mittelst der Libelle eine Fernrohraxe horizontal zu stellen bzw. ihren Neigungswinkel i gegen den Horizont zu bestimmen.

Denn wird die Blase erst eingestellt und dann die Libelle umgesetzt, so ist, wenn ihre Mitte sich um n Scalentheile verschiebt,

$$i = \frac{n}{2}\varphi \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Die Sache lässt sich aber allgemeiner behandeln, wiewohl das eben bezeichnete Verfahren, den Höhenfehler wegzuschaffen bzw. zugleich auch die Fernrohraxe horizontal zu stellen vielleicht das bequemste ist. Die Libelle sei auf eine nahezu horizontale Fernrohraxe gesetzt und die Höhencorrection sei schon so weit gediehen, dass man beide Enden der Blase sowohl, wenn man die Libelle so oder umgekehrt aufsetzt, ablesen kann. Besteht nun z. B. der Fall Fig. 55, e, so wird die Blase von vornherein um eine Anzahl Theile nach l i n k s abweichen und mit der Mitte auf einen Punkt m_1, nach der Umsetzung aber auf einen Punkt m_2 zu liegen kommen. Weil wir nun am zweckmässigsten den Höhenfehler in einem Winkel angeben, so möge jetzt der Winkel i_1 diesen Höhenfehler bezeichnen, also den Winkel, den $L,R,$ und PQ bei ihrem Durchschnitt mit einander bilden. Die Abweichung der Fernrohraxe vom Horizont, die vorhin bei unserer ersten Art der Einstellung Fig 54, c gleich diesem Winkel i_1 war, wird nun im Allgemeinen einen anderen Werth haben und soll dieser mit i_2 bezeichnet werden. Da diese Winkel nach verschiedenen Seiten

liegen können, so werden wir, wenn wir der Figur 55, e gemäss i_1 als negativ ansehen, auch i_2 als negativ ansehen müssen. Allgemein aber ist der Winkel, den die Libellenaxe in einer Anfangslage mit dem Horizont bildet gleich

$$i' = i_1 + i_2$$

und nach dem Umsetzen der Libelle gleich

$$i'' = -i_1 + i_2.$$

Bei der ersten Aufsetzung ist ferner, wenn wir mit φ den Winkelwerth eines Scalentheils bezeichnen, auch

$$i' = (m_1 - \mu)\varphi,$$

bei der zweiten d. h. nach der Umsetzung

$$i'' = (m_2 - \mu)\varphi$$

und somit

$$2i_1 = (m_1 - m_2)\varphi$$

und

$$2i_2 = (m_1 + m_2 - 2\mu)\varphi.$$

so dass demnach

$$i_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{2}\varphi$$

den Höhenfehler der Libelle und

$$i_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} - \mu\right)\varphi$$

die Abweichung der Axe des Fernrohrs vom Horizont bedeutet.

Diese Formeln werden aber der Beobachtung entsprechender, wenn man für m_1 und m_2 gemäss der Gleichung (1) w und o einführt; es ist nämlich nach Gl. (1)

$$m_1 = \frac{w_1 + o_1}{2}; \; m_2 = \frac{w_2 + o_2}{2}$$

mithin

$$i_1 = \frac{(w_1 + o_1) - (w_2 + o_2)}{4} \cdot \varphi \quad \dots \dots \quad (5)$$

$$i_2 = \left\{\frac{(w_1 + o_1) + (w_2 + o_2)}{4} - \mu\right\} \cdot \varphi \quad \dots \dots \quad (6)$$

Beispiel. Bei der oben bezeichneten Hilfslibelle war der Seitenfehler, bezüglich dessen wir hernach noch einige Bemerkungen machen werden, möglichst vollständig weggeschafft und blieb auch beim Umsetzen der Libelle die Blase innerhalb der Ablesungsgrenzen, so dass i_1 und i_2 nach der angegebenen Methode bestimmt werden konnten. Es zeigte sich für die

1. Lage der Libelle: $w_1 = 21{,}0$, $o_1 = 63{,}5$ — $w_1 + o_1 = 84{,}5$ Scalentheilen.

2. Lage der Libelle: $w_2 = 10{,}0$, $o_2 = 52{,}0$ — $w_2 + o_2 = 62{,}0$ „

mithin war

$$i_1 = \frac{84{,}5 - 62{,}0}{4} \,.\, \varphi = 5{,}6 \,.\, \varphi$$

$$i_2 = \left(\frac{84{,}5 + 62{,}0}{4} - 45\right)\varphi = -8{,}4 \,.\, \varphi$$

d. h. die Anzahl der Scalentheile, um welche wegen des Höhenfehlers der Libelle die Blase verstellt werden musste, war 5,6, die wegen des Axenfehlers gleich — 8,4. Da nun bei der zweiten Lage die Blase mehr nach links wanderte, so kam dies daher, dass das linke Ende beim Umsetzen sich höher stellte, und wurde demnach an der Höhenschraube s so lange gedreht, bis die Blase der Libelle um 5,6 Scalentheile nach r e c h t s zurückgegangen war. Sie kam in Folge dessen mit den Enden auf

$$w_1 = 10{,}0 + 5{,}6 = 15{,}6$$
$$o_1 = 52{,}0 + 5{,}6 = 57{,}6$$

d. h. ihre Mitte auf den Scalentheil

$$\frac{15{,}6 + 57{,}6}{2} = 36{,}6$$

womit der Höhenfehler corrigirt war. Um ebenso die Lage der Axe zu corrigiren, musste wegen des negativen Fehlers i_2 die Axe so verstellt werden, dass die Blase um 8,4 Theile nach rechts rückte, wodurch sofort, wie man aus den Zahlen ersieht, ihre Mitte m auf den Theilstrich 45 zu liegen kam, die Libelle von dem Höhenfehler befreit, und die Axe horizontal gestellt war.

Diese Methode gewährt den Vortheil, dass man nicht erst mittelst der Fussschraube des Fernrohrs die Libellenblase horizontal zu stellen braucht und eine einmalige Umsetzung der Libelle genügt. Für die Folge verdient insbesondere die Formel (6) Beachtung. Die Anwendung der Formel (4) setzt nämlich voraus, dass man die Fernrohraxe vor dem Gebrauche des Fernrohrs verstellen will und darf; wenn dies aber nicht geschehen soll, so muss man sie nehmen, wie sie liegt, und selbstverständlich wird dann die Libelle im Allgemeinen, wenn sie aufgesetzt wird, in der Mitte nicht einstehen, d. h. die Formel (6) zur Anwendung kommen müssen.

Die Wegschaffung des S e i t e n f e h l e r s anlangend enthält die obige Zusammenstellung auf Seite 254 unter III. das Nöthige, und erkennt man, wie ja auch schon in einem auf diese Zusammenstellung folgenden Beispiele angegeben wurde, ohne Weiteres, dass zu seiner Beseitigung eine Verstellung der Seitenschraube s' nöthig ist.

Allgemein aber werden beide Fehler zusammen vorkommen und wird man gegebenen Falls wohl leicht erkennen, welcher von beiden der bedeutendste ist, um ihn zunächst theilweise zu beseitigen. Hiernach wird es dann angemessen sein, successiv den einen nach dem

andern zu beachten, um zu sehen, ob durchs Verstellen einer der Correctionsschrauben der eine Fehler, den man zu beseitigen bestrebt ist, sich nicht wieder zu vergrössern anfängt. Auf diese Weise wird man bald eine richtige Libelle erhalten.

Wir haben im Vorausgehenden einfach vom Höhenfehler gesprochen, ohne uns klar darüber geworden zu sein, welche Theile des Mechanismus der Libelle denselben bedingen. Setzen wir, um dies zu erfahren, zunächst eine in allen Theilen mathematisch richtige Libelle voraus und nehmen z. B. an, die in Figur 52, *a* dargestellte sei eine solche. Denken wir uns ferner, es werde diese Libelle auf eine absolut richtige Fernrohraxe aufgesetzt, so ist klar, dass wenn die Blase der Libelle einsteht, auch die Fernrohraxe horizontal liegt. Ein Höhenfehler kommt nun in die Libelle dadurch, dass die beiden Stützen p und $p_{,}$ nicht die genau richtigen sind und zwar wird dies dann eintreten, wenn die Stützen — gerechnet von den Endpunkten L und R der Libellenaxe bis zur Mitte je einer der Verbindungslinien, die man sich durch die je zwei von $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ Fig. 53. *b* mit dem Cylinder der Fernrohraxe gebildeten Berührungspunkte gelegt denken kann — nicht gleich lang sind: erstens also dadurch, dass bei sonst gleicher Länge der Strecken $L\gamma$ und $R\gamma_{,}$ (vergl. Fig. 53, *a* und *b*) die Winkel bei γ und $\gamma_{,}$ nicht gleich sind; zweitens dadurch, dass bei gleichen Winkeln bei γ und $\gamma_{,}$ umgekehrt die Strecken $L\gamma$ und $R\gamma_{,}$ ungleich lang sind, oder drittens auch dadurch, dass beides, sowohl die Winkel der Libellenfussausschnitte als auch die Strecken $L\gamma$ und $R\gamma_{,}$ ungleich sind. Da jedoch eine Ungleichheit der Ausschnittwinkel analog wirkt wie eine Ungleichheit der Strecken $L\gamma$ und $R\gamma_{,}$, so können wir ein für allemal annehmen, es wären die Ausschnitte völlig gleich und käme der Höhenfehler nur von der Ungleichheit der genannten Strecken her, welche Auffassung sich auch desshalb rechtfertigt, weil diese Strecken es allein sind, die wir durch die Höhencorrectionsschraube gegenseitig verändern können, während zur Veränderung der Winkel bei γ und $\gamma_{,}$ keine Correctionsvorrichtung besteht.

§. 56. Das Vorausgehende enthält die Betrachtung über die Fehler, die in der Zusammensetzung des ganzen Apparats liegen können, wobei aber die Beschaffenheit des Glasrohrs, die Natur der Flüssigkeit und vielleicht auch die Eintheilung der Röhre noch nicht in Betracht kamen. Wir sahen aber, dass die Libellenröhre entweder aus einem längeren Glasrohr einfach abgeschnitten werden kann, wenn dieses nur an einer Stelle eine der Fig. 50 entsprechende Biegung besitzt, oder extra nach der Figur 51 ausgeschliffen wird, wobei hervorgehoben wurde, dass es unmöglich sei, eine diesen beiden mathematischen Formen genau entsprechende Röhre zu bekommen,

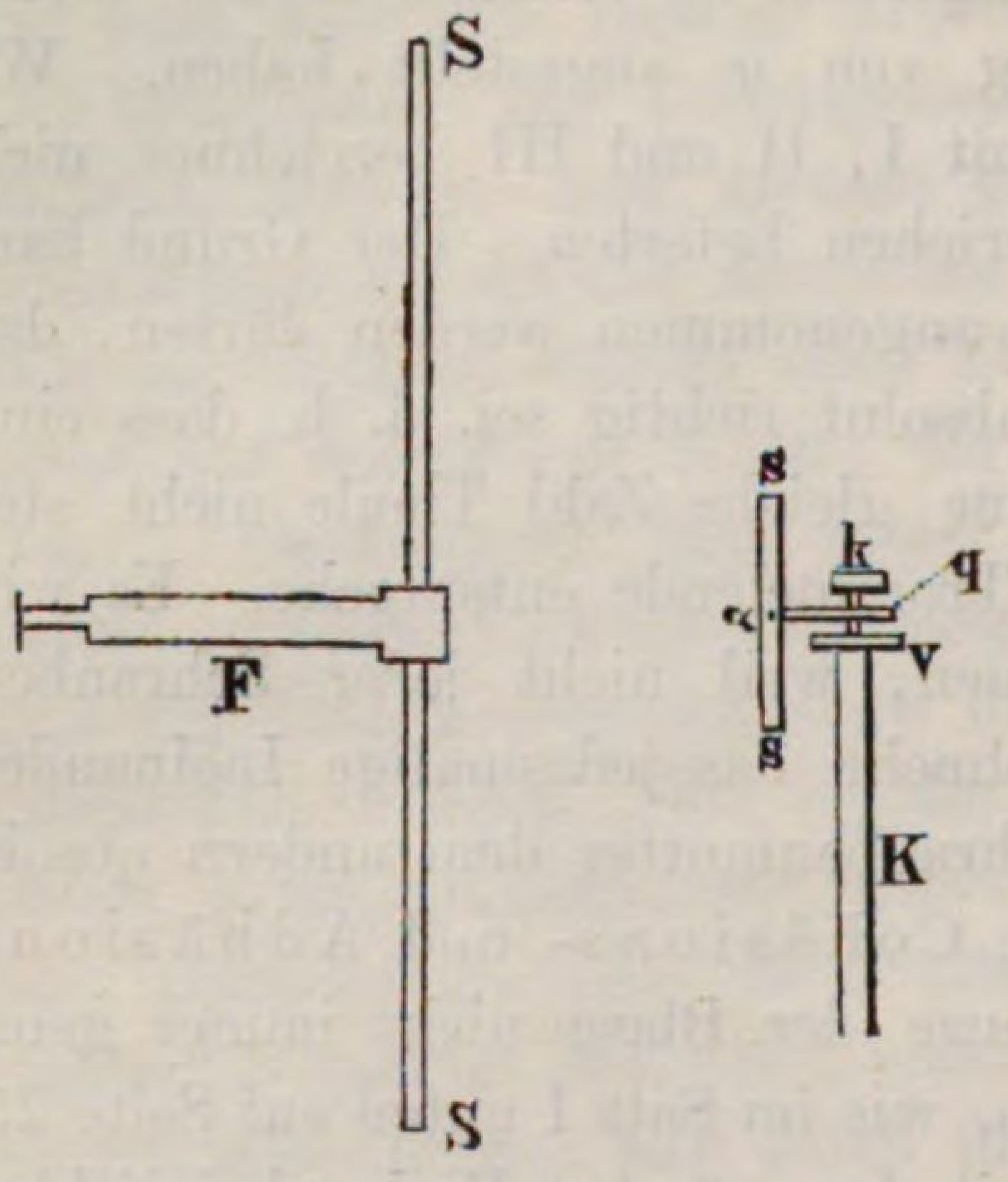
und werden daher die Krümmungen des Inneren der Röhre nicht überall genau dieselben sein.

Um hierüber ins Klare zu kommen, ist es nothwendig, eine genaue und ausführliche Beobachtungsreihe zu eröffnen in der Weise, wie wir sie oben zur Bestimmung von φ angestellt haben. Wir sahen, dass die einzelnen Sätze mit I, II und III bezeichnet nicht genau dieselbe Anzahl d von Theilstrichen lieferten. Der Grund kann ein dreifacher sein: erstens wird angenommen werden dürfen, dass das Libellenjustirbret nicht absolut richtig sei, d. h. dass einer Verstellung der Trommel um je eine gleiche Zahl Theile nicht stets eine gleiche Höhenverstellung am Trommelende entspreche. Es wird dies schon desshalb eintreten können, weil nicht jeder Schraubengang oder Theil desselben oder vielmehr das jedesmalige Ineinandergreifen der Schraubenspindel und Schraubenmutter dem andern absolut gleich ist. Zweitens werden die Cohäsions- und Adhäsionskräfte der Flüssigkeit an der Grenze der Blase nicht immer genau sich gleich bleiben und sahen wir ja, wie im Satz I unten auf Seite 250 in der zweiten und dritten Reihe mit der grössten Wahrscheinlichkeit ein Hängenbleiben der Blase angenommen werden musste. Drittens und das ist es, worauf es jetzt ankommt, wird die Krümmung des Rohrs nicht überall dieselbe sein. Da diese drei Einflüsse zusammen vorkommen, so fragt es sich, wie man jeden derselben herausfinden und möglichst unschädlich machen kann.

Was zunächst das Libellenjustirbret anlangt, so liegt seine schwache Seite insbesondere in der Micrometerschraube. Obgleich nämlich die Technik in gegenwärtiger Zeit, was Genauigkeit anlangt, Erstaunliches leistet, so werden diese Leistungen doch nicht überall angenommen werden können, und wird man voraussetzen müssen, dass die einzelnen Schraubengänge nicht absolut gleich sind und die Schraube an einer Stelle bei einer vollen Umdrehung sich ein wenig mehr hebt wie an einer anderen. Würde mit einer solchen Micrometerschraube, wie wir gezeigt haben, der Werth eines Scalentheils bestimmt, so fiele dieser, wenn eine bestimmte Strecke der Micrometerschraube benutzt würde, etwas anders aus als bei einer anderen. Es bleibt demnach nichts anderes übrig, als zunächst die Schraube zu prüfen, was auf verschiedenem Wege möglich ist und empfiehlt sich hier, wo es sich um ganz kleine Verschiedenheiten handelt, z. B. sehr die Anwendung eines beweglichen Spiegels, in welchem man z. B. aus angemessener Entfernung mit einem Fernrohr hineinsehend, das Bild einer Scala erblickt, deren Scalentheile den Mittelfaden des Fernrohrs passiren und so eine genaue Messung ermöglichen. Diese Methode wandte der Verfasser an, um einen bestimmten Schraubengang der Schraube H_3

Fig. 54 auf seine durchgängige Regelmässigkeit zu prüfen. Zu dem Ende wurde ein zu einem Fühlhebel gehöriger Glasspiegel *ss* Fig. 56 benutzt,

Fig. 56.



der sich um eine durch seine Mitte gehende und möglichst mit seiner Fläche zusammenfallende horizontale Axe *α* drehen konnte. Senkrecht zur Fläche des Spiegels war auf der Rückwand ein Querarm *q* angesetzt, dessen Ende ein Schräubchen *k* trug, das seinerseits mit dem abgerundeten Ende unten auf ein Glasplättchen *v* zu stehen kam, nachdem dies Glasplättchen in horizontaler Lage auf die Indexschneide *K* des Justirbrets aufgekittet war. Die Figur zeigt im Aufriss den Apparat zugleich mit dem, dem Spiegel gegenüber aufgestellten, Fernrohr *F* und der neben letzterem stehenden Scala *S*. Mittelst *k* konnte es leicht eingerichtet werden, dass die Mitte der Scala im Fernrohr erblickt wurde. Da nun zu unserer Prüfung der Libelle ein einziger Schraubengang vollständig genügte und es darauf ankam, nur diesen einen Gang genau zu kennen, so wurden je 10 auf einander folgende Theile der Micrometertrommel, also die auf einander folgenden Zehntel des Schraubengangs geprüft und zwar so, dass die Schraube H_3 einmal wie die Zeiger der Uhr und dann wieder zurückgedreht wurde. Ersteres ist im folgenden mit *A*, letzteres mit *B* bezeichnet. Die einzelnen Zehntel des Schraubengangs stehen in der ersten Columne, während *A* und *B* die Theile der Scala enthalten, die mit dem Mittelfaden von *F* coincidirten. Die Beobachtungszahlen sind folgende:

Zehntel.	A	B	A	B	A	B
0	497,5	497,0	497,0	496,8	496,8	496,5
1	512,5	513,2	512,4	512,9	512,0	512,5
2	27,5	28,9	28,0	28,5	28,5	28,5
3	43,3	43,3	43,2	43,5	43,3	43,0
4	59,0	58,8	58,8	58,2	58,5	57,8
5	74,5	73,5	73,6	73,0	73,5	72,5
6	88,5	88,2	88,2	87,5	88,0	87,4
7	602,0	602,2	602,0	601,8	601,8	601,8
8	16,8	16,5	16,5	16,2	16,3	16,1
9	31,8	32,0	32,0	31,8	31,8	31,5
10	47,3	47,3	47,2	47,2	46,8	46,8

Nehmen wir die Werthe A und B je einzeln, so liefern A und B für die drei Beobachtungen die Differenzen:

Zehntel.	A			Mittel.	B			Mittel.
1	15,0	15,4	15,2	15,20	16,2	16,1	16,0	16,10
2	15,0	15,6	16,5	15,70	15,7	15,6	16,0	15,76
3	15,8	15,2	14,8	15,26	14,9	15,0	14,5	14,80
4	15,7	15,6	15,2	15,50	15,0	14,7	14,8	14,83
5	15,5	14,8	15,0	15,10	14,7	14,8	14,7	14,73
6	14,0	14,6	14,5	14,37	14,7	14,5	14,9	14,70
7	13,5	13,8	13,8	13,70	14,0	14,3	14,4	14,23
8	14,8	14,5	14,5	14,60	14,3	14,4	14,3	14,33
9	15,0	15,5	15,5	15,33	15,5	15,6	15,4	15,50
10	15,5	15,2	15,0	15,23	15,3	15,4	15,3	15,33

Bilden wir die Differenzen der Mittelwerthe von A und B, so erhalten wir:

Zehntel.	Diff. bei A	Diff. bei B
1—2	+ 0,50	— 0,34
2—3	— 0,44	— 0,96
3—4	+ 0,24	+ 0,03
4—5	— 0,40	— 0,10
5—6	— 0,73	— 0,03
6—7	— 0,67	— 0,47
7—8	+ 0,90	+ 0,10
8—9	+ 0,73	+ 1,17
9—10	— 0,10	— 0,17

Die Uebereinstimmung der Vorzeichen für A und B lässt sich erkennen, mit Ausnahme beim Uebergang vom ersten zum zweiten Zehntel und könnten wir nun die Endmittel aus A und B der vorletzten Zusammenstellung neben dem Mittel der Differenzen für A und B aus der letzten Zusammenstellung benutzen, um in einem vorliegenden Falle durch Interpolation einen genaueren Werth zu ermitteln.

Diese Zahlen sind aber

Zehntel.	Endmittel.	Diff.
1	15,65	
		+ 0,08
2	15,73	
		— 0,70
3	15,03	
		+ 0,13
4	15,16	
		— 0,25
5	14,91	
		— 0,38
6	14,53	
		— 0,57
7	13,96	
		+ 0,50
8	14,46	
		+ 0,95
9	15,41	
		— 0,13
10	15,28	

Alle solche Beobachtungen führen aber nur zur Kenntniss der relativen Unterschiede der Schraubengänge und nicht zur Kenntniss der absoluten Höhe derselben. Um diese in vorliegendem Falle zu erfahren, wurde ein Deckplättchen eines Microscops zwischen das Glasplättchen v und das Schräubchen k geschoben und erlitt hierdurch die Scala im Fernrohr bei drei Messungen eine Verschiebung vom Scalentheil

609,2 auf 571,5; 533,5 auf 496,2; 534,0 auf 496,3

mithin um

37,7 37,3 37,7

oder im Mittel um 37,567 Scalentheile. Hätte man nun die Dicke des dazwischen geschobenen Deckplättchens, so wäre die absolute Bestimmung möglich. Da diese aber auch wieder nur durch Verstellung einer anderen Micrometerschraube gemessen werden und man auch die Richtigkeit dieser letzteren anzweifeln kann, so würde man sich beständig im Kreise der Ungewissheit herumdrehen. Aber bei geringem Nachdenken finden wir ja, dass es uns niemals möglich ist, eine Grösse absolut genau zu messen und müssen wir auch in diesem Falle einem Prüfungsmittel zuletzt eine Genauigkeit einräumen, von der wir sagen, sie könne eben nicht grösser werden, oder sie genüge uns. Man hat zur Messung der Dicke solcher Microscopendeckplättchen kleine Apparate construirt, dem Wesen nach bestehend in einer Micrometerschraube mit Trommel. Ein solches Instrumentchen, von Optiker Leitz in Wetzlar bezogen, wurde nun benutzt und giengen bei ihm 40 Schraubengänge auf 20,7 Millim., so dass 1 Schraubengang gleich $\frac{20,7}{40} = 0,5175$ Millimeter war. Da ferner bei dem Leitz'schen Apparat auf die Dicke des Deckplättchens 38,5 Theile seiner Trommel oder 0,385 vom Umgang kamen, so war das Plättchen

$$0,385 \,.\, 0,5175 = 0,19914^{mm}$$

dick. Demnach war nun das 1. Zehntel des Schraubengangs der Schraube unseres Justirbrets gleich

$$0,19914 \,.\, \frac{15,65}{37,567} = 0,08296^{mm}$$

welcher Werth um $0,00491^{mm}$ kleiner ist, als der auf S. 248 nach einer anderen Methode gefundene Mittelwerth $0,08787^{mm}$.

Hat man auf diese oder eine andere Weise sich von den Fehlern der Micrometerschraube des Justirbrets überzeugt, so wird man dieselben in Rechnung ziehen können. Aber selbst wenn dieses möglich geworden ist, werden die weiteren Prüfungen der Libelle auf die Verschiedenheit ihrer Krümmung im Innern noch manche Erwartung täuschen,

denn eine Libellenblase ist etwas überaus Empfindliches, und folgt daraus auch, dass gerade wegen dieser Empfindlichkeit eine jede kleine Störung zum Nachtheil eines aus den Beobachtungen abzuleitenden Resultates gereicht. Der Grund von all diesen Misslichkeiten liegt in dem Walten der Molecularkräfte der Flüssigkeitstheilchen unter sich und zwischen ihnen und der Glaswand bzw. auch sehr kleinen fremden Körperchen, die an der Wand des Glases sich eingenistet haben. Es käme nun hier zunächst eine Frage in Betracht, deren Beantwortung die Praxis bis jetzt noch nicht gegeben hat, nämlich die Frage: welche Flüssigkeit sollen wir als Füllflüssigkeit verwenden? Wenn dies jetzt allgemein Aether ist, so folgt noch nicht, dass der Aether diesen Vorzug verdient und ist es, wie oben schon erwähnt, sehr wohl denkbar, dass in der grossen Reihe von Flüssigkeiten, mit denen die Chemie uns fast täglich bereichert, solche zu finden sind, die sich besser eignen wie Aether. Doch kann dies nur durch eine gründliche Experimentaluntersuchung entschieden werden, die bis jetzt nicht unternommen worden ist.

Ein sehr wesentlicher Umstand, durch den Fehler in die Beobachtung hineinkommen können, ist ausserdem eine Verschiedenheit der Temperatur an beiden Enden der Blase. Findet diese nämlich statt, so wandert die Blase, die vorher eine bestimmte Stellung einnahm, nach der Seite hin, an welcher die höhere Temperatur einwirkte. Es hat sich mit diesem Gegenstande insbesondere zuerst und bis jetzt allein Liagre befasst und darüber in den „Bulletins de l'Academie Royale des sciences et Belles-Lettres de Bruxelles Tome XI. II^e Partie" im Jahre 1844 eine kleine Abhandlung gegeben unter dem Titel: „Note sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les erreurs qui peuvent en résulter dans les mesures de précision S. 274." Aus dieser Abhandlung erfährt man, wie sehr ein solches ungleiches Erwärmen Fehler veranlassen kann dadurch, dass die Molecularkräfte verändert werden und die Flüssigkeitshaut, die der Hauptsache nach der Blase ihre Form und Stellung anweist, andere Spannungen annimmt und somit eine Wanderung der Blase bedingt. Es ist hiernach gründlich zu vermeiden:

1) jede Berührung des Libellenrohrs mit dem Finger beim Umsetzen der Libelle, wenn nicht bis zur Ablesung so lange Zeit verfliessen kann, dass eine durch diese Berührung veranlasste Temperaturänderung sich wieder ausgleicht;
2) jeder kältere oder wärmere Luftzug, der vorzugsweise das eine Ende der Blase trifft;
3) jede Einwirkung des Hauches vom Beobachter;
4) jede Einwirkung der Wärmestrahlen von Seiten einer Lampe,

Laterne und im Freien namentlich eine schädliche Einwirkung der Sonnenstrahlen;

5) jede einseitige Erwärmung, welche durch die Stellung, die der Beobachter vor der Libelle einnimmt, eintreten könnte.

Für den Fall insbesondere, dass man eine Prüfung auf verschiedene Krümmungen der Röhre im Innern anstellen will, müssen alle im Vorausgehenden erwähnten Umstände, soweit sie einen Einfluss auf die Einstellung der Blase haben können, aufs Sorgfältigste beachtet werden. Denn etwaige Abweichungen von einer durchgehends gleichen Krümmung werden immer nur geringe Unterschiede der Stellung der Blase bzw. auch ihrer Länge hervorrufen und würden, wenn man die erwähnten Umstände nicht sorgfältig beachtete, die hierdurch entstehenden Beobachtungsfehler vielleicht bedeutender werden können, wie die Abweichungen, die eine verschiedene Krümmung hervorruft.

Ausser den erwähnten schädlichen Einflüssen sprechen aber noch weitere Dinge mit, die hier angedeutet werden sollen und von denen man noch keine genaue Kenntniss bis jetzt erhalten hat. Dahin gehört z. B. die verschiedene Länge der Blase und die hiermit zusammenhängende Empfindlichkeit beim Einstellen. Oben haben wir gesehen, auf welche Weise der Winkelwerth φ mittelst des Libellenjustirbretes bestimmt werden kann: eine Bestimmung, die nicht unabhängig ist von der absoluten Länge der Blase und lässt sich nachweisen, dass der Werth von φ kleiner wird, wenn die Blase, die man zur Beobachtung wählt, mehr und mehr an Länge und hiermit an Leichtigkeit in ihrer Bewegung abnimmt, bis zuletzt bei ganz kleinen Blasen eine solche Unsicherheit in der Fortbewegung eintritt, dass eine derartige Blase überhaupt nicht zum Horizontalstellen zu brauchen ist.

Ausser der Länge kann auch die Art, wie man die Blase in Bewegung setzt, von Einfluss auf ihre schliessliche Einstellung sein. Verstellt man z. B. die Trommel der Micrometerschraube des Justirbrets um 10 Theile ihres Umfanges, so wird sich die Blase um eine Anzahl Theile vorwärts bewegen. Diese Verstellung der Trommel könnte nun ziemlich momentan aber auch ganz langsam vorgenommen werden und ist die Frage: stellt sich bei diesen beiden extremen Fällen die Blase schliesslich genau auf denselben Scalentheil ein? Um diese und ähnliche Fragen auf experimentelle Weise zur Entscheidung zu bringen, wird gegenwärtig von einem Schüler des Verfassers eine Untersuchung ausgeführt, deren Resultat seinerzeit veröffentlicht werden soll.

§. 57. Wir wollen nun noch diejenige Ablesungsart kennen lernen, die in der Praxis bei Zeitbestimmungen, Nivellirungen etc.

wohl allgemein im Gebrauch ist im Gegensatz zu der, welche wir bis jetzt anwandten, und bei welcher angenommen wurde: die Theilung der Röhre liefe von einem Ende (Westen — links) von Null continuirlich fort bis zum anderen Ende (Osten — rechts) also bei unserer oben betrachteten Libelle von 0 bis 90 mit der Mitte gleich 45.

Bei unserer jetzt in Rede stehenden Ablesung wird in die Mitte ein Null geschrieben und die Zahlen der Scala sind von hieraus, wenn wir uns z. B. die Röhrenaxe von Ost nach West laufend denken, von Null nach Osten und von Null nach Westen continuirlich verlaufend; bei unserer obigen Libelle also beiderseits von 0 bis 45. Stellen wir uns nun eine Blase vor, so kann man ihre beiden Enden das Ost- und Westende nennen und die Scalentheile, bei welchen diese beiden Enden liegen, wie bisher entsprechend mit den Buchstaben o und w bezeichnen. Diese Zahlen o und w werden nun beide positiv angenommen, wenn o ein Scalentheil der Osthälfte und w ein solcher der Westhälfte der Röhre ist; läge aber die Blase z. B. ganz auf der Osthälfte, so wäre o zwar positiv, w dagegen negativ zu rechnen. Es sind demnach die Scalentheile, von der Mitte nach den beiden Enden gerechnet, an und für sich Zahlen ohne Vorzeichen und kommt ein solches erst in Betracht, falls man die beiden Blasenenden abliest und eine Bestimmung trifft wie die eben mitgetheilte. Dies vorausgeschickt leuchtet ein, dass anstatt der Gleichungen (1) und (2) nun eine andere Gleichung für m zur Anwendung kommen muss, und da man sich daran gewöhnt hat: einen Neigungsfehler der Axe, der im Westen ein Höherstehen derselben veranlasst, einen positiven Neigungsfehler zu nennen, und dieser Annahme entsprechend auch der Höhenfehler der Libelle positiv genannt wird, wenn die westliche Stütze derselben zu lang ist, so wird sich sofort erkennen lassen, dass für m jetzt die Gleichung

$$m = \frac{w - o}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

besteht, der gemäss dann auch die Gleichungen (5) und (6) zu

$$i_1 = \frac{(w_1 - o_1) - (w_2 - o_2)}{4}\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

und

$$i_2 = \frac{(w_1 - o_1) + (w_2 - o_2)}{4}\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

werden, von denen namentlich die Gleichung (9) bei der Zeitbestimmung mittelst des Passageinstruments in Betracht kommen wird.

Dieser Ablesungsart entsprechend würden wir bei der Blase, die oben S. 258 nach der ersten Manier abgelesen wurde, jetzt ein

$$w_1 = 45{,}0 - 21{,}0 = 24{,}0; \quad w_2 = 45{,}0 - 10{,}0 = 35{,}0$$
$$o_1 = 63{,}5 - 45{,}0 = 18{,}5; \quad o_2 = 52{,}0 - 45{,}0 = 7{,}0$$

abgelesen haben, demgemäss

$$m_1 = \frac{24,0 - 18,5}{2} = 2,75$$

$$m_2 = \frac{35,0 - 7,0}{2} = 14,00$$

und ferner

$$i_1 = \frac{2,75 - 14,00}{2} \varphi = -5,6 \,.\, \varphi$$

sowie

$$i_2 = \frac{2,75 + 14,00}{2} \varphi = +8,4 \,.\, \varphi$$

wird. Die Vorzeichen von i_1 und i_2 sind die umgekehrten, wie die nach der ersten Manier S. 258 gefundenen aus dem einfachen Grunde, weil wir dort S. 257 einen Neigungsfehler der Axe, der ein Höherstehen bei P, also auf der Seite, nach welcher hin die Zahlen w abgelesen wurden, als negativ erklärten, während gegenwärtig die Sache umgekehrt liegt und ein solcher Fehler von uns gerade als positiv angesehen wird.

Nach unserer jetzigen Ablesungsweise wird, wenn nach der Gl. (7) das m positiv werden soll, entweder die Blase mit ihrem einen Ende auf die Westhälfte, mit dem andern auf die Osthälfte fallen und zugleich $w > o$ sein müssen; oder zweitens es wird die Blase ganz auf der Westhälfte liegen und hierbei o negativ angenommen werden müssen, so dass wenn z. B. $w = 37,0$ und $o = -3,5$ ist, das

$$m = \frac{37,7 - (-3,5)}{2} = \frac{37,0 + 3,5}{2} = 20,25$$

wird. Für ein negatives m vertauschen w und o in dem eben ausgesprochenen Satze die Rollen, ebenso die Worte „Ost"- und „Westhälfte."

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch eines vermeintlichen Fehlers bei der Libelle gedenken, der wie im Eingang des §. 56 bemerkt, in der Eintheilung der Röhre liegen und den man mit dem Namen Indexfehler bezeichnen könnte. Es fragt sich nämlich, ob nicht auch ein Fehler darin liegt, dass die Mitte M des Libellenrohrs da angegeben ist, wo sie eigentlich nicht hin gehört: dass also da, wo die Theilung die Mitte M zeigt, eigentlich ein $M \pm \varDelta n$ zu denken wäre und z. B. alle Zahlen der Westhälfte um $\varDelta n$ vergrössert, dagegen alle Zahlen der Osthälfte gleichzeitig verkleinert werden müssten. Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir wiederum einen Blick auf die Figuren 50 und 51 werfen. Für die erste Form ergiebt sich aber dann sofort, dass der vermeintliche Fehler gar kein Fehler ist. Denn lassen wir das M an der Stelle, wo es die Figur anzeigt, liegen, so

ist die Axenrichtung der Libelle eine in der Längsmittelebene gelegene und senkrecht zum Krümmungsradius *MC* verlaufende Gerade; setzen wir aber *M* etwa dahin, wo der Figur nach jetzt das eine Ende *α* liegt, so würde, wenn wir uns von *C* nach *α* einen Radius gezogen denken, eine in der Längsmittelebene und senkrecht zu *Cα* verlaufende Gerade die neue Axenrichtung der Libelle angeben und soll nun die neue Libellenaxe horizontal d. h. *Cα* vertical gerichtet werden, so muss die Libelle eine solche Neigung erhalten, dass *Cα* in die Lage von *CM* kommt und die neue Mitte *α* auf *M* rückt; geschieht dies aber, so fällt die Blasenmitte *m* mit der neuen Mitte *M*(*α*) zusammen und der Fall ist ganz so wie ohne den Indexfehler. Es ist also etwas Conventionelles, wenn wir bestimmen, dass an einer bestimmten Stelle die Mitte der Theilung liegen soll und wird dieselbe selbstverständlich möglichst im Halbirungspunkte der Röhrenlänge angenommen, weil diese Annahme von der Mitte aus nach beiden Seiten hin gleichzeitig ein Maximum der Anzahl der Scalentheile abzutragen gestattet.

Bei der Form Fig. 51 ist die Sache streng genommen nicht ganz so, weil es hierbei nur eine Stelle giebt, bei welcher die Blase durch eine Quermittelebene genau in zwei symmetrische Hälften (Ost- und Westhälfte) getheilt werden kann. Jedoch mit Rücksicht darauf, dass die Krümmung im Inneren eine schwache ist, ist es auch hierbei von keinem Belang, wenn man die Mitte der Theilung nicht ganz mit der geometrischen Mitte der Aushöhlung zusammenfallen lässt und hat auch bei dieser Form der vermeintliche Indexfehler keine Bedeutung.

Kapitel VII.

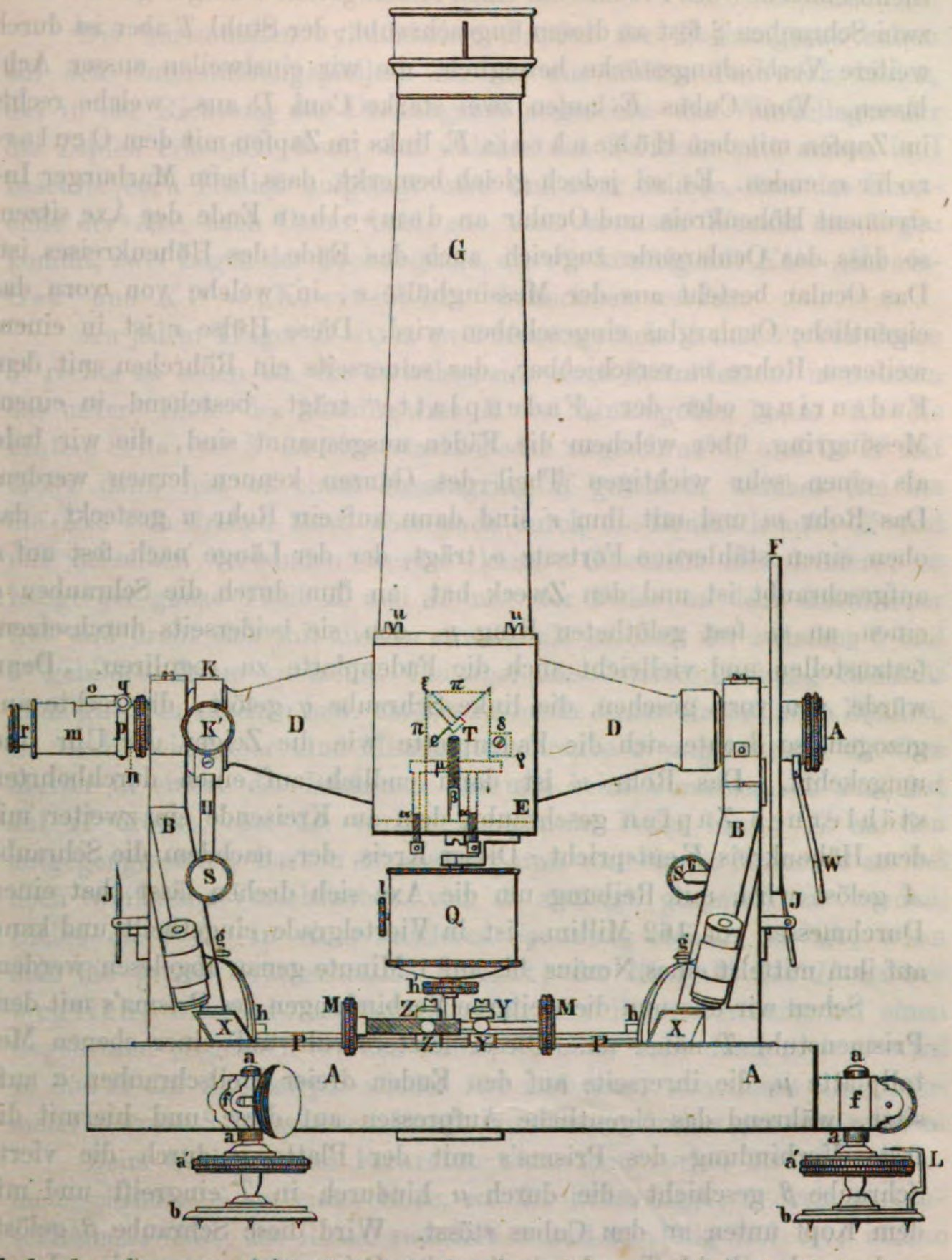
Das Passageinstrument, seine Einrichtung, Aufstellung und Fehler.

§. 58. Das von uns nun zu betrachtende Passageinstrument stammt aus der Werkstätte von Ertel und Sohn in München und wurde im Jahre 1840 von Gerling fürs Marburger Observatorium angeschafft. Es bildet in dem von Ertel im Jahre 1838 ausgegebenen Cataloge No. 9 und kostete mit einigen Nebenapparaten 718 Gulden oder 410 Thaler. Da in der „praktischen Astronomie" von Sawitsch Bd. I. Taf. III. sich eine genaue Durchschnittszeichnung von einem solchen Ertelschen Passageinstrument befindet, haben wir uns in Fig. 57 diese Zeichnung in halber Grösse zu copiren erlaubt, so dass, da die Zeichnung bei Sawitsch unser Instrument etwa in $\frac{1}{2}$ natürlicher Grösse wiedergiebt, unsere Figur 57 dieses nahezu in $\frac{1}{4}$ natürlicher Grösse darstellt. Die Buchstaben der Originalzeichnung bei Sawitsch haben wir beibehalten und wollen wir nun der Reihe nach die einzelnen Theile betrachten, wobei aber erwähnt werden muss, dass die im folgenden angegebenen Zahlen und Maasse sich auf unser Marburger Instrument beziehen.

I. Das Fernrohr mit den von der Axe weiter getragenen Theilen.

Das Fernrohr ist ein sogenanntes „gebrochenes", das heisst das Licht, welches in der Richtung des Objectivrohrs durchgeht, wird durch einen Reflector um 90° abgelenkt und gelangt so in das mit seiner Axe um 90° gegen die Axe des ersteren gestellte Ocularrohr. Das eigentliche Objectivrohr *G* enthält nur die achromatische Objectivlinse von 54 Mill. Oeffnung und 59,6 Ctm. Brennweite, nebst dem über das Ende zu steckenden Fernrohrdeckel. Würde man die vier Schrauben *u* lösen, so würde das Objectivrohr für sich vom übrigen Apparat getrennt werden können, durch diese Schrauben aber ist es in unveränderlicher Lage auf einen starken Messingcubus *E* aufgeschraubt, welcher zugleich an dem dem Objectiv entgegengesetzten

Figur 57.



Ende das Gegengewicht Q trägt, durch welches verhindert wird, dass das Rohr um die horizontale Axe sich von selbst dreht. Dieses Gegengewicht steckt an einer besonderen Axe und kann mittelst der Schraube l auf dieser an der passenden Stelle festgeschraubt werden. Der Cubus E selbst enthält innen den wichtigen Theil: den R e f l e c t o r, bestehend in einem rechtwinkligen Glasprisma, dessen eine Kathetenfläche π genau senkrecht zur Axe des Objectivs und dessen andere genau senkrecht zur

Axe des Oculars liegen muss. Um diese Lage zu erreichen, ist die Hypothenusenfläche *c* des Prismas auf einen Messingstuhl *T* aufgelegt und durch zwei Schrauben *ξ* fest an diesen angeschraubt; der Stuhl *T* aber ist durch weitere Verbindungsstücke beweglich, die wir einstweilen ausser Acht lassen. Vom Cubus *E* laufen zwei starke Coni *D* aus, welche rechts im Zapfen mit dem Höhenkreis *F*, links im Zapfen mit dem Ocularrohr *r* enden. Es sei jedoch gleich bemerkt, dass beim Marburger Instrument Höhenkreis und Ocular an demselben Ende der Axe sitzen, so dass das Ocularende zugleich auch das Ende des Höhenkreises ist. Das Ocular besteht aus der Messinghülse *r*, in welche von vorn das eigentliche Ocularglas eingeschoben wird. Diese Hülse *r* ist in einem weiteren Rohre *m* verschiebbar, das seinerseits ein Röhrchen mit dem Fadenring oder der „Fadenplatte" trägt, bestehend in einem Messingring, über welchem die Fäden ausgespannt sind, die wir bald als einen sehr wichtigen Theil des Ganzen kennen lernen werden. Das Rohr *m* und mit ihm *r* sind dann auf ein Rohr *n* gesteckt, das oben einen stählernen Fortsatz *o* trägt, der der Länge nach fest auf *n* aufgeschraubt ist und den Zweck hat, an ihm durch die Schrauben *q* einen an *m* fest gelötheten Ring *p*, den sie beiderseits durchsetzen, festzustellen und vielleicht auch die Fadenplatte zu reguliren. Denn würde, von vorn gesehen, die linke Schraube *q* gelöst, die rechte angezogen, so drehte sich die Fadenplatte wie die Zeiger der Uhr und umgekehrt. Das Rohr *n* ist dann endlich auf einen durchbohrten stählernen Zapfen geschraubt, dem am Kreisende ein zweiter mit dem Höhenkreis *F* entspricht. Dieser Kreis, der, nachdem die Schraube *A* gelöst wird, mit Reibung um die Axe sich drehen lässt, hat einen Durchmesser von 162 Millim., ist in Viertelgrade eingetheilt und kann auf ihm mittelst eines Nonius bis auf 1 Minute genau abgelesen werden.

Sehen wir uns nun die weiteren Verbindungen des Prisma's mit dem Prismenstuhl *T* näher an. Dieser letztere ruht auf einer ebenen Metallplatte *μ*, die ihrerseits auf den Enden dreier Stellschrauben *α* aufsitzt, während das eigentliche Aufpressen auf diese und hiermit die feste Verbindung des Prisma's mit der Platte *μ* durch die vierte Schraube *β* geschieht, die durch *μ* hindurch in *T* eingreift und mit dem Kopf unten an den Cubus stösst. Wird diese Schraube *β* gelöst, so kann der Stuhl *T* und mit ihm das Prisma etwas von dem Lager *μ* in der Richtung der Axe des Objectivs bewegt werden. Ausserdem ist mit *T* der Fortsatz *γ* verbunden, auf den zwei durch den Cubus *E* hindurchgehende Schrauben *δ* einwirken; löst man die eine dieser Schrauben und zieht die andere an, so wird sich der Stuhl *T* und mit ihm das Prisma um die Axe der Schraube *β* drehen, die mit der optischen Axe des Fernrohrs zusammenfällt.

II. Die Stützen mit den daran befindlichen Theilen.

Die horizontalen cylindrischen Zapfen der Drehungsaxe ruhen auf den Unterstützungspfeilern B, die ein starkes Fachwerk bilden, das in der Richtung der Drehungsaxe angesehen das Winkellager für die Zapfen erkennen lässt, auf welches das Fernrohr mit seinen in I beschriebenen Theilen aufgelegt wird und zwar bald so, dass das Kreisende der Axe nach Osten bald so, dass es nach Westen zu liegen kommt, zwei Lagen der Drehungsaxe, die wir künftig mit KO = „Kreis-Ost" und KW = „Kreis-West" bezeichnen werden.

An jedem Träger B sitzen zwei Messingstücke b und b', von denen b' rechts zu sehen ist, die zwischen sich einen Raum lassen, in welchen das untere Ende des Messingarms H frei hineingehen kann. An die hintere Seite von H ist eine starke Feder angeschraubt, und ist H mit dieser dann fest an einen Messingring K gelöthet, welcher frei um die Axe sich drehen lässt, aber auch durch die Druckschraube K' fest mit derselben verbunden werden kann. Geschieht dies letztere, so hängt der ganze Theil K und H mit der Feder an dem Axenkörper fest und dreht sich mit diesem soweit, als es eben der zwischen b und b' gebildete Raum gestattet. Um aber diese letztere Drehung ebenfalls unmöglich zu machen bzw. um das Fernrohr feiner einstellen zu können, ist noch beiderseits eine Micrometerschraube S angebracht, die ihre Mutter in einem der Backen b hat und beim Vorschrauben zunächst auf H drückt, bis die vorher entspannte Feder hinter H an den entgegengesetzten Backen b' anstösst und von diesem Momente an bei noch weiterem Vorschrauben von S anfängt gespannt zu werden. Bleibt die Feder in einer mittleren Spannung stehen, so ist, wenn man die grosse Druckschraube K' lösst, der Ring K mit H unbeweglich, während das Fernrohr mit der Hand vorläufig auf einen Gegenstand eingestellt werden kann; schliesst man dann K', so wird K und H am Axenkörper wieder fest und kann nun durch die Micrometerschraube S die genauere Einstellung des Fernrohrs gemacht werden.

Beim Umlegen des Fernrohrs muss man vorher erst die Micrometerschraube S am einen Ende, wo die Feder liegt, so weit zurückschrauben, dass der Raum zwischen b und b, völlig frei ist; ebenso muss, weil dieser Theil mit der Feder jetzt in die von b und b' am anderen Träger gebildete Gabel zu liegen kommen soll, auch hier die Micrometerschraube gehörig zurückgeschraubt sein.

An beiden Enden der Fernrohrträger B sitzen ferner noch die Nonien J, die vor dem Umlegen des Fernrohrs beide um eine horizontale Axe zurückgeklappt werden, damit der Höhenkreis kein Hinderniss findet. Ist die Umlage bewerkstelligt, so legt man den einen Nonius

an den Verticalkreis wieder an. Die genauere Ablesung geschieht durch eine von dem Lupenträger *W* getragene Lupe.

Der ganze Bau der Stützen ist auf einem Metallkreise aufgerichtet, von dem aus starke Radien nach einer starken Büchse von Glockenguss zusammenlaufen um sich mit dieser um die Verticalaxe des Ganzen drehen zu können, welche Drehung demnach, da dieser Kreis mit den Radien und mit den Stützen fest verbunden ist, das auf den Stützen ruhende Fernrohr mitmacht. Diesen inneren Kreis pflegt man die Alhidade zu nennen und trägt derselbe ausserdem noch vier um 90° von einander entfernte Nonien auf Silbertheilung.

III. Die Basis des Ganzen.

Die Basis des Ganzen bildet ein zweiter starker Metallkreis, der mit seinen drei Füssen *a* ein Dreifussgestell repräsentirt und oben auf Silber getheilt die Theilung des Horizontalkreises trägt, an die sich der eben erwähnte Alhidadenkreis eng anschliesst. Die Theilung selbst geht bei unserem Instrument von 10 zu 10 Minuten und kann mittelst der an der Alhidade sitzenden Nonien bis auf 10 Secunden genau abgelesen werden. Sein Durchmesser nach dem inneren Rande der Theilung beträgt 376 Millimeter. Zur Einstellung der Alhidade sowie zur Feststellung derselben dient die Klemmschraube *h'* mit der Micrometerschraube *M*. Die Füsse bilden, wie erwähnt, drei Schrauben *a*, die in die Schraubenmutter *f* eingeschraubt werden und von denen jede eine eingetheilte Trommel *a'* trägt, und ausserdem auf einer Fussplatte *b* aufsteht, welche letztere endlich auf dem eigentlichen Fundamentstein ruht. Um eine bestimmte Stellung der Fussschrauben ablesen zu können, ist an die Fussplatten *b* noch ein Index *L* angelöthet. Man erkennt hieraus leicht, dass der ganze Apparat auch als ein Libellenjustirapparat benutzt werden kann, und hätten wir unsere obigen Libellenprüfungen auch mit dem Passageinstrumente machen können, wenn wir die horizontale Drehungsaxe des Fernrohrs senkrecht über einen der drei Füsse stellten, die diesem Fuss entsprechende Schraube als Micrometerschraube benutzten und mittelst ihrer bzw. auch mittelst der beiden anderen Fussschrauben die Libellenblase zum Wandern und Einstehen brachten.

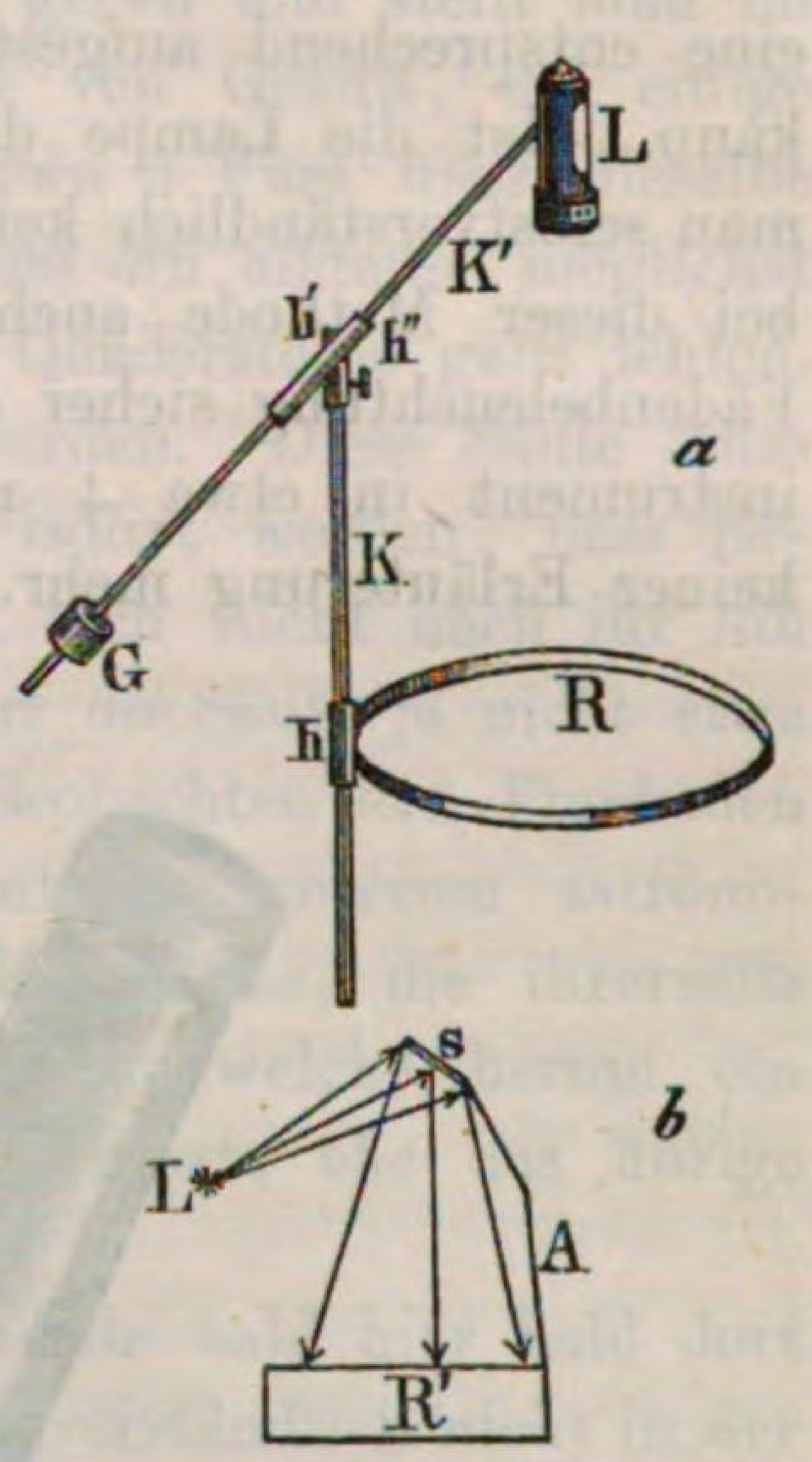
IV. Hilfsapparate.

Einen Hilfsapparat und zwar den hauptsächlichsten haben wir schon in der Libelle kennen gelernt. Um zu verhindern, dass diese, wenn sie auf der Axe aufsitzt, innerhalb zu weiter Grenzen sich um

die letztere drehen kann, wird über die beiden obersten Enden eines Trägers je ein Messingplättchen gelegt, das in der Mitte einen etwas weiteren Ausschnitt hat, als der Querschnitt der Libellenstützen *p* und *p*, Fig. 53, *a* verlangt, und das weiter durch ein Schräubchen oben auf den Trägern festgeschraubt werden kann.

Ein zweiter Hilfsapparat ist die B e l e u c h t u n g s e i n r i c h t u n g. Sie besteht bei unserem Instrumente noch darin, dass um den runden Stein, auf welchem das Passageinstrument steht, zunächst ein breiter Messingring *R* Fig. 58, *a* mit Reibung drehbar ist, der eine Hülse *h* angelöthet besitzt, in welcher sich eine Messingstange *K* verschiebt. An dieser Stange lässt sich mittelst einer Schraube eine zweite Hülse *h'*, und an dieser eine dritte Hülse *h"* feststellen, in welcher ein zweiter Messingarm *K'* sich verschiebt, der zuletzt eine kleine ebenfalls um eine eigene Axe drehbare Lampe *L* trägt, die durch ein Gegengewicht *G* äquilibrirt werden kann. Durch Drehung des grossen Ringes *R* lässt sich die ganze Einrichtung an jeden Punkt des Umkreises bringen; stellt man dann *K'* mit der Axe des Objectivrohrs parallel und verschiebt es in der Hülse *h"* gehörig, so wird die Lampe dem Objectiv gegenüber stehen. Damit nun in das Objectivrohr und das Ocularrohr von der Lampe Licht gelangen kann, wird auf das erstere ein Ring *R'* Fig. 58, *b* mit einem kleinen an einem gebogenen Arm *A* sitzenden Spiegelchen *s* gesteckt. Die Strahlen, die von der Lampe *L* hierauf fallen, werden ins Fernrohr geworfen und beleuchten schliesslich die Fäden im Ocularrohr, wobei das kleine Spiegelchen eben gross genug ist, um hinreichend Lampenlicht ins Fernrohr zu senden und wiederum zu klein, um einen namhaften Theil des Lichts, das von einem Fixstern oder einem anderen Himmelskörper kommt, zurückzuhalten.

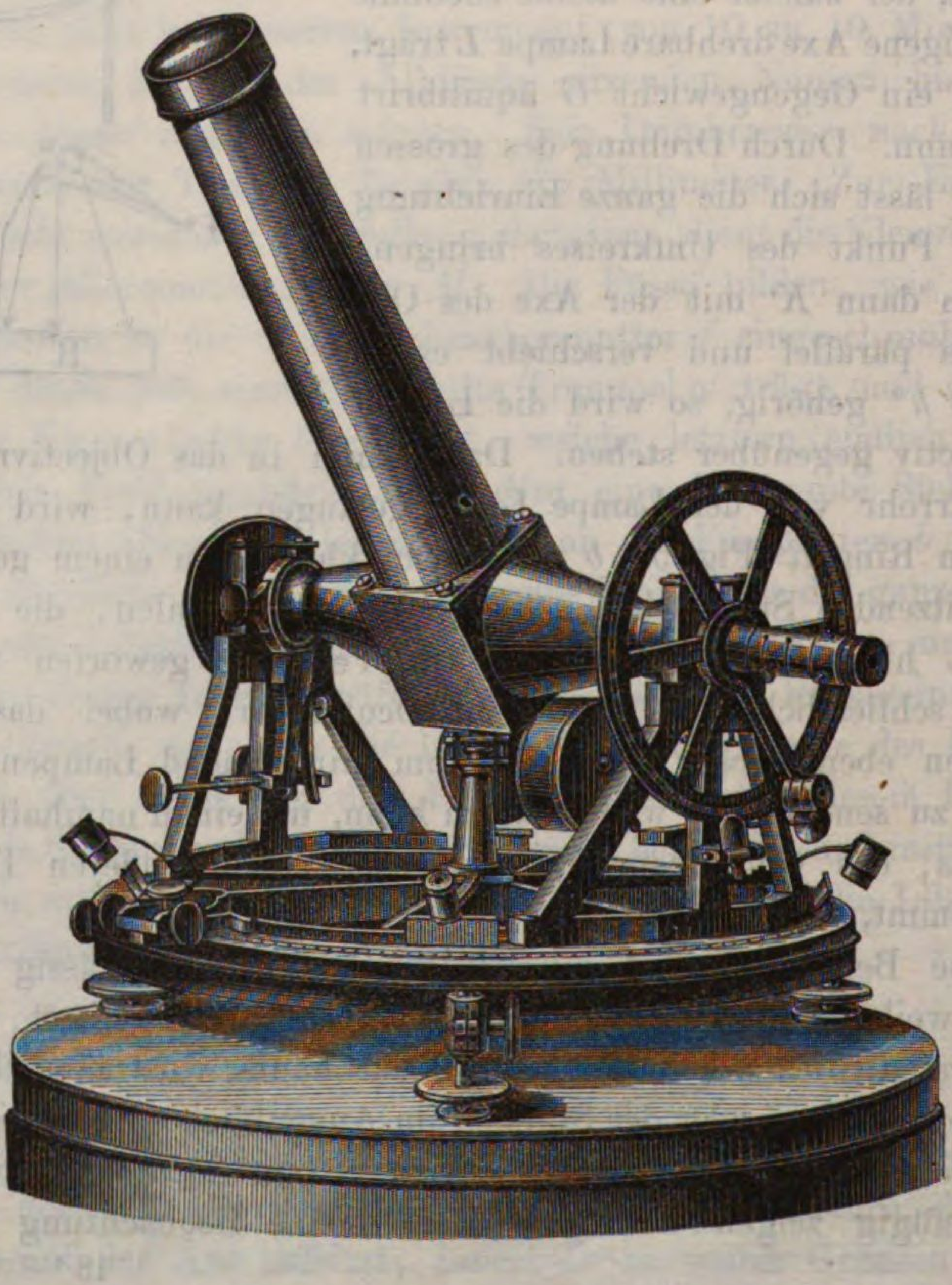
Figur 58.



Diese Beleuchtungsart muss jedoch als unzweckmässig erkannt werden, weil die ganze Einstellung nicht so rasch gelingt, als dies auf den ersten Blick scheinen möchte. Sehr häufig wird nämlich irgend ein Theil der Hülsen oder der Stangen im Augenblicke, wo es gilt, rasch das Fernrohr zu verstellen und die Lampe ihm nachfolgen zu lassen, sich ungefügig zeigen und somit leicht eine Beobachtung vereitelt

werden können. Man wendet in Folge dieser Unbequemlichkeit und Unsicherheit eine andere Art der Fädenbeleuchtung an. Ebenso gut nämlich wie der Ocularzapfen der horizontalen Axe wird auch der entgegengesetzte Zapfen durchbohrt werden dürfen. Durchbohrt man dann noch den Stuhl *T* und legt auf das Hauptprisma ein zweites kleines rechtwinkliges Prisma so auf, dass die Hypothenusenflächen beider zusammenfallen, so werden die beiden Prismen in der Richtung der Ocularaxe ein dickes Parallelglas bilden, durch welches hindurch eine entsprechend aufgestellte Lampe ihr Licht auf die Fäden senden kann. Ist die Lampe dann einmal richtig aufgestellt, so braucht man selbstverständlich keine Verstellung mehr vorzunehmen und kann bei dieser Methode auch leicht jede Abstufung in der Stärke der Fädenbeleuchtung sicher erreichen. Die Figur 59 stellt unser Passageinstrument in etwa $\frac{1}{7}$ natürlicher Grösse vor und bedarf dieselbe keiner Erläuterung mehr.

Figur 59.



§. 59. Haben wir im Vorausgehenden die einzelnen Theile des Passageinstruments kennen gelernt, so können wir nunmehr seine Aufstellung betrachten. Hierbei kommt es darauf an, ob es einen unveränderlichen Stand ein für allemal erhalten, oder vielleicht bald hier bald dort aufgestellt werden soll, welcher veränderlichen Aufstellung, da das Instrument ein sogenanntes tragbares ist, ja Nichts im Wege steht. Selbstverständlich müssen wir ihm nun bei jeder Aufstellung ein möglichst sicheres Fundament geben und stellt man im ersteren Falle es am besten auf eine Säule von Granit, die einige Fuss in die Erde eingegraben wird und etwa 3 Fuss über dieselbe hervorragt; in Ermangelung des Granits muss ein anderer möglichst fester Stein benutzt, oder wenn eigentliche Quadersteine ganz fehlen, ein Postament von Backsteinen aufgeführt werden. Diese Säule muss ferner unten herum soweit vom Beobachter isolirt werden, dass Erschütterungen von seinen Füssen ausgehend, sich nicht nach ihr hin verbreiten können. Mit Rücksicht hierauf darf die Säule ja nicht etwa auf Steinplatten ruhen, die zugleich beim Beobachten den Fussboden für den Beobachter abgeben. Das Instrument auf unserem astronomischen Thurme z. B. steht auf einer Sandsteinsäule, die ihrerseits wiederum auf einer dicken Mauer aufsitzt, um welche herum ein Zwischenraum von etwa einem Zoll freigelassen ist, ehe das übrige Plattenlager des Thurmzimmers beginnt.

Für den Fall, dass man mit dem Apparate bald hier bald dort Beobachtungen machen muss, wird man selbstverständlich nicht in der Lage sein, an jedem dieser Orte ein solches Fundament aufführen zu können, und wird man in diesem Falle am besten ein starkes Stativ von Holz anfertigen lassen, das zur Abhaltung der Feuchtigkeit sorgfältig mit Oel getränkt und mit Firniss überzogen sein muss. Ein solches Stativ wird dann auf eine solide Unterlage gestellt, die man so einrichtet, dass Erschütterungen vom Beobachter aus dem Stative sich nicht mittheilen können. Ausserdem wird man namentlich im letzteren Falle die ganze Aufstellung vor der grellen Einwirkung der Sonne schützen und zu dem Ende ein Breterhäuschen um das Ganze errichten müssen.

Hat man längere Zeit an einem Orte zu beobachten und wird das Instrument nur in einer ganz bestimmten Lage gebraucht, so muss man ein Mittel haben, um ihm diese Lage, falls sie verändert wurde, rasch und sicher wieder geben zu können und errichtet man zu dem Ende eine sogenannte „Azimuthalmarke.“ Unser Passageninstrument z. B. ist vorzugsweise zur Beobachtung des Durchgangs von Sternen durch den Meridian bestimmt und soll demnach so aufgestellt sein, dass das Objectivfernrohr sich im Meridian des Beobachters bewegt.

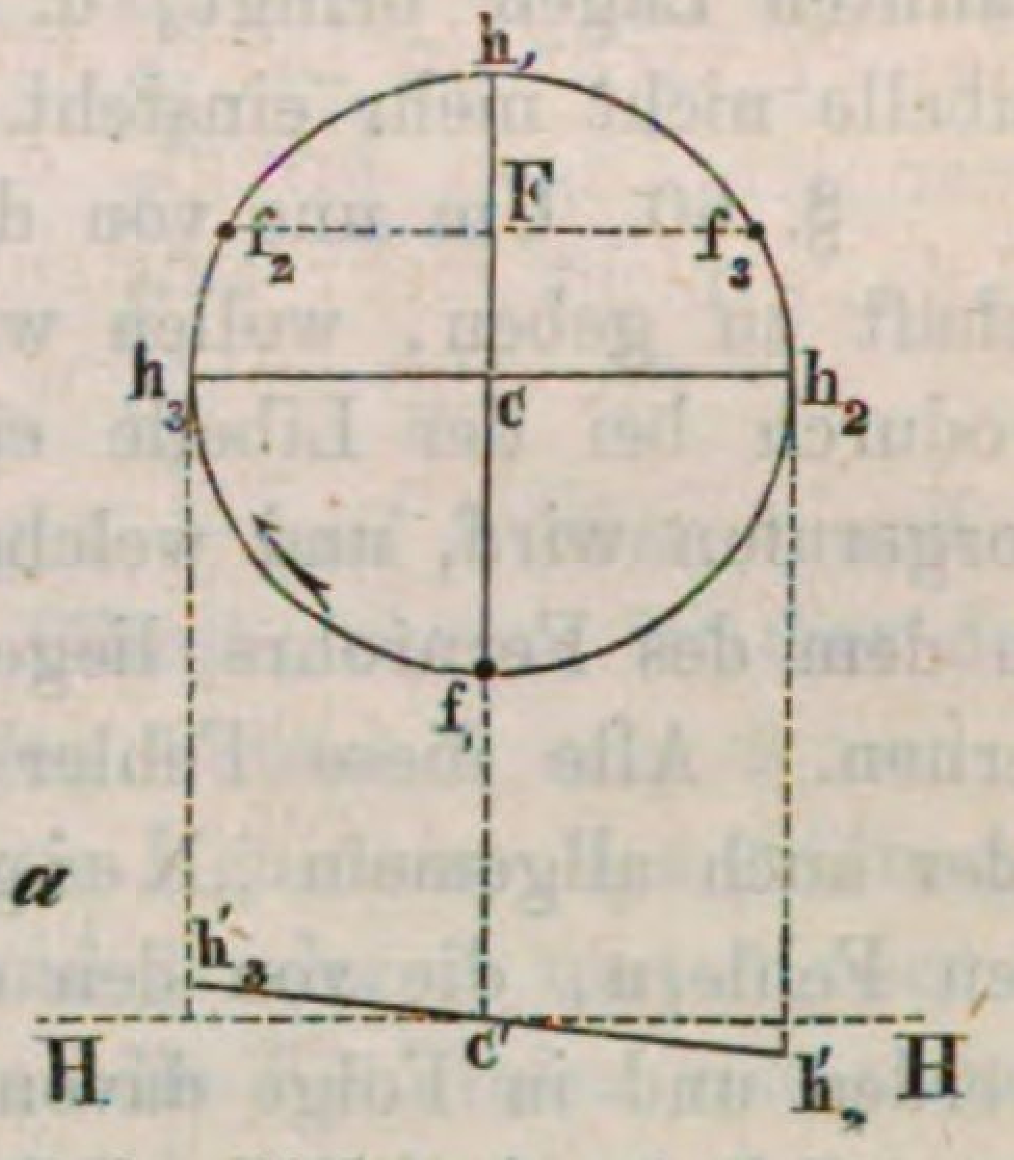
Ist es aber aus dem Meridian herausgedreht oder von seiner Unterlage herabgenommen, so würde es beim Wiederaufsetzen einer besonderen Beobachtung bedürfen, um ihm die Meridianlage wieder zu geben. Diese Beobachtung nun zu umgehen, ist in gehöriger Entfernung eine Marke angebracht, die mit dem Fernrohr des Instruments aufgefunden werden kann und bei uns in einem auf einer Seite eines grossen Quadersteins aufgezeichneten Maasstabe besteht, von welchem ein bestimmter Strich als die Marke im engeren Sinne angesehen werden kann, und steht dieser Stein 3772 Meter nach Norden hin auf einer vom Thurme aus zu übersehenden Anhöhe.

Wir werden später diese Meridianmarke noch näher betrachten und stellen uns vorerst in ihr einen schwarzen verticalen Strich auf weissem Grunde vor, der, sobald er mitten im Fernrohr erscheint, anzeigt, dass letzteres seine richtige ursprünglich ihm gegebene Lage wieder eingenommen hat. Ebenso wie man eine Marke im Norden oder Süden zu errichten hat, wird auch oft für die Stellungen senkrecht hierzu im Osten oder Westen eine solche nöthig sein und sind für unser Passageinstrument im Westen und Osten ebenfalls zwei Steine mit den nöthigen Marken errichtet. Anstatt der Steine wird man aber insbesondere beim Hin- und Herwandern mit einem solchen Instrumente auch einen Pfahl oder einen Eisencylinder mit einer Marke versehen verwenden können.

Sobald nun das für das Passageinstrument nöthige Fundament errichtet ist, wird dasselbe darauf gesetzt und besteht die nächste Operation dann in der Horizontalstellung des Horizontalkreises, d. h. mit andern Worten auch der Horizontal- bzw. Verticalstellung der beiden Drehungsaxen des Fernrohrs. Da diese Stellung mit der Libelle zu geschehen hat und diese zur Erreichung eines solchen Ziels vor allem selbst richtig sein muss, so würden nunmehr unsere Lehren des vorigen Kapitels eine erste praktische Anwendung finden und bezeichnen wir noch einmal die hierbei nöthigen Manipulationen. Man stellt durch Drehung der Alhidade das eine Ende der horizontalen Drehungsaxe möglichst senkrecht über einen Fuss, setzt die Libelle auf, stellt diesen Fuss so, dass die Blase ablesbar wird, und liest die Enden w_1 und o_1 ab; hierauf setzt man die Libelle um, und liest w_2 und o_2 ab. Da nun $\frac{w_1 - o_1}{2} = m_1$ und $\frac{w_2 - o_2}{2} = m_2$ die den beiden Libellenstellungen entsprechenden Mitten der Blase und in Scalentheilen ausgedrückt $\frac{(w_1 - o_1) - (w_2 - o_2)}{4} = n_1$ die Verschiebung der Blase welche gemäss der Gleichung (8) des vorigen Kapitels vom Höhenfehler herrührt, so corrigirt man diesen Höhenfehler in der Weise,

dass man mittelst der Libellen-Höhenschraube die Blase um n_1 Theile ihrer Verstellung entgegen zurückbringt. Mit der so corrigirten Libelle kann jetzt das Horizontalstellen des Horizontalkreises vorgenommen werden. Verstellen wir nämlich die Fussschraube, die unter dem einen Ende der Libellenaxe liegt, so, dass die Blase in der Mitte einsteht, so ist die Axe und der hiermit parallele Durchmesser des Horizontalkreises horizontal. Bezeichnen wir die Fusschrauben der Reihe nach mit f_1, f_2, f_3 und sehen f_1 als die Schraube an, die ursprünglich vertical unter dem einen Ende der Drehungsaxe liegt, so ist durch die bisherige Operation der Durchmesser f_1 h_1 Fig. 60 horizontal geworden. Damit aber die ganze Ebene des Horizontalkreises horizontal wird, müssen wir noch eine zweite Linie desselben einstellen und wählt man hierzu am zweckmässigsten eine Linie, die f_1 h_1 senkrecht durchschneidet, also z. B. die Linie h_2 h_3 in unserer Fig. 60. Zu dem Ende drehen wir den Alhidadenkreis mit dem Fernrohr um 90⁰ aus seiner früheren Lage heraus, und wirken an den Schrauben f_2 und f_3 in einer Weise, die am deutlichsten wird, wenn wir die Linie h_2 h_3 mit dem Durchschnittspunkt c auf eine Verticalebene projiciren. Die Projection wird dann das Aussehen von Fig. 60, a gewinnen, falls wir voraussetzen, dass f_2 etwas höher wie f_3 läge. Würden wir nun den Fuss f_2 für sich allein ein wenig senken oder f_3 allein ein wenig heben, bis die Libelle wieder einstünde, so wäre ohne Zweifel h_2 h_3 zwar horizontal, aber sicher hätten wir durch diese Operation den Punkt F und hiermit den Punkt c gesenkt oder gehoben, und somit die Linie f_1 h_1, die bereits horizontal war, wieder dieses Charakters entkleidet. Man wird dies aber vermeiden, wenn man gleichzeitig an beiden Schrauben f_2 und f_3 operirt und um möglichst gleichviel f_2 senkt und f_3 hebt, bis die Blase wieder einsteht.

Fig. 60.



Man begreift jedoch, dass dies gleichförmige Heben und Senken nicht absolut genau möglich ist und bringt hierauf das Fernrohr mit seiner Axe wieder in die erste Lage zurück: Steht dann die Libelle ein, so ist die Operation vollendet, steht sie nicht ein, so wird man von neuem an der Schraube f_1 zu wirken haben, um f_1 h_1 von neuem horizontal zu stellen, wobei man aber jetzt schon viel weniger an der Schraube zu drehen haben wird wie im Anfang. Ist dies geschehen, so stellt man das Fernrohr wieder in die zweite Lage und nimmt die bezeichnete zweite Correction wieder an f_2 und f_3 vor, dreht dann

wieder in die erste Lage, dann wieder in die zweite u. s. w., bis eben die Blase in beiden Lagen vollständig in der Mitte bleibt.

Hiernach würde nun, wenn man das Fernrohr mit der Axe im Kreise herumführte, die Blase überall einstehen müssen. Denn wir haben der theoretischen Anforderung für das Horizontalstehen des Horizontalkreises genügt, und ist er horizontal, so liegt kein Grund vor, wesshalb die Libelle in anderen als den zwei eben benutzten Lagen nicht einzustehen brauchte. In Wirklichkeit ist aber die Sache sehr häufig nicht so und wird man finden, dass wenn man insbesondere das Fernrohr in Lagen um 180° Grad verschieden von jeder der genannten Lagen bringt, d. h. wenn man z. B. h_1 über f_1 stellt, die Libelle nicht mehr einsteht.

§. 60. Um uns von diesem bemerkenswerthen Umstand Rechenschaft zu geben, wollen wir das Zusammenwirken derjenigen Fehler, wodurch bei der Libelle eine Abweichung von der Nullstellung hervorgerufen wird, und welche theils im Mechanismus der Libelle, theils in dem des Fernrohrs liegen, allgemeiner und vollständiger kennen lernen. Alle diese Fehler können wir „mechanische Fehler“ oder auch allgemein „Neigungsfehler“ nennen, im Gegensatze zu den Fehlern, die von den optischen Theilen des Fernrohrs veranlasst werden und in Folge davon „optische“ Fehler heissen können.

Sehen wir bei der Libelle vom Seitenfehler, den wir als beseitigt annehmen, ab, so sind es immer blos zwei Lagen, in denen die Libelle aufgesetzt oder angehängt vorkommen kann, nämlich entweder in der Anfangsstellung oder in einer um 180° davon verschiedenen Lage; erstere bezeichnen wir nunmehr immer mit L_1, die um 180° davon verschiedene mit L_2 und nehmen an, dass diese Lagen auf einer Fernrohraxe, die in der Richtung OW liegt, stattfinden.

Das Fernrohr kann, ohne dass seine Stützen ihren Platz verändern, d. h. ohne dass die Alhidade gedreht wird, umgelegt werden, so dass, wie wir schon oben angezeigt haben, hierdurch die beiden Lagen: KO = Kreis-Ost und KW = Kreis-West zu Stande kommen. Wird hierbei die Libelle vor dem Umlegen von der Axe aufgehoben und nach dem Umlegen wieder so aufgesetzt, als wäre sie sitzen geblieben, so haben wir die Combinationen

$$L_1 \text{ mit } \begin{cases} KO \\ KW \end{cases}$$

Setzen wir dagegen in jeder Lage des Fernrohrs auch die Libelle um, so haben wir vier Zusammenstellungen zu beachten, nämlich:

$$KO \text{ mit } \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases}$$

$$KW \text{ mit } \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases}$$

Heben wir das Fernrohr in die Höhe, so begreift man, dass auch seine Stützen mit der Alhidade sich um 180^0 umdrehen lassen, ohne dass das Fernrohr mit geht, d. h. ohne dass der Höhenkreis seine Lage ändert. Wir müssen desshalb diese Stellungen der Alhidade für sich unterscheiden und wollen sie mit S_1 und S_2 bezeichnen. Demnach haben wir in folgender Zusammenstellung alle Combinationen, deren es im Ganzen acht giebt:

1)	KO	mit	L_1	mit	S_1
2)	„	„	„	„	S_2
3)	„	„	L_2	„	S_1
4)	„	„	„	„	S_2
5)	KW	„	L_1	„	S_1
6)	„	„	„	„	S_2
7)	„	„	L_2	„	S_1
8)	„	„	„	„	S_2

Es wird sich zeigen, dass die Stellungen 1 und 3 oder 5 und 7 zur Kenntniss des Höhenfehlers der Libelle führen; ebenso ist dies der Fall bei 2 und 4; 6 und 8. Die Stellungen 1 und 2 oder 3 und 4 ebenso 5 und 6 oder 7 und 8 verhelfen zur Kenntniss des Stützenfehlers des Fernrohrs. Die Stellungen 1 und 5 oder 2 und 6 oder 3 und 7 oder 4 und 8 dagegen verschaffen uns die Kenntniss von einem Axenfehler des Fernrohrs.

So sehr auch der Künstler bemüht sein mag, ein Instrument in idealer Form herzustellen, es bleibt dasselbe immerhin ein Menschenwerk und wird mit einer Reihe von Fehlern behaftet sein, welche die menschliche Hand nicht gänzlich wegschaffen kann, die aber der menschliche Geist nachzuweisen und auch der absoluten Grösse nach in der befriedigendsten Weise zu erforschen vermag. Kennt man aber die Fehler, so weiss man auch, wie der Apparat ohne diese, d. h. wie der mathematisch richtige Apparat beschaffen sein müsste.

Der „Axenfehler“ des Fernrohrs kann nun ein doppelter sein: nämlich einmal ist denkbar, dass die Zapfen nicht genau kreisförmig cylindrisch sind, dass also die Durchschnittsfigur, welche eine Ebene senkrecht durch den Axenkörper gelegt bildet, kein Kreis ist. Dieser Fehler kann an jeder Axe und zwar in verschiedener Weise vorkommen; aber gerade dieser Fehler ist es auch, den der Künstler mit aller Sorgfalt zu vermeiden sucht und den zu vermeiden er in einer günstigen Lage ist, wenn ihn eine gute Drehbank unterstützt. Die Axen laufen auf einer solchen so rasch um, dass eine Ungleichheit der Krümmung nicht befürchtet zu werden braucht. Um sich aber dennoch Gewissheit zu verschaffen, setzt man die Libelle auf den Axenkörper und dreht unter

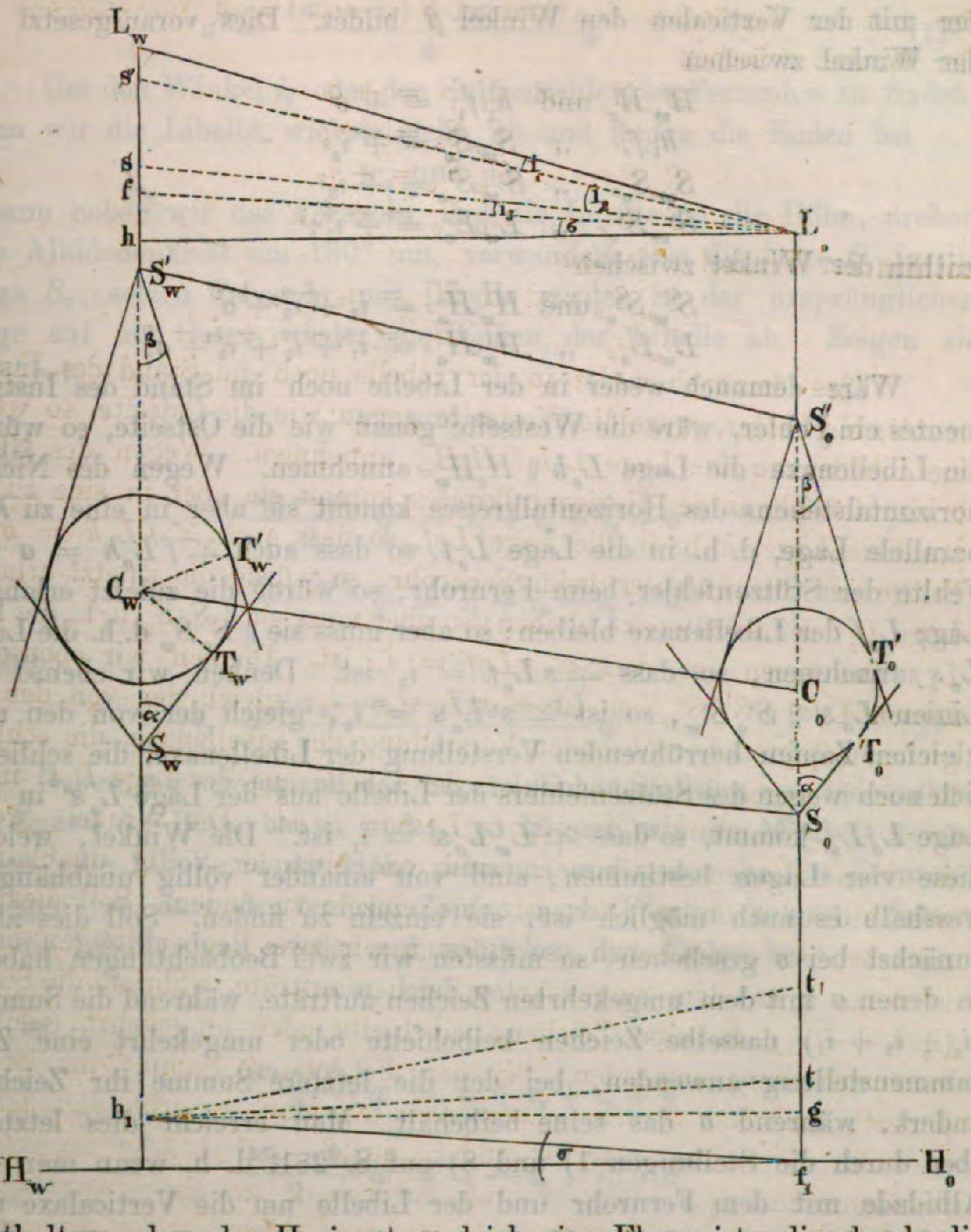
der Libelle die Axe so, dass das Fernrohr aus der tiefsten Stellung nach unten allmälig in die möglichst höchste gelangt und beobachtet die Blase. Bleibt diese absolut still stehen, so kann man beruhigt sein; wäre es nicht der Fall und blieben alle sonstigen Vermuthungen, die etwa das Verstellen der Blase erklären könnten, ausgeschlossen, so wäre der Beweis für das Vorhandensein eines Axenfehlers geliefert. Ein solcher Fehler lässt sich aber nicht durch eine einmalige Beobachtung an der Libelle numerisch festsetzen, ebenso wenig wie der Fehler der verschiedenen Krümmung im Libellenrohr und ist, um seine Natur und Grösse kennen zu lernen, eine genaue Ablesung der Libelle bei der oben angezeigten Umdrehung des Fernrohrs sowie hernach die Aufstellung einer Tabelle nöthig, bei welcher als Argument die Grade des Höhenkreises etwa von 10° zu 10° fortschreiten und daneben die Zahlen stehen, welche die Verstellung der Blasenmitte anzeigen. Man wird dann, wenn man z. B. das Fernrohr bei einer Einstellung von 32° gebraucht hätte, durch Interpolation den Fehler berechnen und diesen bei der abgelesenen Mitte der Blase berücksichtigen können.

Ein anderer Fehler der Axen wird aber häufiger vorkommen, und bietet eine solche Regelmässigkeit, dass er ebenfalls gefunden und in Rechnung gezogen werden kann. Es wird nämlich die Dicke der Zapfen an beiden Enden nicht genau dieselbe sein können, während sonst die beiden Axenenden genaue Cylinder sind; der eine Zapfen wird also einen etwas kleineren Radius wie der andere haben können. Es ist klar, dass dieser Fehler am dickeren Zapfenende ein Höherstehen der Libellenaxe zur Folge hat, und demgemäss als ein Neigungsfehler angesehen werden kann.

Auch die Stützen des Fernrohrs können ungleich lang sein, ebenso wie wir dies bei den Libellenstützen sahen und wird in diesen Fehler auch die Ungleichheit der Winkelausschnitte im Axenlager einzurechnen sein.

Demnach hätten wir drei Neigungsfehler im ganzen Apparat: den Stützenfehler der Libelle, den wir im vor. Kap. mit i_1 bezeichneten; den Fehler der Libellenstellung, den die Ungleichheit der Axendicken veranlasst und der i_2 heissen möge und wobei nicht zu übersehen, dass unser jetziges i_2 mit dem auf Seite 257 nicht identisch ist; drittens den Stützenfehler des Fernrohrs, den wir mit i_3 bezeichnen wollen. Wir rechnen ferner, vorausgesetzt dass die Axe des Fernrohrs die *OW* Lage hat, jeden dieser drei Fehler **positiv**, wenn hierdurch die Blase nach Westen hin wandert, wenn also hierdurch im Westen ein Höherstehen die Folge ist. Sind alle drei Fehler vorhanden und positiv, so bildet die Figur 61 die schematische Uebersicht. $H_o H_w$ stellt den Horizont vor und möge man die Auffassung

Fig. 61.



festhalten, dass der Horizont zugleich eine Ebene ist, die durch die Fusschraube f_1 Fig. 61 lauft, und mit der Ebene des Alhidaden- und Horizontalkreises, die wir durch die Linie $f_1 h_1$ dargestellt denken, im Osten den Winkel $h_1 f_1 H_w = \sigma$ bilde, so dass σ noch einen vierten Neigungswinkel bezeichnet, den wir ohne Zweifel S. 257 u. f. auch als Winkel i_2 im Auge hatten. Dies vorausgesetzt bedeuten $S_w h_1$ und $S_o f_1$ die Längen der westlichen und östlichen Fernrohrstütze; $L_w S'_w$ und $L_o S'_o$ die Längen der Libellenstützen; C_w und C_o die Centren der Zapfenenden mit den Radien $C_w T_w = R_w$ und $C_o T_o = R_o$; $S_w T_w$ und $S_o T_o$ den einen westlichen und östlichen Winkelarm des Zapfenlagers, der mit der Verticalen den Winkel α bildet; ebenso $S'_w T'_w$ und $S'_o T'_o$ den einen

westlichen und östlichen Winkelarm am Ausschnitt der Libellenfüsse, der mit der Verticalen den Winkel β bildet. Dies vorausgesetzt ist der Winkel zwischen

$$\begin{aligned} H_w H_0 &\text{ und } h_1 f_1 = + \sigma \\ h_1 f_1 &\text{ ,, } S_w S_0 = + i_3 \\ S_w S_0 &\text{ ,, } S'_w S'_0 = + i_2 \\ S'_w S'_0 &\text{ ,, } L_w L_0 = + i_1; \end{aligned}$$

mithin der Winkel zwischen

$$\begin{aligned} S'_w S'_0 &\text{ und } H_w H_0 = i_2 + i_3 + \sigma \\ L_w L_0 &\text{ ,, } H_w H_0 = i_1 + i_2 + i_3 + \sigma. \end{aligned}$$

Wäre demnach weder in der Libelle noch im Stand des Instrumentes ein Fehler, wäre die Westseite genau wie die Ostseite, so würde die Libellenaxe die Lage $L_0 h \parallel H_0 H_w$ annehmen. Wegen des Nichthorizontalstehens des Horizontalkreises kommt sie aber in eine zu $h_1 f_1$ parallele Lage, d. h. in die Lage $L_0 f$, so dass auch $\sphericalangle f L_0 h = \sigma$ ist. Fehlte der Stützenfehler beim Fernrohr, so würde die zuletzt erlangte Lage $L_0 f$ der Libellenaxe bleiben; so aber muss sie $\parallel S_0 S_w$ d. h. die Lage $L_0 s$ annehmen, so dass $\sphericalangle s L_0 f = i_3$ ist. Denken wir ebenso die Linien $L_0 s' \parallel S'_0 S'_w$, so ist $\sphericalangle s' L_0 s = i_2$, gleich der von den ungleichen Zapfen herrührenden Verstellung der Libellenaxe, die schliesslich noch wegen des Stützenfehlers der Libelle aus der Lage $L_0 s'$ in die Lage $L_0 L_w$ kommt, so dass $\sphericalangle L_w L_0 s' = i_1$ ist. Die Winkel, welche diese vier Lagen bestimmen, sind von einander völlig unabhängig, wesshalb es auch möglich ist, sie einzeln zu finden. Soll dies aber zunächst bei σ geschehen, so müssten wir zwei Beobachtungen haben, in denen σ mit dem umgekehrten Zeichen aufträte, während die Summe $(i_3 + i_2 + i_1)$ dasselbe Zeichen beibehielte oder umgekehrt eine Zusammenstellung anwenden, bei der die letztere Summe ihr Zeichen ändert, während σ das seine beibehält. Man erreicht dies letztere aber durch die Stellungen 1) und 8) auf S. 281, d. h. wenn man die Alhidade mit dem Fernrohr und der Libelle um die Verticalaxe um 180^0 dreht, während der Horizontalkreis stehen bleibt. Thun wir dies, so werden in dieser zweiten Lage die Enden der Blase abgelesen bei

$$w \text{ und } o$$

in der Anfangslage aber bei

$$w_0 \text{ und } o_0$$

und ist:

$$\frac{(w_0 - o_0)}{2} \varphi = \sigma + (i_3 + i_2 + i_1)$$

$$\frac{(w - o)}{2} \varphi = \sigma - (i_3 + i_2 + i_1)$$

und somit

$$\sigma = \frac{(w_0 - o_0) + (w - o)}{4}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Um den Winkel i_3 oder den Stützenfehler des Fernrohrs zu finden, lesen wir die Libelle, wie sie steht, ab und finden die Enden bei

$$w_0 \text{ und } o_0 ;$$

sodann heben wir das Fernrohr und die Libelle in die Höhe, drehen den Alhidadenkreis um 180^0 um, verwandeln also die Lage S_1 in die Lage S_2, setzen Fernrohr mit Libelle wieder in der ursprünglichen Lage auf und lesen wieder die Enden der Libelle ab. Zeigen sie sich bei

$$w_3 \text{ und } o_3$$

so ist:

$$\frac{w_0 - o_0}{2}\varphi = i_1 + i_2 + i_3 + \sigma$$

$$\frac{w_3 - o_3}{2}\varphi = i_1 + i_2 - i_3 + \sigma$$

mithin

$$i_3 = \frac{(w_0 - o_0) - (w_3 - o_3)}{4}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Gehen wir wieder von der ursprünglichen Stellung aus und denken die Enden der Blase bei w_0 und o_0, so können wir die Alhidade stehen lassen, die Libelle in die Höhe nehmen, und unter ihr das Fernrohr umlegen, so dass der östliche Zapfen nach Westen kommt. Setzen wir die Libelle dann wieder auf, so stehen ihre Enden bei

$$w_2 \text{ und } o_2$$

und ist

$$\frac{(w_0 - o_0)}{2}\varphi = i_1 + i_2 + i_3 + \sigma$$

$$\frac{w_2 - o_2}{2}\varphi = i_1 - i_2 + i_3 + \sigma$$

d. h.

$$i_2 = \frac{(w_0 - o_0) - (w_2 - o_2)}{4}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Kehren wir in Gedanken zur ursprünglichen Lage zurück, und setzen nur die Libelle um, so lesen wir bei diesem Umsetzen die Enden ab bei

$$w_1 \text{ und } o_1$$

und ist

$$\frac{(w_0 - o_0)}{2}\varphi = \quad i_1 + i_2 + i_3 + \sigma$$

$$\frac{(w_1 - o_1)}{2}\varphi = - i_1 + i_2 + i_3 + \sigma$$

und hiernach

$$i_1 = \frac{(w_0 - o_0) - (w_1 - o_1)}{4} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wie wir ja auch schon S. 267 gesehen haben, wo in der Gl. (8) nur anstatt w_0 und o_0 ein w_1 und o_1 und statt des jetzigen w_1 und o_1 damals ein w_2 und o_2 stand.

Will man die ganze Verstellung der Libelle wegen der Fehler i_2, i_3 und σ gegen den Horizont wissen, so muss man die der Gleichung (4) vorausgehenden beiden Gleichungen addiren, um zu bekommen

$$(i_2 + i_3 + \sigma) = \frac{(w_0 - o_0) + (w_1 - o_1)}{4} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

entsprechend Gl. (9) §. 57, wo $(i_2 + i_3) = 0$ und das i_2 gleich unserem σ war.

§. 61. Hiernach werden wir nun auch begreifen, warum eine Fernrohrebene z. B. die Alhidadenkreisebene und hiermit die Drehungsaxe, die wir nach der S. 278 u. f. angegebenen Methode horizontal stellten, dies nur dann ist, wenn wir annehmen dürfen, es sei kein Fehler i_2 also kein Axenfehler und kein Fehler i_3 d. h. kein Stützenfehler des Fernrohrs vorhanden. Denn beseitigen wir mittelst der Höhenschraube der Libelle den Fehler i_1, so kommt $L_w L_o$ Fig. 61 in die Lage $s' L_o$ zu stehen und arbeiten wir von da ab an der Fusschraube f_1, bis die Blase in der Mitte einsteht, so ist dies erreicht, wenn wir f_1 gegenüber h_1 um

$$(f_, g + gt + tt_,) = (hf + fs + ss') = (\sigma + i_3 + i_2)$$

heben, wodurch $L_0 s'$ als die letzte Lage der Libellenaxe in die horizontale Lage und S'_o in gleiche Höhe mit S'_w gelangt, und sonach die Blase auch wenn wir die Libelle umsetzen, in der Mitte stehen bleibt, welches Stehenbleiben uns aber zur Annahme verleitet, es wäre $h_1 f_1$ horizontal, während es von dieser Lage rechts um

$$gt + tt_1$$

abweicht, d. h. um $(i_3 + i_2)$ höher steht. Führen wir hierauf unserer Methode S. 278 u. 279 gemäss das Fernrohr mit der Libelle um 90^0 herum, und zwar in der Richtung des Pfeils Fig. 60, so kommt ein Punkt über f_1 und h_1 entsprechend über h_3 und h_2 zu stehen, und drehen wir jetzt gleichförmig aber entgegengesetzt an den Schrauben f_2 und f_3, so werden wir die Libelle in der Mitte zwar zum Einstehen bringen; aber wenn wir glauben, es wäre jetzt auch die Linie $h_2 h_3$ horizontal, so irren wir ebenso wie vorhin bei der Linie $h_1 f_1$: Denn die Libelle steht zwar in beiden Lagen L_1 und L_2 ein, da aber die Fehler i_3 und i_2 vor wie nach vorhanden sind, so kann das Einstehen der Libelle nur möglich sein, wenn $h_3 h_2$, das eigentlich, wenn der Fehler σ allein zu corrigiren gewesen wäre, horizontal stände, bei h_3

um $(i_3 + i_2)$ gegenüber h_2 höher liegt, was es ja bereits durch die Hebung des Fusses f_1 in der ersten Lage der Axe geworden ist. Aus dem Einstehen der Libelle in der Lage L_1 und L_2, wenn einmal das Axenende

W über h_1, O über f_1

sodann

" " h_2, " " h_3

steht, ist kein Schluss auf die Horizontalität vom Horizontalkreis oder der Drehungsaxe $C_o\,C_w$ zu machen. Sofort erfährt man aber das Vorhandensein von $(i_3 + i_2)$, wenn man die Lagen

W über h_1, O über f_1

vertauscht mit

W " f_1, O " h_1

d. h. wenn man den Alhidadenkreis mit Fernrohr und Libelle, die als richtig vorausgesetzt wird, um 180^0 umdreht. Denn jetzt bekommt i_3 und i_2 das umgekehrte Zeichen, die Umdrehung ist identisch mit einem Umsetzen des ganzen Apparats auf der Linie $h_1 t_1$ Fig. 61, und wird sich nunmehr die Blase nach dem doppelten Winkel $(i_3 + i_2)$ verstellen. Daher gilt folgende wichtige Regel:

> Setzt man eine von ihrem Höhenfehler befreite Libelle auf die mit ihrem einen Ende über einem Fernrohrfuss liegende Axe auf und bewirkt mittelst der Schraube dieses Fusses ein Einstehen der Blase, so ist ein Axen- incls. Stützenfehler des Fernrohrs anzunehmen, falls beim Umdrehen der Alhidade mit Fernrohr und Libelle um 180^0 ein Abweichen der Blase von der Mitte erfolgt; es bleibt aber noch fraglich, ob die Winkel i_3 und i_2 wirklich beide vorhanden sind, oder ob einer davon gleich Null ist.

Wir müssen demnach nothwendig erst über Axen- und Stützenfehler des Fernrohrs uns unterrichten, bevor wir n. S. 278 u. f. unsere Methode der Horizontalstellung einer Fernrohraxe anwenden dürfen.

Hierbei kann aber zunächst die Aufgabe gestellt werden: das Verhältniss der beiden Zapfendicken oder die Differenz ihrer Radien zu finden. Zu dem Ende beachten wir in unserer Figur 61, dass die Ungleichheit der Zapfen die Linie $sL_o \parallel S_w S_o$ in die Lage $s'L_o \parallel S'_w S'_o$ bringt, oder mit andern Worten auch, dass die Strecke $S_o S'_o$ in die Strecke $S_w S'_w$ verwandelt wird. Letztere Strecke ist aber gleich

$$S_w S'_w = S_w C_w + C_w S'_w$$
$$= \frac{R_w}{sin\,\alpha} + \frac{R_w}{sin\,\beta} = R_w \left(\frac{1}{sin\,\alpha} + \frac{1}{sin\,\beta}\right);$$

ebenso ist

$$S_o S'_o = \frac{R_o}{\sin\alpha} + \frac{R_o}{\sin\beta} = R_o\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)$$

und somit die betreffende Differenz $S_w S'_w - S_o S'_o$ oder

$$ss' = (R_w - R_o)\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Setzen wir ausserdem die ganze Länge der Libelle gleich l, so ist der Winkel

$$i_2 = 206265'' \frac{(ss')}{l}$$

mithin

$$i_2 = 206265'' \frac{(R_w - R_o)}{l}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) \dots\dots$$

und da nach Gl. (3) auch

$$i_2 = \frac{(w_0 - o_0) - (w_2 - o_2)}{4}\varphi$$

ist so ergiebt sich die gesuchte Differenz

$$(R_w - R_o) = \frac{l\,[(w_0 - o_0) - (w_2 - o_2)]}{4.206265\,(\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta)}\varphi \quad \dots (6)$$

Ebenso kann man fragen nach der eigentlichen Neigung i der Fernrohraxe gegen den Horizont, d. h. nach dem Winkel, den die Linie $C_w C_o$ mit der Linie $H_w H_o$ bildet. Dieser Winkel ist gleich

$$i = \sigma + i_3 + \text{Winkel zwischen } C_w C_o \text{ und } S_w S_o;$$

der letztere Winkel mit i'_2 bezeichnet ist aber gleich

$$i'_2 = 206265'' \frac{C_w S_w - C_o S_o}{l} = 206265'' \frac{(R_w - R_o)\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{l}$$

welcher Werth mit Rücksicht auf i_2 und die Gleichung (6) übergeht in

$$i'_2 = \frac{i_2\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta} \quad \dots\dots\dots\dots (7)$$

woraus folgt

$$i = \sigma + i_3 + i_2 \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta} \quad \dots\dots (8)$$

Diese letztere Entwickelung giebt uns sofort zu einer sehr wichtigen Bemerkung Veranlassung. Es wird sich nämlich zeigen, dass gerade die Neigung i der Fernrohraxe $C_o C_w$ gegen den Horizont bei den Zeitbestimmungsmethoden eine Hauptrolle spielt. Sind wir nun in der günstigen Lage, den Fehler i_3 und i_2 gleich Null anzusehen, so ist i, das jetzt auch identisch mit i_2 S. 257, gleich

$$i = \sigma$$

und wird demnach die Neigung der Fernrohraxe durch ein einmaliges Umsetzen der Libelle nach Formel (5) zu finden sein. Dürften wir dies aber nicht voraussetzen, müssten wir vielmehr eine Ungleichheit der Stützen und der Radien R_w und R_o annehmen, dann kann

ein solches einmaliges Umsetzen der Libelle nicht zum Ziele führen. In diesem Falle müssten wir alle die Operationen vornehmen, die zur Kenntniss von σ, i_3 und i_2 führen und ausserdem noch α und β kennen. Wäre nur ein Stützenfehler vorhanden, d. h.

$$i = \sigma + i_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so wäre dann nur die Beobachtung mit der Libelle für die Erreichung von σ und i_3 anzustellen.

§. 62. Es wird nun gewiss nicht überflüssig sein, ein vollständiges Beipiel einer Nivellirung an unserem Passageinstrument vorzuführen, um die vorausgehenden Lehren in ihrer praktischen Anwendung noch genauer aufzufassen. Die Nivellirung geschah mit der im VI. Kapitel S. 252 erwähnten Hauptlibelle, wofür wir

$$\varphi = 2'',091$$

gefunden hatten.

Erste Frage: Sind die Zapfen unseres Passageinstruments genau cylindrisch?

Wie diese Frage mit Hilfe der Libelle beantwortet werden kann, ist schon Seite 281 u. f. angegeben worden; da aber die Abweichung der Zapfenform vom Cylinder an den verschiedenen Stellen jedenfalls nur sehr gering ist, so ist bei dieser Untersuchung die grösste Vorsicht nöthig und weiterhin selbstverständlich, dass nur eine ausgedehnte Beobachtungsreihe hier zu Zahlenwerthen führen kann, die Vertrauen erwecken. Man verfährt desshalb folgendermaassen. Nachdem die Libelle aufgesetzt ist, muss zunächst dafür Sorge getragen werden, dass sie möglichst nur in einer Stellung auf der Axe sitzen bleibt und, sobald das Fernrohr mit dem Axenkörper unter ihren Füssen gedreht wird, nicht selbst stärkere Drehungen um diesen Axenkörper mitmacht. Denn, da sich hierbei, wie wir sahen, der Seitenfehler der Libelle bemerklich macht, so wäre es denkbar, dass die kleinen Verstellungen der Blase von einem kleinen Reste des Seitenfehlers herrührten. Wie nun ein Drehen der Libelle zu verhindern ist, wird bei einem bestimmten Apparate nach einiger Ueberlegung sich erkennen lassen. Bei unserem Passageinstrument z. B. liegt oben über den Stützen je ein Messingplättchen, welches mit einem rectangulären Schlitze durchbrochen ist, durch den je ein Libellenfuss hindurch geht, und kann somit, wenn man diese Plättchen in gehöriger Stellung festschraubt, das Bewegen der Libelle um die Drehungsaxe in enge Grenzen eingeschlossen werden. Ist dies geschehen, so klebt man mit etwas Wachs einen Index von Zink oder Messing auf die nach dem Höhenkreis hin liegende Seite des Libellenkörpers, und biegt diesen Index so, dass sein Ende ein klein wenig über dem Rande des Höhenkreises liegt. Bringt man nun auf diesem Rande von 10^0 zu 10^0 eine Marke an, so kann ein einziger Beob-

achter die ganze Operation vollenden, während sonst ein zweiter vor dem Höhenkreis sitzen müsste, der die Einstellung von 10° zu 10° besorgte. Denn wollte jemand allein diese Operation abwechselnd vornehmen, so wäre zu fürchten, dass Temperaturstörungen einträten, die für sich schon eine Abweichung der Blase im Gefolge haben können. Selbstverständlich müssen diese Störungen aufs Sorgfältigste vermieden werden und darf die Untersuchung nur zu solchen Zeiten vorgenommen werden, in denen nicht eine einseitige Erwärmung durch die Sonne oder eine einseitige Abkühlung durch den Wind, der vielleicht durch Ritze und Oeffnungen Zutritt hat, stattfindet. Ausserdem ist aber absolut nöthig, dass die Drehung des Fernrohrs um seine Axe so geschieht, dass nicht ein plus des Drucks der Hand sich einer Hälfte der Axe zuwendet und wird man irgendwie im Stande sein, auch dieser Anforderung möglichst zu entsprechen, am besten vielleicht so, dass man am Gegengewicht einen Arm befestigt, der in der Mittelebene des Fernrohrs liegt.

Um eine einseitige Temperaturveränderung von Seiten des Beobachters zu vermeiden, wird man sich mitten vor der Libelle aufstellen und auch die Blase nahe in der Mitte zum Einstellen bringen. Bei unseren Beobachtungen z. B. wurde vermöge der einen Fusschraube des Instruments es immer so eingerichtet, dass das Westende der Blase ein wenig weiter von der Mitte ab lag wie das Ostende, so dass $(w-o)$ immer eine positive Zahl war. Unter Berücksichtigung dieser Vorsichtsmaassregeln wurde nun eine Beobachtungsreihe eröffnet, und wollen wir einen Theil derselben vollständig darstellen, die drei übrigen Theile aber blos dem Endresultat nach anführen und berücksichtigen. Bei der *KO* Stellung Objectiv nach Norden ergab sich bei viermaliger Repetition für die

Noniusstellung auf	320°	310°	300°	290°	280°	270°	260°
die Differenz $(w-o)$ gleich	1,8	2,4	2,2	1,8	2,1	1,4	1,2
„	1,2	1,9	2,0	1,7	1,6	1,1	0,8
„	1,5	1,5	1,9	1,7	1,7	0,9	1,0
„	1,5	1,6	1,7	1,5	1,5	1,0	0,9
Summe „	6,0	7,4	7,8	6,7	6,9	4,4	3,9

Giebt man der Vorstellung Raum: die Axe sei innerhalb der Grenzen, welche die betreffenden äussersten Nonienstellungen bei 320° und 260° bezeichnen, eine richtige, so würde statt der sieben Einzelsummen eine mittlere Summe gleich

$$\frac{43,1}{7} = 6,16$$

zum Vorschein gekommen sein und um diese mittlere Summe zu erreichen, müssten an die sieben Einzelsummen die Correctionen

+0,16; —1,24; —1,64; —0,54; —0,74; +1,76; +2,26
angebracht werden. Eine solche Beobachtung aus vier Einzelbeobachtungen bestehend, wurde nun 10mal wiederholt und stellen wir, um ein Urtheil über die Uebereinstimmung der Beobachtungen zu erhalten, die Correctionen zusammen:

KO Lage; Objectiv nach Norden.

Noniusstellung:	320°	310°	300°	290°	280°	270°	260°
Correctionen	+ 0,16	— 1,24	— 1,64	— 0,54	— 0,74	+ 1,76	+ 2,26
	+ 0,11	— 0,99	— 0,69	— 0,19	— 1,29	+ 1,41	+ 1,61
	— 0,54	— 2,34	— 1,74	+ 0,66	— 0,84	+ 2,16	+ 2,66
	— 0,76	— 1,66	— 1,96	+ 0,44	— 1,06	+ 1,14	+ 3,84
	— 0,41	— 1,51	— 1,81	— 0,21	— 0,71	+ 2,59	+ 2,09
	— 0,47	— 1,47	— 1,37	— 0,47	— 0,27	+ 1,63	+ 2,43
	— 0,41	— 1,61	— 1,81	— 0,81	— 0,21	+ 2,39	+ 2,49
	— 0,11	— 1,21	— 1,41	— 1,51	+ 0,09	+ 1,99	+ 2,19
	— 0,26	— 1,16	— 0,36	— 0,76	+ 0,34	+ 1,44	+ 0,74
	— 0,37	— 1,87	— 1,27	— 1,17	— 0,27	+ 2,43	+ 2,53
Summe	— 3,06	—15,06	—14,06	— 4,56	— 4,96	+ 18,94	+ 22,84
Mittel	— 0,31	— 1,51	— 1,41	— 0,46	— 0,50	+ 1,89	+ 2,28

Diese letzteren Mittelzahlen müssen aber, da erst $\frac{(w-o)}{2}$ den Stand der Blasenmitte angiebt, mit 2 dividirt werden und erhalten wir demnach die Correctionen in Scalentheilen ausgedrückt gleich

—0,15; —0,75; —0,70; —0,23; —0,25; + 0,94; + 1,14

so dass wenn wir z. B. den Nonius auf 280° eingestellt und die Mitte der Blase bei + 10,3 abgelesen hätten, wir eigentlich nicht 10,3 sondern 10,3 — 0,25 = 10,05 rechnen dürften.

In ähnlicher Weise erhielt man aus allemal 40 Einzelablesungen für die

KO Lage; Objectiv nach Süden

Noniusst. 40° 50° 60° 70° 80° 90° 100°
die Correctionen
$\frac{(w-o)}{2}$ .. —0,50; —0,38; +0,37; +0,48; +0,19; —0,02; —0,17

KW Lage; Objectiv nach Norden

Noniusst. 40° 50° 60° 70° 80° 90° 100°
Correction.: +0,95; +0,69; —0,35; —0,69; —0,41; —0,03; —0,16

KW Lage; Objectiv nach Süden

Noniusst. 320° 310° 300° 290° 280° 270° 260°
Correction.: —0,23; +0,16; +0,70; +0,22; +0,20; —0,43; —0,61

Der Grund, wesshalb auf diese Weise der Axenkörper nicht auch zwischen 320° bis 360° und zwischen 40° bis 0°, also innerhalb eines

Bogens von 80° nicht untersucht werden konnte, lag in dem Hinderniss, das der Körper der Libelle darbietet, insofern das Fernrohr an diesen etwas oberhalb der Noniusstellung 320° bzw. unterhalb 40° anstiess, ein Umstand, der es allein schon wünschenswerth erscheinen lässt, auch noch andere Methoden der Prüfung der Axenenden auf ihre Richtigkeit zu besitzen. Eine dieser Methoden verlangt die Anwendung eines

„Fühlhebelniveaus“

dessen Einrichtung darin besteht, dass in passender Weise ein Hebel mit den Stützen des Fernrohrs verbunden wird, der mit dem einen Ende entsprechend die Axe des Fernrohrs berührt, während das andere Ende eine Libelle trägt, deren Axe parallel dem Hebelarm liegt und deren Blase sich verschiebt, falls das, die Axe berührende, Hebelende wegen der Abweichung des Axendurchschnitts vom Kreise, sich bald etwas hebt, bald etwas senkt.

Wir werden später sehen, welchen Einfluss z. B. das Maximum der obigen Correctionen von 1,14 Scalentheilen oder $1{,}14 . 2'',091 = 2'',4$ auf die Zeitbestimmung ausüben kann und fragen nun

Zweitens sind die Enden der Axe gleich dick, d. h. ist der Fehler $i_2 = 0$? Da die Prüfung auf das Vorhandensein dieses Fehlers ein Umlegen des Instruments verlangt, so leuchtet ein, dass ausser der ungleichen Dicke der Zapfen auch noch etwas ganz Anderes eine Verstellung der Libellenblase zur Folge haben kann: nämlich die veränderte Massenvertheilung, die hierbei vielleicht eintreten und in beiden Lagen einen Unterschied des Drucks hervorrufen kann. Denn wäre der Druck wegen unvollkommener Balancirung des Höhenkreises etc. auf die beiden Stützen nicht gleich, lastete z. B. auf der östlichen Stütze ein merklich grösserer Druck, so würde dieser im Stande sein, die Blase ein wenig nach der Westseite hin zu verstellen und würde, wenn nunmehr die Umlage des Fernrohrs erfolgte, eine Verstellung nach der Ostseite hin stattfinden können derart, dass die gesammte Verschiebung der Blase, wenn wir einmal von der Verschiedenheit der Axendicken ganz absehen, wiederum dem doppelten Fehler, durch ungleiche Belastung hervorgerufen, entspräche. Sieht man sich aber diesen Umstand genauer an, so überzeugt man sich, dass wenn die Blase in der ersten Lage um n Theile nach Westen wanderte, sie nach der Umlage keineswegs auch immer um n Theile nach Osten zu gehen braucht. Denn es kommt hierbei noch weiter auf die Beschaffenheit der Stellen an, auf welchen die unteren Enden der Stützen ruhen. Bei unserem Instrumente z. B. steht jetzt die östliche Stütze, wenn das Fernrohr in der Meridianlage sich befindet, sehr nahe direct über einer Fusschraube, während die westliche in der Mitte zwischen den beiden

andern Fusschrauben auf dem Horizontalkreis aufruht. Die Folge hiervon wird nothwendig die sein, dass ein plus des Drucks auf die westliche Stütze ausgeübt, wegen der Biegung des Horizontalkreises einen stärkeren Ausschlag der Libelle nach Osten hervorruft als umgekehrt derselbe Ueberschuss des Drucks im Osten veranlassen würde.

Wie dem aber auch sei: es leuchtet ein, dass die Ungleichheit der Axendicken in Verbindung mit der Verschiedenheit der Lasten, die auf den Stützen ruhen, einen resultirenden Fehler bedingen, der sich beim Umlegen wird erkennen lassen, und der, wenn er hierbei wirklich sich anmeldet, auch als von einer Ungleichheit der Zapfen allein herrührend betrachtet werden darf, welche dann selbstverständlich als eine etwas andere gefunden wird, als wenn man auch den Antheil der Druckdifferenz für sich allein festzustellen im Stande wäre.

Eine Prüfung unseres Instrumentes im Mai 1874 ergab nun Folgendes:

KO		*KW*	
w_0	o_0	w_2	o_2
22,2	15,2	21,8	14,7
22,5	14,0	21,2	14,9
20,8	14,6	21,3	14,6
21,4	12,0	21,3	12,0
18,0	15,0	19,1	13,7
20,3	12,2	20,2	12,2
19,2	13,2	19,8	12,2
19,8	12,2	20,3	11,5
19,8	12,0	19,4	11,7
20,5	11,6	20,0	11,6

mithin

$w_0 - o_0$	$w_2 - o_2$	Diff.
7,0	7,1	−0,1
8,5	6,3	+2,2
6,2	6,7	−0,5
9,4	9,3	+0,1
3,0	5,4	−2,4
8,1	8,0	+0,1
6,0	7,6	−1,6
7,6	8,8	−1,2
7,8	7,7	+0,1
8,9	8,4	+0,5

$$\text{Mittel} = -\frac{2,8}{10}$$

und wäre gemäss der Gleichung (3)

$$i_2 = -\frac{0,28}{4} 2'',091 = -0'',15$$

welchen Fehler wir als nahezu Null vernachlässigen können.

Drittens: Sind die Stützen des Fernrohrs gleich hoch d. h. wie verhält es sich mit dem Fehler i_3?

Zur Prüfung auf diesen Fehler wurde die Libelle aufgesetzt und w_0 und o_0 abgelesen, sodann die Libelle und das Fernrohr abgehoben, die Alhidade um 180^0 umgedreht, Fernrohr und Libelle wieder aufgesetzt und w_3 und o_3 abgelesen. Bei fünf Ablesungen ergab sich:

w_0	o_0	w_3	o_3	$w_0 - o_0$	$w_3 - o_3$
18,8	20,6	16,6	22,4	— 1,8	— 5,8
19,5	19,0	16,0	22,2	+ 0,5	— 6,2
19,0	19,0	16,0	22,0	0,0	— 6,0
19,8	18,0	16,3	21,0	+ 1,8	— 4,7
18,8	17,6	16,2	21,0	+ 1,2	— 4,8
				+ 1,7	—27,5

und ist demgemäss die dem Fehler i_3 entsprechende Anzahl Scalentheile der Libelle gleich

$$\frac{(+1,7)-(-27,5)}{5.4} = +\frac{29,2}{20} = +1,4$$

und der Fehler i_3 selbst gleich

$$i_3 = +1,4 . 2'',091 = +2'',9.$$

Dieser Werth + 1,4 bewies, dass diejenige Stütze, die beim Anfang der Einstellung als wir $w_0 = 18,8$ und $o_0 = 20,6$ ablasen im Westen stand, zu hoch war. Um daher den Fehler i_3 wegzuschaffen, wurde diese Stütze, an welcher auch die betr. Correctionsschrauben für das Axenlager sich befanden, so verändert, dass die Libellenblase um 1,4 Scalentheile nach Osten zurückgieng und hierauf wieder eine Beobachtung gemacht. Sie ergab:

w_0	o_0	w_3	o_3	$w_0 - o_0$	$w_3 - o_3$
18,0	17,4	19,2	15,0	+ 0,6	+ 4,2
18,6	17,5	19,5	14,5	+ 1,1	+ 5,0
				+ 1,7	+ 9,2

so dass der Fehler in Scalentheilen jetzt gleich

$$\frac{(+1,7)-(+9,2)}{2.4} = -\frac{7,5}{8} = -0,94$$

und

$$i_3 = -0,94 . 2'',091 = -1'',9$$

war, wobei man sich vorläufig beruhigte.

§. 63. Zu den mechanischen Fehlern eines Passageinstruments gehören auch die Theilungsfehler der Kreise, des Horizontal- und Verticalkreises. Da jedoch unser Apparat hauptsächlich bloss in einer Lage zur Anwendung kommt, so können wir den Horizontalkreis ausser Acht lassen und nur den Verticalkreis betrachten; aber auch hier beschränken wir uns nur auf einen Fehler: nämlich den sogenannten Indexfehler und lassen die Theilung des Kreises an sich ausser Acht. Zugleich knüpfen wir hieran weitere Bemerkungen, die für das Folgende von praktischer Bedeutung sind. Um zu erkennen, ob ein Indexfehler vorhanden ist, sucht man sich in der Umgegend einen Gegenstand aus, der mit dem Fernrohr scharf gesehen werden kann, und wozu sich vielleicht recht gut ein Thurm mit einer daran anzubringenden Marke, insbesondere auch geradezu das Ende einer Windfahne oder einer Blitzableiterstange eignet. Wird ein solcher Gegenstand im Fernrohr eingestellt, so kann er in zwei verschiedenen Stellungen des Apparats erblickt werden, nämlich: in einer Lage U_1 und in einer zweiten Lage U_2, bei der man die Alhidade mit dem Fernrohr um 180° umgedreht und letzteres wieder auf den Gegenstand gerichtet hat. Nehmen wir die Lage U_1 dann an, wenn die Ablesung $v_,$ am Höhenkreise zwischen 0° und 180° fällt, so fällt die Ablesung $v_{,,}$ bei der Lage U_2 zwischen 180° und 360°, und will man nur Zenithdistanzen zwischen 0° und 180° zulassen, so wäre, wenn wir die, der Ablesung $v_,$ und $v_{,,}$ entsprechenden, Zenithdistanzen mit $z_,$ und $z_{,,}$ bezeichnen, bei der Lage U_1

$$z_, = v_,$$

bei der Lage U_2 aber

$$z_{,,} = 360^0 - v_{,,}.$$

Ist nun kein Indexfehler vorhanden, so muss

$$z_, = z_{,,}$$

oder

$$(v_, + v_{,,}) = 360^0$$

sein, d. h. die Ablesungen müssen sich zu 360° ergänzen. Ist aber ein positiver Indexfehler vorhanden, den wir dann annehmen, wenn der Nullpunkt des Nonius im Sinne der Theilung des Höhenkreises um den Winkel $\varDelta v$ verschoben ist, so erhält man natürlich eine um $\varDelta v$ zu grosse Ablesung $v_,$ und $v_{,,}$, d. h. die richtigen Zenithdistanzen wären:

$$z_, = v_, - \varDelta v$$

$$z_{,,} = 360^0 - (v_{,,} - \varDelta v)$$

und bestände, da $z_, = z_{,,}$ sein muss, die Gleichung

$$v_, - \varDelta v = 360^0 - (v_{,,} - \varDelta v)$$

d. h.

$$2(\varDelta v) = (v_, + v_{,,}) - 360^0$$

oder

$$\varDelta v = \frac{(v_{,} + v_{,,}) - 360^0}{2} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Fiele dieser Werth negativ aus, so wäre selbstverständlich der Nullpunkt des Nonius in einem der Theilung entgegengesetzten Sinne verschoben. Hiernach ist es einleuchtend, dass ein solcher Fehler durch eine kleine Verstellung der Noniusplatten J Fig. 57 oder wenn man will auch durch eine kleine Drehung des Höhenkreises verbessert werden kann. Die Prüfung für beide Nonien muss getrennt stattfinden.

Aus den Gleichungen für $z_{,}$ und $z_{,,}$ erkennt man indess, dass bei ihrer Addition $\varDelta v$ wegfällt, d. h. dass wenn man eine Beobachtung in beiden Lagen vornimmt, man den Indexfehler gar nicht zu wissen braucht und das gesuchte z gleich

$$z = \frac{360^0 + (v_{,} - v_{,,})}{2} = 180 + \frac{v_{,} - v_{,,}}{2} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

ist.

Beispiel. Am 31. Juli 1873 wurde das Passageinstrument auf die Spitze des Blitzableiters am südlichen Thurm (mit dem Reiter) der Elisabethkirche gerichtet und ergab sich

Nonius I. Lage U_2 . . . . $v_{,,} = 272^0\ 36'\ 0''$

„ U_1 . . . . $v_{,} = 87\ 15\ 30$;

mithin war

$$\varDelta v_1 = \frac{359^0\ 51'\ 30'' - 360^0}{2} = -\frac{8'\ 30''}{2} = -4'\ 15'';$$

ferner

Nonius II. Lage U_2 . . . . $v_{,,} = 272^0\ 32'\ 0''$

„ U_1 . . . . $v_{,} = 87\ 12\ 0$

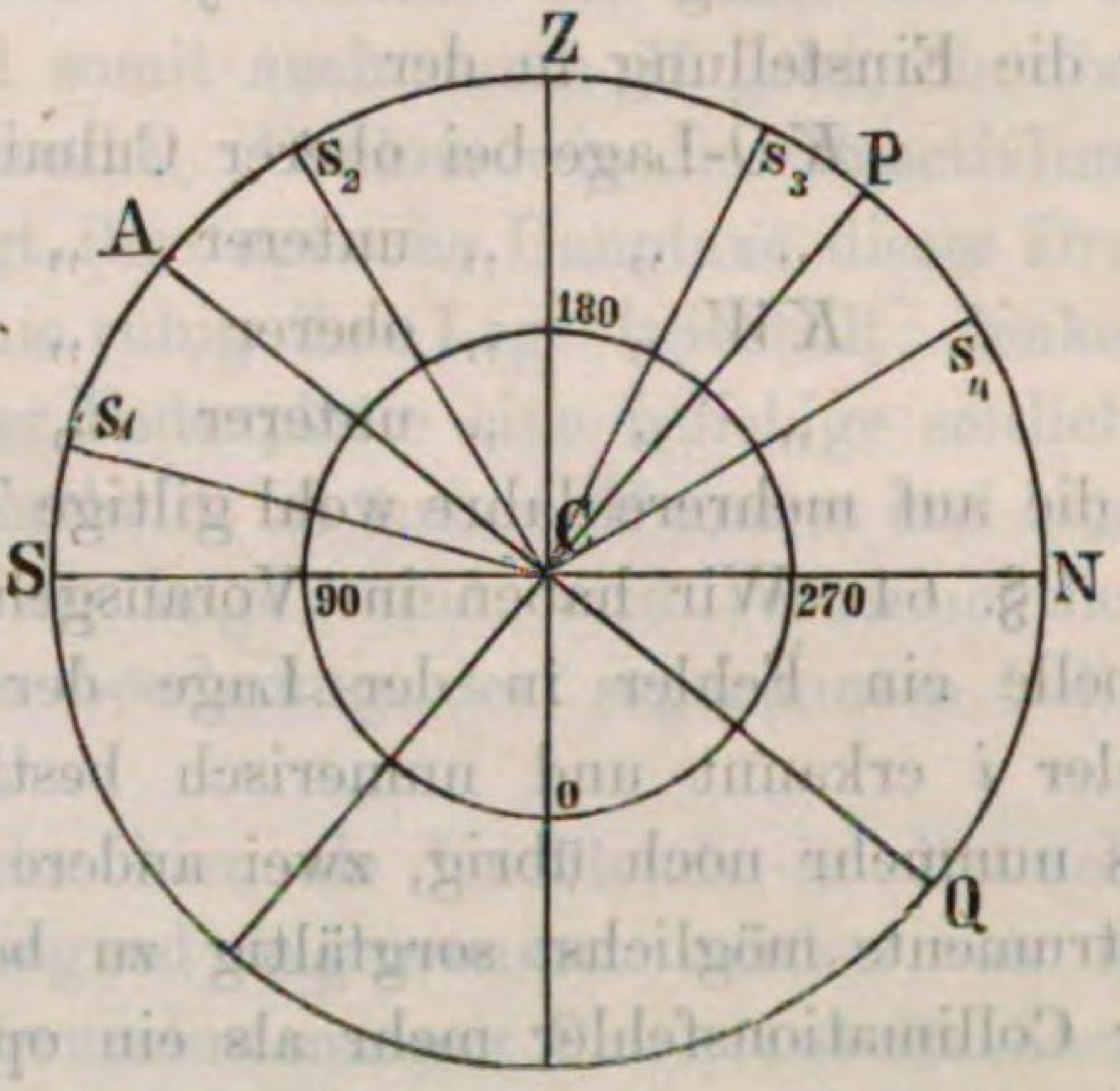
und war

$$\varDelta v_2 = \frac{359^0\ 44'\ 0'' - 360^0}{2} = -\frac{16'}{2} = -8'.$$

Wollte man demnach diese Fehler verbessern, so musste man an den Schräubchen, zwischen denen die Noniusplatten J gehalten werden, so wirken, dass der Nullpunkt des Nonius I um 4′ 15″ im Sinne der Theilung und beim Nonius II um 8′ in gleichem Sinne sich verschob. Bei letzterem Nonius wurde diese Correctur vorgenommen, bei ersterem blieb die fehlerhafte Stellung bestehen und muss demnach, wenn eine Zenithdistanz z gegeben ist, nicht z sondern $v_{,} = z - 4'\ 15''$ bzw. $v_{,,} = 360^0 - (z - 4'\ 15'')$ eingestellt werden und umgekehrt, wenn mit dem Höhenkreis eine Einstellung gleich $v_{,}$ sich ergeben hat, das betreffende $z = v_{,} + 4'\ 15''$ bzw. $z = 360^0 - (v_{,,} + 4'\ 15'')$ genommen werden. Die richtige Nullstellung des Höhenkreises findet daher statt, wenn der Punkt $360^0 - 4'\ 15'' = 359^0\ 55'\ 45''$ mit dem Nullpunkt des Nonius coincidirt.

Meistens hat man aber nicht nach gegebenen Zenithdistanzen, sondern nach einer gegebenen Declination oder Höhe auf einen Gegenstand einzustellen. Da letztere die Zenithdistanz zu 90^0 ergänzt, so wird man, wenn die Höhe h gegeben ist, auf $z = 90^0 - h$ einzustellen haben. Für ein negatives h wird $z = 90^0 + h$ einzustellen sein. Für den Fall aber, dass bei der Meridianlage des Fernrohrs Declinationen gegeben sind, beachte man die Figur 62. In ihr bedeute bei der KO-Lage SN den Horizont, CP die Richtung nach dem Pol, AQ den Aequator, mithin $\sphericalangle PCN = \varphi$ die Polhöhe und $ACS = q$ die Aequatorhöhe. Bei der oberen Culmination gehen die Sterne auf dem Bogen zwischen S über Z bis P, bei der unteren zwischen P und N durch. Ist demnach bei der oberen Culmination die Declination δ eines Gestirns s_1 negativ, so ist ein

Fig. 62.



$$v_1 = \sphericalangle ACZ + \delta = \varphi + \delta;$$

einzustellen; liegt δ für ein Gestirn s_2 zwischen 0^0 und $+\varphi$, d. h. geht das Gestirn bei der oberen Culmination zwischen A und Z durch den Meridian, so ist

$$v_2 = \varphi - \delta;$$

liegt δ für einen Stern s_3 zwischen $+\varphi$ und 90^0, so ist

$$v_3 = 360^0 - (\delta - \varphi).$$

Bei der unteren Culmination gehen blos Sterne durch den Meridian, deren Declination zwischen $\delta = +q$ und $\delta = 90^0$ liegt und ist für ein Gestirn s_4

$$v_4 = 360^0 - \sphericalangle ZCs_4$$

oder da

$$\sphericalangle ZCs_4 = 90^0 + q - \delta = 90^0 + 90 - \varphi - \delta$$

$$v_4 = 180^0 + \varphi + \delta$$

einzustellen.

Müsste auf einen Stern in der KW-Lage eingestellt werden, so würde in diesen vier Fällen die Einstellung erhalten, wenn man die für KO von 360^0 abzieht, nämlich

$$v'_1 = 360^0 - (\varphi + \delta)$$

$$v'_2 = 360^0 - (\varphi - \delta)$$

$$v'_3 = \delta - \varphi$$
$$v'_4 = 180^0 - (\varphi + \delta)$$

Das häufig vorkommende Berechnen dieser Werthe insbesondere für Fixsternbeobachtungen macht es wünschenswerth, eine Tabelle zu besitzen, auf der man sofort neben dem Namen des betreffenden Fixsterns die Einstellung für *KO* und *KW* verzeichnet finde und würde z. B. für Marburg bei ι Urs. maj. dessen δ im J. 1870 + 48° 34′ war, für die Einstellung in der

KO-Lage bei oberer Culmin.	v_2 =	2°	16′
„ „ „ unterer „	v_4 =	279	22
KW „ „ oberer „	v'_2 =	357	44
„ „ „ unterer „	v'_4 =	80	38

in die auf mehrere Jahre wohl giltige Tabelle einzutragen gewesen sein.

§. 64. Wir haben im Vorausgehenden gesehen, wie mittelst der Libelle ein Fehler in der Lage der Axe, nämlich der Neigungsfehler i erkannt und numerisch bestimmt werden kann. Es bleibt uns nunmehr noch übrig, zwei andere bedeutsame Fehler des Passageinstruments möglichst sorgfältig zu betrachten, von denen der eine: der Collimationsfehler mehr als ein optischer Fehler, der andere: der Azimuthalfehler als ein Fehler in der Aufstellung des Instruments angesehen werden muss. Indem wir zuerst dem

„Collimationsfehler“

unsere Aufmerksamkeit schenken, werden wir hierbei weitere Bemerkungen einfliessen lassen, die wir bis daher zu machen unterlassen haben. Es wird jedoch gut sein, bei der nun folgenden Auseinandersetzung zunächst nicht von dem gebrochenen, sondern vom geraden Fernrohr auszugehen, da dies ja auch ohne weiteres von uns benutzt werden könnte.

Bezeichnen wir demgemäss mit M die Mitte *) der Objectivlinse eines Fernrohrs, mit m dagegen die fragliche Mitte der Fadenplatte, so muss zunächst erwähnt werden, dass man die Verbindungslinie dieser beiden Mitten M und m die „Collimationslinie“ zu nennen pflegt, und muss weiter einem etwaigen Irrthume begegnet werden, der darin besteht, als verstände man unter der Collimationslinie die Verbindungslinie der Mitte M mit der Mitte der Ocularlinse. Letztere hat bei dem jetzt zu betrachtenden Collimationsfehler und auch beim Azimuthalfebler gar Nichts mitzureden und spielt lediglich die Rolle einer Lupe, die man auch einfach zur Beobachtung des Gesichtsfelds

*) Bei unseren jetzigen Betrachtungen sehen wir von der Dicke der Linsen ab und ist desshalb unter Mitte der Linse jeder Punkt, der zwischen den beiden Scheiteln derselben liegt, oder auch gerade zu einer dieser Scheitel selbst zu verstehen.

in die Hand nehmen könnte, wenn man es der Bequemlichkeit und Sicherheit wegen nicht vorzöge, sie fest mit dem Ganzen zu verbinden. Ob also die Mitte der Ocularlinse zugleich in die Collimationslinie fällt oder nicht, ist für jetzt ganz gleichgiltig.

Fernerhin muss auf den Unterschied zwischen der „optischen Hauptaxe des Objectivs" und der Collimationslinie hingewiesen werden *). Unter ersterer verstehen wir nämlich die Linie, die durch die beiden Scheitel der Linse und somit auch durch M geht, die aber nicht auch durch m zu laufen braucht. Denken wir die Objectivlinse um M beliebig gedreht, so folgt ihre optische Hauptaxe dieser Drehung, während die Collimationslinie ruhig ihre Lage beibehält; denken wir aber der Objectivlinse oder der Fadenplatte eine beliebige seitliche Progressivverschiebung ertheilt, so ändert M und m und hiermit auch die Collimationslinie ihre Lage, und wird voraussichtlich mit dieser Aenderung auch eine Aenderung des sogenannten Collimationsfehlers verbunden sein.

Da alle Gegenstände, welche hier als leuchtende in Betracht kommen, in unendlicher Ferne liegend angenommen werden, so ist klar, dass wir es ausserhalb des Fernrohrs nur mit Parallel-Strahlenbündeln zu thun haben, die nach dem Durchgange durchs Objectiv in seiner Brennebene ihre Convergenzpunkte haben, und dass folglich ein Stern in der Culmination begriffen ist, wenn ein Theil der von ihm ausgehenden Strahlen seinen Lauf parallel zur Meridianebene aufs Objectiv nimmt. Unter der „Meridianebene" dürften wir nun, da die Dimensionen des Instruments gegenüber den Entfernungen der Gegenstände als verschwindend klein anzusehen sind, jede Ebene verstehen, die senkrecht zur ost-westlichen Drehungsaxe PQ verliefe, jedoch lassen wir im Folgenden diese Benennung nur für diejenige Ebene gelten, die durch M geht und zugleich senkrecht auf PQ steht. Käme das Fernrohr in einer anderen Lage als in der Meridianlage zur Anwendung, so würde die Benennung: „Meridianebene" nicht passen und werden wir statt dessen auch den Ausdruck: „Axennormalebene" gebrauchen, welche Ebene bei der Meridianlage einerlei mit der Meridianebene ist. Bevor wir aber näher auf die Lage der Collimationslinie bzw. des Punktes m eingehen, müssen wir sehen, in welchem Abstande von dem Objectiv einerseits und vom Ocular andererseits die Fadenplatte angebracht werden muss. Da das Fadenkreuz

*) Im Gegensatze zur optischen Hauptaxe des Objectivs, die blos einmal vorhanden ist, werden wir auch von optischen Axen schlechthin reden, und verstehen darunter jede Gerade, die durch M geht uns daran erinnernd, dass der Bildpunkt eines leuchtenden Gegenstandes auf der jedesmaligen optischen Axe liegt, die von ihm durch M gezogen und gehörig verlängert gedacht werden muss.

nur durch die Ocularlinse hin sein Licht ins Auge sendet, so leuchtet ein, dass das deutliche Erscheinen des Fadenkreuzes nur von der Entfernung der Ocularlinse von ihm abhängt, und wird die Einstellung, die diese Deutlichkeit erzielen soll und die wir die

„Einstellung der Ocularlinse“

nennen wollen, einfach dadurch erreicht, dass man das Ocularrohr mit der Fadenplatte von der Axe n Fig. 56 abnimmt, nach einer hellen Gegend hält und zusieht, ob dem Auge das Fadenkreuz in grösstmöglichster Schärfe sich zeigt, oder ob man das Ocular r im Rohre m ein wenig herein oder herausschieben muss, um jene zu erreichen: eine Operation, die also ganz identisch ist mit der Auffindung der richtigen Entfernung einer gewöhnlichen Lupe von einem davor befindlichen Gegenstande, der dem Auge möglichst deutlich werden soll.

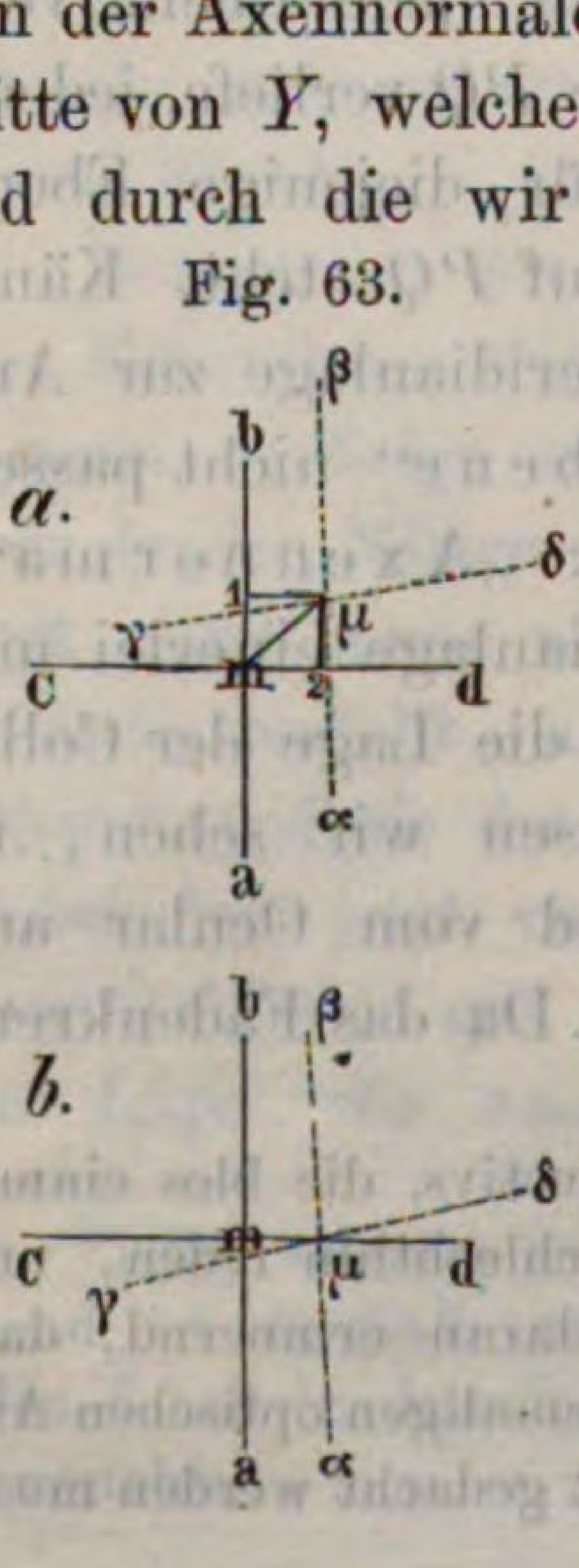
Ist dies erreicht und das Ocularrohr wieder aufgesetzt, so wird eine zweite einfache Operation nöthig, die wir die

„Focalstellung der Fadenplatte“

nennen wollen und die darin besteht, dass die Fadenplatte, ohne dass sich ihre Stellung gegenüber der Ocularlinse ändert, mit dieser gemeinschaftlich so auf der Axe im einen oder anderen Sinne progressiv verschoben wird, bis sie in die Brennebene des Objectivs gelangt. Man begreift aber sofort, dass diese Stellung erreicht ist, wenn auch das Bild eines möglichst weit entfernten Gegenstandes, das ja immer in die Brennebene des Objectivs fällt, die bereits erreichte Deutlichkeit der Fadenplatte angenommen hat.

Denken wir nun die soweit festgelegte Ebene der Fadenplatte von der Axennormalebene in einer Geraden Y durchschnitten, so ist die Mitte von Y, welche wir möglichst nur nach dem Augenmaasse nehmen, und durch die wir eine zweite Gerade X senkrecht zu Y legen, für uns zunächst der richtig gelegene Punkt m.

Fig. 63.



Fällt ausserdem noch der Verticalfaden des Fernrohrs mit Y, der Horizontalfaden mit X zusammen, so ist der Kreuzungspunkt dieser Fäden identisch mit dem richtig gelegenen Punkte m und würde, wenn in Fig. 63, a die Geraden ab und cd diesen Bedingungen genügten, ihr Durchschnitt m die richtige Lage haben, während umgekehrt, wenn die beiden Fäden des Fadenkreuzes wie $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ lägen, ein falscher Kreuzungspunkt μ zu Stande käme. Dies letztere vorläufig einmal zugegeben können wir einen Collimationsfehler dadurch entstanden denken, dass das Fadenkreuz progressiv von m nach μ

seitlich verschoben ist. Denn diese Verschiebung allein ist es, die die Lage der Collimationslinie Mm in die fehlerhafte Lage $M\mu$ bringt. Ausserdem kann aber das Fadenkreuz selbst, ohne dass der Punkt μ seine Lage ändert, noch zwei Fehler haben, indem es einmal um μ gedreht erscheint, wobei weder der Horizontal- noch der Verticalfaden den betreffenden Durchschnitten X und Y parallel ist; sodann aber wäre es auch denkbar, dass die beiden Fäden nicht senkrecht auf einander ständen, sondern einen von einem rechten Winkel abweichenden Winkel $\beta\mu\delta$ mit einander bildeten. Wir wollen diese beiden letzteren Fehler des Fadenkreuzes den

„Parallelstandsfehler"

und den

„Winkelfehler"

nennen, während wir die Verstellung der Fäden, die schliesslich den Collimationsfehler veranlasst, zunächst aber nicht damit identisch ist, den

„Coincidenzfehler"

des Fadenkreuzes nennen wollen, um anzudeuten, dass der Kreuzungspunkt der Fäden nicht mit dem richtig gelegenen Punkte m coincidirt. Fällen wir ausserdem vom Punkte μ ein Perpendikel $\mu 1$ auf ab und ein Perpendikel $\mu 2$ auf cd, so können wir diese Perpendikel füglich als die

„Horizontal- und Verticalcomponente"

des Coincidenzfehlers der Fadenplatte ansehen.

Vor allem ist es nun nothwendig, sich eine Vorstellung von der Bedeutung der Verticalcomponente zu verschaffen. Richten wir zu dem Ende das Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand G und stellen diesen auf den Kreuzungspunkt m ein, so hat die Gerade GMm eine bestimmte Lage im Raume und bildet mit der Richtung nach dem Zenith den Winkel z, der gleich der richtigen Zenithdistanz des Punktes G ist. Läsen wir dann den Nonius am Höhenkreise ab und fänden auch hierbei den Winkel z, so wäre die Sache in Ordnung; denn wir hätten eine in Wirklichkeit bestehende Zenithdistanz z auch als z gefunden. Nun können wir diesen richtigen Zustand ändern, wenn wir das Fadenkreuz zwar lassen wie es ist, aber die Noniusplatte progressiv um Δz verschieben. Hierbei wird weder die Lage des Fernrohrs noch auch die Gerade GMm geändert, aber wir lesen anstatt $z, = z$ ein $z + \Delta z$ ab. Um zu erkennen, ob dieser Fehler der Noniusstellung in einem gegebenen Falle wirklich existirt, verfahren wir einfach nach den Regeln des §. 63, indem wir das Fernrohr um seine Verticalaxe umdrehen, wieder den Punkt m auf G richten und den Höhenkreis ablesen. Ergiebt sich hierbei anstatt $z,$ ein $z_{,,}$, so ist nach §. 63 $2\Delta z = (z, - z_{,,})$ der doppelte Indexfehler. Denken wir statt dessen den ursprünglich richtigen Zustand wieder hergestellt, so können wir zweitens anstatt den

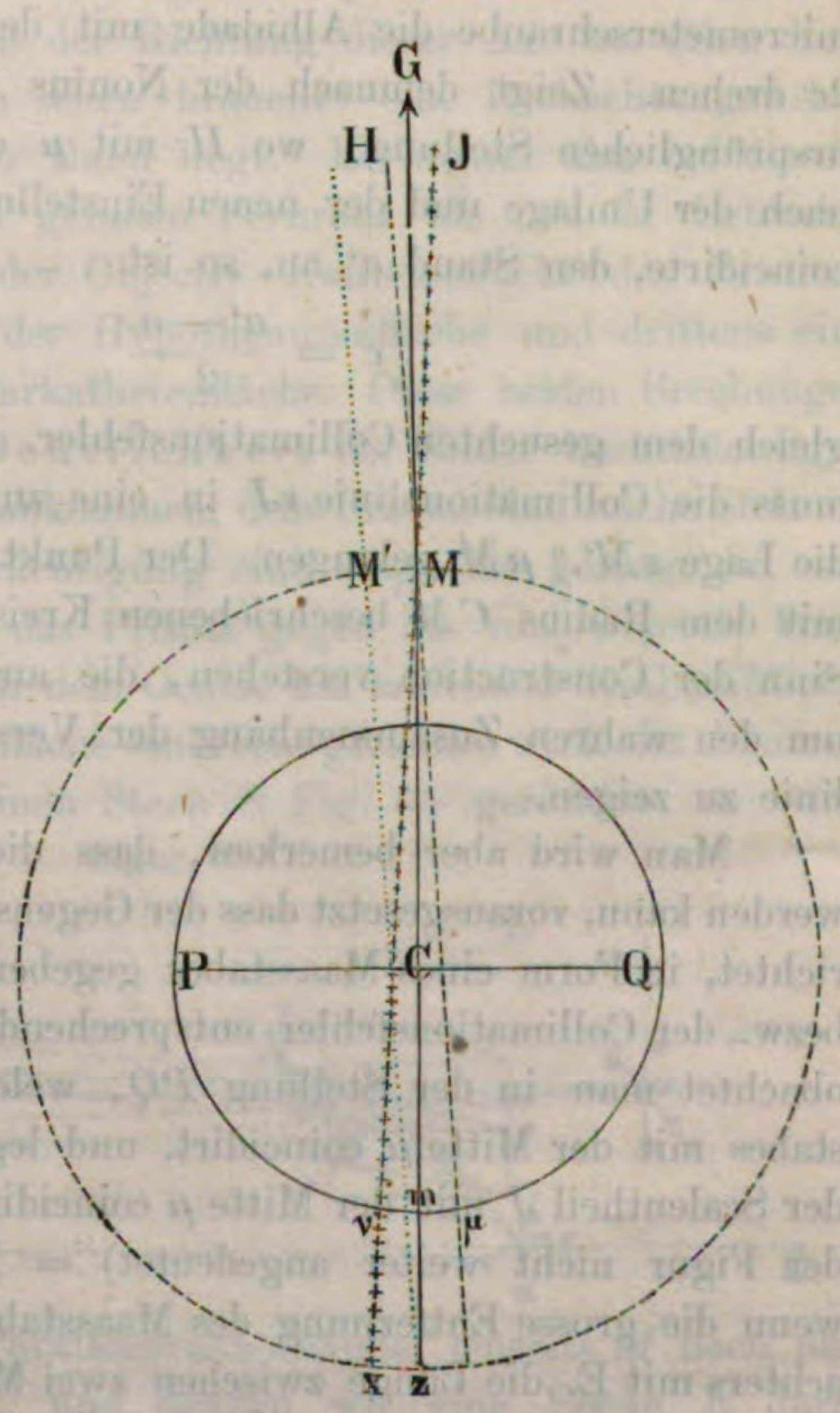
Nonius zu verstellen, aber auch das Fadenkreuz im Sinne der Verticalcomponente des Coincidenzfehlers verschieben. Geschieht dies, so fällt das Bild von G nicht mehr auf m, sondern auf den Punkt 1 und bringen wir es mit m in Coincidenz, so verstellen wir das Fernrohr, und lesen nun anstatt z wegen der Verschiebung des Fadenkreuzes ein $z + \Delta z'$ und wenn wir auch jetzt das Fernrohr um 180° um seine Axe drehen und wieder auf G richten, anstatt $z + \Delta z'$ ein $z - \Delta z'$ ab.

Daraus folgt aber, dass die Verticalcomponente $m1$ Fig. 63, *a* identische Folgen hat, wie der im §. 63 betrachtete Indexfehler, dass mithin geradezu ein solcher Fehler in der Stellung der Fadenplatte als ein Indexfehler des Höhenkreises aufgefasst werden kann, und mit der Beseitigung des letzteren unschädlich gemacht wird. Ebenso leuchtet ein, dass auch ein vorhandener Indexfehler des Höhenkreises umgekehrt durch eine Verschiebung der Fadenplatte im Sinne unserer Verticalcomponente compensirt werden kann. Denn lesen wir wegen einer falschen Noniusstellung anstatt z ein $z + \Delta z$ ab und verschieben entsprechend das Fadenkreuz, so werden wir, wenn das Fernrohr nunmehr wiederum von Neuem mit seiner Mitte auf G gerichtet wird, anstatt $z + \Delta z$ ein z ablesen. Da nun der Indexfehler wie eine Verticalverschiebung des Fadenkreuzes wirkt und mit dieser Verschiebung des Fadenkreuzes auch die Collimationslinie sich ändert, so begreift es sich, wesshalb man auch den Indexfehler beim Höhenkreis mit dem Namen Collimationsfehler zu bezeichnen pflegt. Hiernach wird es auch klar sein, wesshalb wir auf der Geraden Y nur dem Augenscheine nach die richtige Lage von m zu suchen brauchten. Denn es kommt gar nicht darauf an, ob der Punkt m ein wenig so oder so auf Y verschoben wird, weil schliesslich die hierdurch herbeigeführte Abweichung in der Winkelmessung einfach als ein Indexfehler sich vorfindet, mit diesem weggeschafft bzw. erkannt und in Rechnung gezogen werden kann. Dass man dem Augenscheine nach aber möglichst die Mitte von Y wählt, um hierdurch den Faden X zu legen, d. h. den Horizontalmittelfaden möglichst durchs Centrum des ganzen Gesichtsfelds gehen lässt, bedarf keiner besonderen Rechtfertigung. Hiernach können wir die Verticalcomponente auch geradezu als Null ansehen, d. h. nunmehr ein Fadenkreuz, wie in Fig. 63, *b* mit den sonst noch übrig bleibenden Fehlern voraussetzen.

Zunächst wollen wir eine einfache Methode anführen, den Verticalfaden $\alpha\beta$ eventuell als nicht vertical erkennen und diese fehlerhafte Lage verbessern zu können. Man richtet zu dem Ende das Fernrohr auf einen entfernten markirten Punkt G, bringt μ mit diesem in Coincidenz und lässt mittelst Bewegung an der Höhencorrections-

schraube das Bild von G den Faden $\alpha\beta$ durchlaufen; bleibt das Bild mit dem Faden zusammen, so liegt $\alpha\beta$ richtig vertical, wo nicht, so muss die Fadenplatte eine Drehung um μ erhalten, worüber hernach das Nöthige mitgetheilt werden soll. Hierauf bringt man das Bild des Punktes G wieder mit μ zusammen und lässt nunmehr durch Drehen an der Horizontalmicrometerschraube das Bild über den Faden $\gamma\delta$ hinlaufen. Bleibt es hierbei mit diesem in Coincidenz, so bildet $\gamma\delta$ mit $\alpha\beta$ einen rechten Winkel und liegt somit $\gamma\delta$ auch der Richtung nach richtig. Weicht das Bild aber von $\gamma\delta$ ab, so kann, falls das Fadenkreuz aus Spinnefäden gebildet ist, eine Correction des Fadens vorgenommen werden; besteht dagegen das Fadenkreuz aus Strichen, die vom Mechanikus auf Glas aufgerissen sind, so kann selbstverständlich dieser Fehler an der Platte nicht verbessert werden, ein Umstand, der verlangt, dass der betreffende Mechaniker selbst schon dafür sorgt, dass die beiden Striche auch möglichst genau zu einander senkrecht sind.

Fig. 64.



Hiermit wäre sowohl der Parallelstands- wie der Winkelfehler des Fadenkreuzes beseitigt und der Fehler $m2$, also das, was wir oben als Horizontalcomponente des Coincidenzfehlers ansahen, noch allein übrig und da hiervon das, was wir jetzt als Collimationsfehler im engeren Sinne aufzufassen haben, abhängt, so müssen wir zunächst sehen, wie man das Vorhandensein desselben constatirt. Denken wir, Fig. 64, das Fernrohr auf einen möglichst entfernten im Horizont gelegenen Gegenstand G gerichtet, so dass sein Bild im Mittelfaden desselben erscheint, so wird, wenn kein Coincidenzfehler vorhanden ist, GMm die Collimationslinie und PQ die zu derselben senkrechte hori-

zontale Drehungsaxe sein. Ist aber im Sinne der Figur 63 ein Coincidenzfehler da, so wird die Collimationslinie die Lage $M2$ haben, und das Fernrohr zeigt im Kreuzungspunkte μ der Fäden anstatt G einen Gegenstand H. Um dieses fehlerhafte Verhalten zu constatiren, legen wir das Fernrohr in seinem Lager um, so dass P an die Stelle von Q und umgekehrt gelangt. Denn da hierbei auch μ an die Stelle von ν kommt, so wird jetzt anstatt H ein Gegenstand J mit dem Kreuzungspunkte der Fäden coincidiren, und eben dieser Umstand beweist das Vorhandensein des Coincidenzfehlers nämlich der linearen Abweichung des Punktes μ von m als Quelle des eigentlichen Collimationsfehlers nämlich des Winkels $c = \sphericalangle mM\mu = mM\nu$. Beim Umlegen tritt demnach eine Verstellung der Collimationslinie $M\mu$ um den doppelten Collimationsfehler c ein und ist es leicht, nachdem das Vorhandensein des Fehlers constatirt ist, ihn nun auch numerisch zu bestimmen. Denn um nach der Umlage des Fernrohrs anstatt J wieder den ursprünglichen Gegenstand H mit dem Kreuzungspunkte zur Coincidenz zu bringen, müssen wir mittelst der Horizontalmicrometerschraube die Alhidade mit dem Fernrohr um den Winkel $2c$ drehen. Zeigt demnach der Nonius des Horizontalkreises bei der ursprünglichen Stellung, wo H mit μ coincidirte, den Stand a und nach der Umlage und der neuen Einstellung, wo wiederum H mit $\mu(\nu)$ coincidirte, den Stand a' an, so ist

$$c = \frac{a' - a}{2}$$

gleich dem gesuchten Collimationsfehler. Bei dieser neuen Einstellung muss die Collimationslinie νJ in eine zu μH parallele Lage, also in die Lage $zM' \parallel \mu M$ gelangen. Der Punkt z aber liegt auf einem um C mit dem Radius CM beschriebenen Kreise, und wird man sofort den Sinn der Construction verstehen, die anzudeuten wir für gut hielten, um den wahren Zusammenhang der Verschiebungen der Collimationslinie zu zeigen.

Man wird aber bemerken, dass die Operation noch vereinfacht werden kann, vorausgesetzt dass der Gegenstand, worauf man das Fernrohr richtet, in Form eines Maasstabes gegeben und dieser hinreichend lang bezw. der Collimationsfehler entsprechend klein ist. Zu dem Ende beobachtet man in der Stellung PQ, welcher Theilstrich H des Maasstabes mit der Mitte μ coincidirt, und legt das Fernrohr um. Da jetzt der Scalentheil J mit der Mitte μ coincidirt, so ist der Winkel HCJ (in der Figur nicht weiter angedeutet) $= HMJ$ gleich $2c$, d. h. es ist, wenn die grosse Entfernung des Maasstabes vom Standpunkte des Beobachters mit E, die Länge zwischen zwei Maasstabsstrichen mit l und die zwischen H und J liegende Zahl solcher Längen mit n bezeichnet wird:

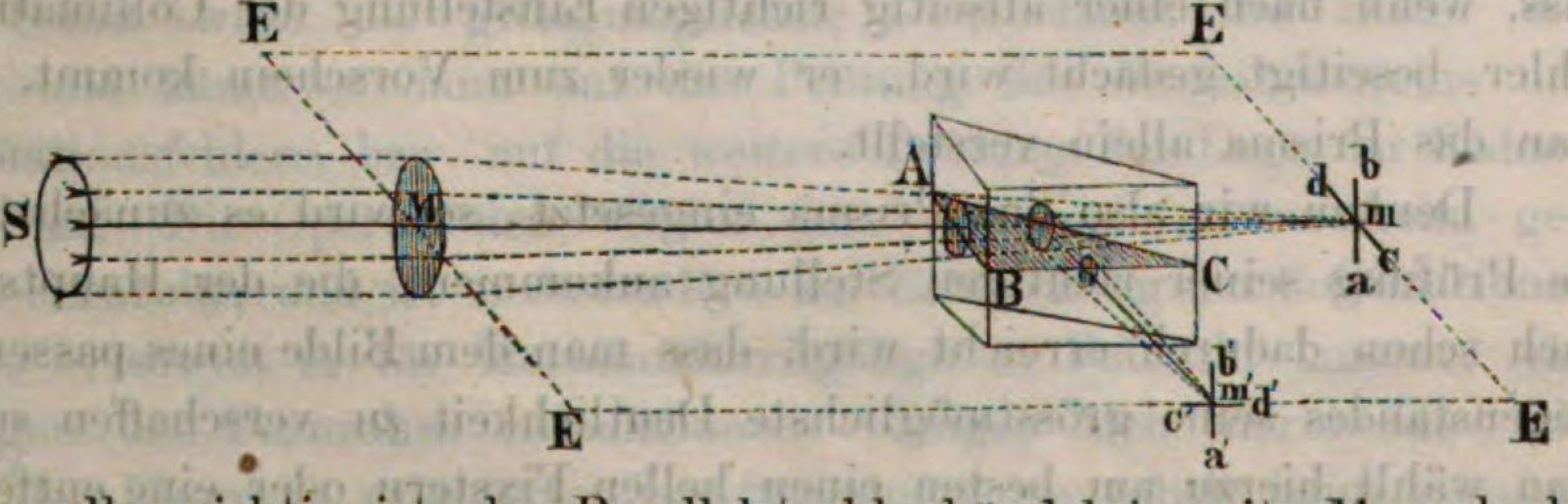
$$c = \frac{n \cdot l}{2E} \cdot 206265''.$$

Wäre z. B. wie bei unserer Meridianmarke $l = 0{,}1$ Meter, $E = 3772$ Meter und beispielshalber $n = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, so wäre

$$c = \frac{7 \cdot 0{,}1 \cdot 206265}{2 \cdot 2 \cdot 3772} = 9''{,}5$$

§. 65. Das folgende Kapitel wird uns noch näher mit dem Collimationsfehler bekannt machen und werden wir insbesondere noch eine andere Methode ihn numerisch zu bestimmen kennen lernen. Für jetzt überlegen wir, was zu berücksichtigen ist, wenn wir anstatt des geraden Fernrohrs ein gebrochenes substituiren. Bei diesem Instrumente spielt ein von Newton zuerst angewandter Reflector in Gestalt eines gleichschenklig rechtwinkligen Glasprismas eine Rolle der Art, dass an der Hypothenusenfläche desselben eine totale Reflexion eintritt und das Licht, welches in der Richtung des Objectivrohrs ankommt, in der Richtung der Drehungsaxe PQ schliesslich austritt und somit der Beobachter nur in der Richtung dieser Axe bei allen Neigungen des Objectivrohrs zu sehen braucht: eine Beobachtungsweise, deren Bequemlichkeit auf der Hand liegt. Es kommt also bei diesem Instrumente gegenüber dem geraden Fernrohr als neu in Betracht, erstens eine Brechung an der Objectiv-Kathetenfläche des Prismas, zweitens eine Reflexion an der Hypothenusenfläche und drittens eine zweite Brechung an der Ocularkathetenfläche. Diese beiden Brechungen können nun namentlich die Deutlichkeit der Bilder beeinträchtigen und wird es zunächst darauf ankommen, dem Prisma eine solche Stellung zu geben, dass diese Beeinträchtigung eine möglichst geringe ist, was dadurch erreicht wird, dass das Prisma gegen die vom Objectiv kommenden und schliesslich nach dem Ocular hin laufenden Strahlenbündel mit der betreffenden Kathetenfläche senkrecht gerichtet wird. Ist demnach ein gerades Fernrohr auf einen Stern S Fig. 65 gerichtet, so wird,

Figur 65.



wenn alles richtig ist, das Parallelstrahlenbündel jenseits M nach dem Punkte m hin convergiren, und denken wir eine Ebene E durch den Horizontalfaden cd und M gelegt, so muss das absolut richtige

gebrochene Fernrohr so beschaffen sein, dass das Prisma von dieser Ebene in einem Hauptschnitt *ABC* und weiter wegen der eben geforderten Deutlichkeit der Bilder so durchschnitten wird, dass *BC* parallel der Axennormalebene liegt. Ist dies der Fall, so wird das Strahlenbündel, das homocentrisch convergent auf die Objectivkathetenfläche fällt, zunächst zwar nach der ersten Brechung in ein solches verwandelt, dem streng genommen die Homocentricität abgeht, und das diesen Mangel auch nicht bei der totalen Reflexion an der Hypothenusenfläche verliert; das aber bei der zweiten Brechung an der Ocularkathetenfläche wiederum seine vollständige Homocentricität erreicht, um in *m'* einen Bildpunkt zu erzeugen, der von der Hypothenusenfläche ebenso weit entfernt ist als *m*, und der mit *m* in derselben Ebene *ABC* oder *E* liegt. Dieser Convergenzpunkt *m'* verschiebt sich, wenn man das Prisma erstens parallel mit sich selbst der Objectivlinse nähert, oder von ihr entfernt, eine Verschiebung, die wir die Progressivverschiebung des Prismas nennen wollen; der Convergenzpunkt *m'* verschiebt sich zweitens, wenn man das Prisma um irgend eine Axe aus seiner fehlerfreien Lage dreht. Beide Verstellungen können nun auch eine Undeutlichkeit des Bildpunkts *m'* zur Folge haben, jedoch aus einem verschiedenen Grunde. Ertheilt man nämlich dem Prisma die angegebene Progressivverschiebung, so verliert das Strahlenbündel seine Homocentricität jenseits der Ocularkathetenfläche nach dem Oculare hin nicht, aber es nähert sich *m'* der Ocularlinse, wenn das Prisma sich dem Objectiv nähert und umgekehrt, woraus folgt, dass hierdurch die Focalstellung des Oculars d. h. die Deutlichkeit der Bilder irritirt wird. Wird dagegen das Prisma um irgend eine Axe gedreht, so wird hiermit auch mehr oder minder die Homocentricität des austretenden Strahlenbündels vernichtet und treten weiterhin farbige Ränder bei den Bildpunkten auf, abgesehen davon, dass hierdurch auch Aenderungen in der Lage von *m'* zu Stande kommen. Es leuchtet daher ein, dass beim gebrochenen Fernrohr, was den Collimationsfehler anlangt, das Prisma mitzureden hat und dass, wenn nach einer allseitig richtigen Einstellung der Collimationsfehler beseitigt gedacht wird, er wieder zum Vorschein kommt, falls man das Prisma allein verstellt.

Denken wir also das Prisma eingesetzt, so wird es zunächst auf die Prüfung seiner richtigen Stellung ankommen, die der Hauptsache nach schon dadurch erreicht wird, dass man dem Bilde eines passenden Gegenstandes seine grösstmöglichste Deutlichkeit zu verschaffen sucht. Man wählt hierzu am besten einen hellen Fixstern oder eine entfernte Gasflamme oder auch einen entfernt angebrachten hellen kleinen Knopf aus. Richtet man hierauf das Instrument — bei dem die Einstellung

des Oculars und die Focalstellung der Fadenplatte schon vorausgegangen ist — und erscheint das Bild dieses Objects ringsum gleichmässig ohne einseitige Lichtfortsätze, die namentlich auch durch Farben sich bemerklich machen, so muss die grösstmöglichste Deutlichkeit des Bildes zugegeben werden und bleibt das Prisma dann stehen, wie es steht. Findet man aber diese Lichtfortsätze, so können insbesondere zwei Drehungen des Prismas dazu dienen, sie zu beseitigen, nämlich

1) eine Drehung um eine Axe senkrecht auf *ABC* Fig. 65, gleich einer Axe parallel dem Verticalfaden des Fadenkreuzes, gleich einer Axe parallel den brechenden Kanten des Prismas;
2) eine Drehung um eine Axe, die senkrecht verlauft zur Objectivkathetenfläche, also in unserer Figur um die Linie *Mm*.

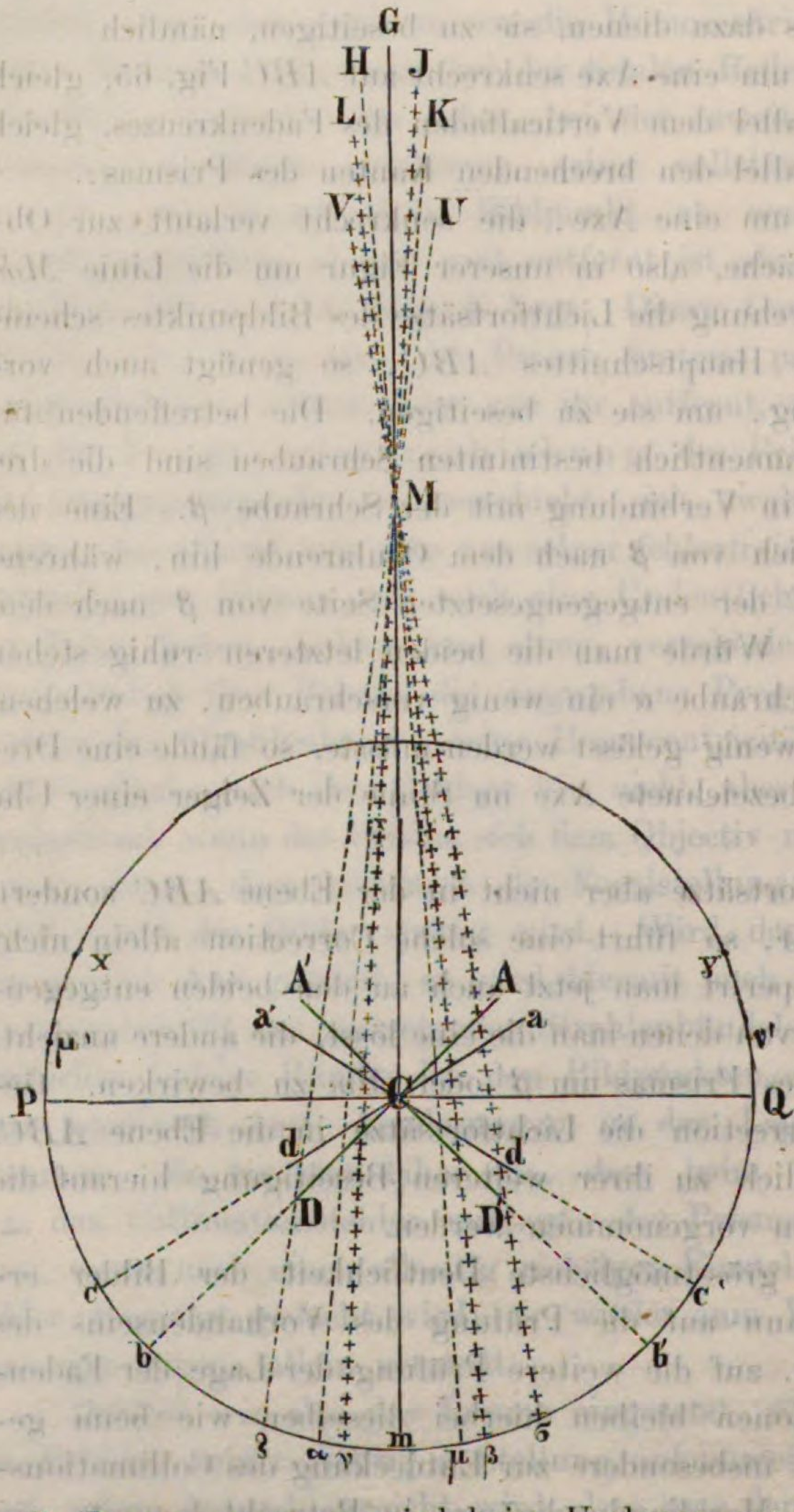
Fallen vor der Drehung die Lichtfortsätze des Bildpunktes scheinbar in die Ebene des Hauptschnittes *ABC*, so genügt auch vorläufig die erste Drehung, um sie zu beseitigen. Die betreffenden für diese erste Drehung namentlich bestimmten Schrauben sind die drei Schrauben α Fig. 57 in Verbindung mit der Schraube β. Eine der Schrauben α liegt seitlich von β nach dem Ocularende hin, während die beiden andern auf der entgegengesetzten Seite von β nach dem Höhenkreis zu liegen. Würde man die beiden letzteren ruhig stehen lassen und die linke Schraube α ein wenig vorschrauben, zu welchem Ende β erst ein klein wenig gelösst werden müsste, so fände eine Drehung um die unter 1 bezeichnete Axe im Sinne der Zeiger einer Uhr statt und umgekehrt.

Treten die Lichtfortsätze aber nicht in der Ebene *ABC* sondern hiervon abweichend auf, so führt eine solche Correction allein nicht zum Ziele, vielmehr operirt man jetzt auch an den beiden entgegengesetzten Schrauben δ, von denen man die eine lösst, die andere anzieht, um so eine Drehung des Prismas um β oder *Mm* zu bewirken. Gelangen durch diese Correction die Lichtfortsätze in die Ebene *ABC*, so muss selbstverständlich zu ihrer weiteren Beseitigung hierauf die erste Art der Correction vorgenommen werden.

Somit wäre die grösstmöglichste Deutlichkeit der Bilder erzeugt und käme es dann auf die Prüfung des Vorhandenseins des Collimationsfehlers, bzw. auf die weitere Prüfung der Lage der Fadenplatte an. Die Operationen bleiben hierbei dieselben wie beim geraden Fernrohr, und ist insbesondere zur Entdeckung des Collimationsfehlers c, soweit er für Meridiandurchgänge in Betracht kommt, ein Umlegen des Fernrohrs vorzunehmen. Zeigen sich hierbei die mit Hilfe der Figur 64 erläuterten Erscheinungen, so würde beim geraden Fernrohr eine Correctur der Fadenplatte allein bestehend in einer

Progressivverschiebung derselben in der Brennebene des Objectivs den Collimationsfehler beseitigen, beim gebrochenen Fernrohr aber müssen wir uns, um nicht voreilige Schlüsse zu machen, die Zusammenwirkung des Prismas und der Fadenplatte noch genauer ansehen, wobei die Figur 66 das Verständniss erleichtern wird. In ihr ist ein Kreis durch den Ort *P* der Fadenplatte gelegt, beschrieben um den Punkt *C*, in dem die richtige Collimationslinie *Gm* die Hypothenuse *AD* des Prismas durchbohrt. *AD* stellt das genau richtige Prisma, dagegen *ad* ein im Sinne der Zeiger einer Uhr gedrehtes Prisma vor, von dem der Einfachheit wegen blos die Hypothenusenfläche in der Figur versinnlicht ist. Richtet man nun das Fernrohr auf ein passendes Object, so wird beim richtigen Prisma der Punkt *G* sein Bild in *P* erhalten, wobei der Bogen $bP = bm$ ist, so dass *m* als das Bild beim geraden Fernrohr anzusehen wäre. Fällt demnach die Mitte der Fadenplatte beim gebrochenen Fernrohr auch mit *P* zusammen, so wird beim Umlegen, wo *P* nach *Q* gelangt, der Gegenstand *G* wieder mit der Mitte des Fadenkreuzes coincidiren und ein Collimationsfehler sich nicht bemerklich machen. Liegt aber die Mitte des Fadenkreuzes z. B. in μ', so erscheint in ihr nicht das Bild von *G*, sondern von *H*, welches ausserhalb so liegt, dass *HM* über *M* hinaus

Figur 66.



verlängert den Kreis in einem Punkt μ durchschneidet, der mit μ' von b gleiche Entfernung hat. Legt man um, so kommt AD in die Lage $A'D'$, b auf b', ferner μ auf ν, und μ' auf ν' zu liegen und coincidirt jetzt mit ν' das Bild eines Punktes J, so dass ganz wie früher der Winkel HMJ gleich $2c$ ist.

Setzen wir aber eine vermeintlich fehlerhafte Lage ad des Prismas voraus, denken uns das Fernrohr wieder in der ursprünglichen Lage und seine Mitte in P, so coincidirt mit P das Bild eines Gegenstandes U, der so liegt, dass Bogen $c\varrho = cP$ wird. Legen wir nun um, so kommt ad in die Lage $a'd'$, mithin c nach c' und mit der Mitte Q des Fadenkreuzes coincidirt das Bild eines Punktes V, der symmetrisch mit U auf der andern Seite von Gm gelegen ist, und der beim geraden Fernrohr sein Bild in σ erhalten hätte. Der Collimationsfehler ist in Folge davon jetzt gleich $\sphericalangle \frac{\varrho M\sigma}{2}$. Denken wir wiederum die Lage ad hergestellt, aber die Mitte des Fadenkreuzes von P nach μ' versetzt, also in demselben Sinne verschoben wie das Prisma um C gedreht wurde, so coincidirt nunmehr mit der Mitte μ' das Bild eines Gegenstandes K, für welchen $c\mu' = c\alpha$ wird und beim Umlegen das Bild des Gegenstandes L, für welchen $c'\nu' = c'\beta$ ist; d. h. der Collimationsfehler ist jetzt gleich $\sphericalangle \frac{\alpha M\beta}{2}$, mithin kleiner als ohne die Verschiebung des Fadenkreuzes. Letztere wirkt demnach entgegengesetzt wie die Drehung des Prismas und würde den, durch letzteres veranlassten, Collimationsfehler $mM\varrho = mM\sigma$ gänzlich aufheben, wenn die Mitte des Fadenkreuzes in einem Punkte x läge, in welchem der Gegenstand G als Bild auftritt, d. h. in einem Punkte x, der so liegt, dass Bogen $cx = cm$ und beim Umlegen $c'y = c'm$ wird. Dies tritt aber ein, wenn die Verschiebung des Fadenkreuzes um C in demselben Sinne erfolgt, wie die Drehung des Prismas und gleich dem doppelten Drehungswinkel des letzteren ist. Es braucht demnach beim gebrochenen Fernrohr die Mitte des Fadenkreuzes keineswegs in eine Gerade PQ zu fallen, die wir senkrecht auf die Axennormalebene errichtet denken und die wir bis jetzt auch als die horizontale Drehungsaxe des Fernrohrs betrachtet haben. Das Nämliche gilt auch, wenn PQ nicht mit der horizontalen Drehungsaxe coincidirt, sondern nur parallel damit lauft, und wird es gut sein, wenn der Leser diesen Gegenstand einer besonderen Betrachtung unterwirft, der wir hier keinen Raum geben wollen. Abgesehen hiervon ergiebt sich aber aus dem Vorausgehenden der Satz: „dass auch beim gebrochenen Fernrohr der Colli-
„mationsfehler c auf dieselbe Weise wie beim

„geraden nämlich nur durch eine seitliche Pro-
„gressivverschiebung des Fadenkreuzes, ohne dass
„das Prisma verstellt wird, beseitigt werden kann.“

§. 66. Im Anschluss an das Vorausgehende machen wir nun noch eine wichtige Bemerkung, die erst im Folgenden ihre volle Bedeutung erlangen wird. Die Figur 64 hat uns darüber belehrt, dass der Collimationsfehler eine Verfrühung oder Verspätung der Culmination zur Folge hat, und zwar beim geraden Fernrohr eine Verfrühung, wenn die Collimationslinie dem Sinne der scheinbaren Bewegung des seiner Culmination sich nähernden Sterns entgegen vom Meridian (Axennormalebene) abweicht und umgekehrt. Hierbei nahmen wir bisher an, dass der Collimationswinkel $c = \mu Mm$ in M seinen Scheitelpunkt habe; da aber die Dimensionen des Instruments im Vergleich zur Entfernung der Gegenstände, die bei der Beobachtung in Betracht kommen, gleich Null angesehen werden dürfen, so ist es ganz gleichgültig, an welchem Punkte des Instruments wir mG und μH Fig. 66 sich schneiden lassen, und kommt es hier nur auf die Richtung dieser beiden Linien an. Einer geometrischen Auffassung gemäss wird daher die richtige Collimationslinie bei der Rotation um die Drehungsaxe PQ die Meridianebene beschreiben, deren Durchschnitt mit der Himmelskugel einen grössten Kreis U bildet. Die falsche Collimationslinie aber beschreibt bei der Rotation um PQ eine Kegelfläche mit der Spitze in C, deren Durchschnitt mit der Himmelskugel nothwendig ein kleinerer Kreis u ist, der zum grössten Kreise U entweder auf der Ost- oder der Westseite parallel liegt, je nach dem es eben das Vorzeichen, mit welchem der Collimationsfehler versehen wird, verlangt. Es ergiebt sich hieraus der wichtige

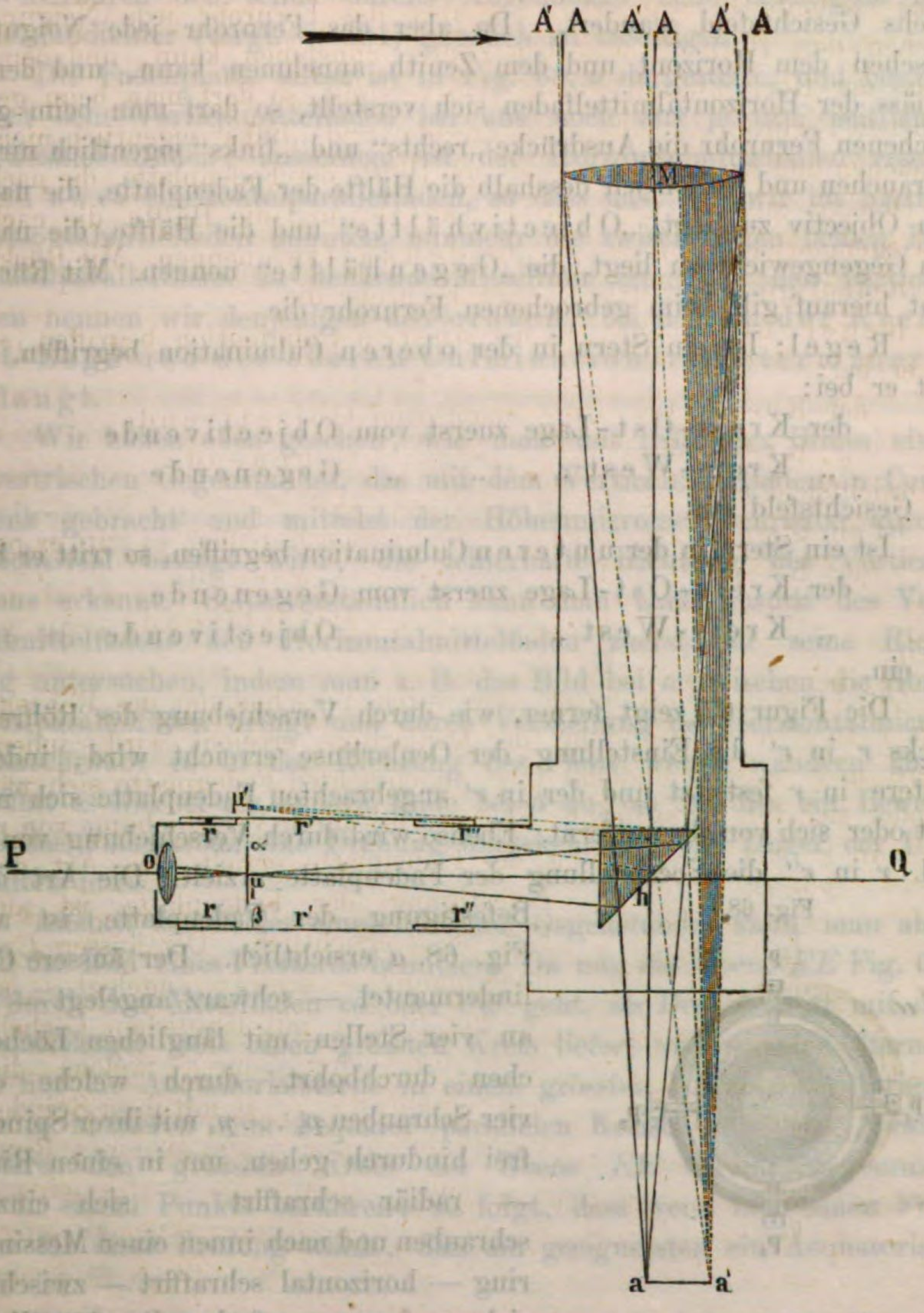
Satz, dass das Maass des Collimationsfehlers auf jedem grössten Kreise E liegt, der durch PQ geht und dass der Fehler selbst gleich dem Bogen ist, der zwischen zwei Punkten S und s liegt, in denen sich E mit U und u schneidet.

Es folgt hieraus nun weiter der

Satz, dass wegen des Collimationsfehlers irgend ein Stern nicht dann culminirt, wenn er in den Kreis U, sondern allgemein dann, wenn er in den Kreis u tritt. Beim gebrochenen Fernrohr kann selbstverständlich die Sache nicht anders sein und gelangt man genau zu derselben Vorstellung, wenn man dasselbe in ein gerades verwandelt denkt, einfach dadurch, dass man die Ocularseite um die Linie AD bzw. ad Fig. 66 herumklappt.

Schliesslich achten wir noch auf die folgenden Figuren 67 und 68. Die Erstere stellt das gebrochene Fernrohr schematisch vor und würde

Figur 67.



ein Stern, der in der Richtung des Pfeils scheinbar weiter wandernd der oberen Culmination sich nähert und wenn P das Ostende der Axe bedeutet, im geraden Fernrohr in einem bestimmten Momente v o r der Culmination in a' sein Bild erzeugen, das beim gebrochenen nach μ' hin zu liegen käme, ferner im Momente der Culmination bei ersterem in a bei letzterem in μ ein Bild liefern, woraus folgt, dass wenn der Beobachter ein gerades Fernrohr benutzt, bei der oberen Culmination der

Stern zuerst von rechts aus ins Gesichtsfeld eintritt, bei der Benutzung eines gebrochenen aber zuerst links auftritt und von links nach rechts durchs Gesichtsfeld wandert. Da aber das Fernrohr jede Neigung zwischen dem Horizont und dem Zenith annehmen kann, und demgemäss der Horizontalmittelfaden sich verstellt, so darf man beim gebrochenen Fernrohr die Ausdrücke „rechts" und „links" eigentlich nicht gebrauchen und wollen wir desshalb die Hälfte der Fadenplatte, die nach dem Objectiv zu liegt, „Objectivhälfte" und die Hälfte, die nach dem Gegengewicht zu liegt, die „Gegenhälfte" nennen. Mit Rücksicht hierauf gilt beim gebrochenen Fernrohr die

Regel: Ist ein Stern in der oberen Culmination begriffen, so tritt er bei:

der Kreis-Ost-Lage zuerst vom Objectivende
„ Kreis-West „ „ „ Gegenende

ins Gesichtsfeld ein.

Ist ein Stern in der unteren Culmination begriffen, so tritt er bei

der Kreis-Ost-Lage zuerst vom Gegenende
„ Kreis-West „ „ „ Objectivende

aus ein.

Die Figur 67 zeigt ferner, wie durch Verschiebung des Röhrenstücks r in r' die Einstellung der Ocularlinse erreicht wird, indem letztere in r festsitzt und der in r' angebrachten Fadenplatte sich nähert oder sich von ihr entfernt. Ebenso wird durch Verschiebung von r, incl. r in r'' die Focalstellung der Fadenplatte erzielt. Die Art der Befestigung der Fadenplatte ist aus Fig. 68, *a* ersichtlich. Der äussere Cylindermantel — schwarz angelegt — ist an vier Stellen mit länglichen Löchelchen durchbohrt, durch welche die vier Schrauben $p_1 \ldots p_4$ mit ihrer Spindel frei hindurch gehen, um in einen Ring — radiär schraffirt — sich einzuschrauben und nach innen einen Messingring — horizontal schraffirt — zwischen sich zu fassen, auf den die eigentliche Fadenplatte — vertical schraffirt — aufgekittet ist. Es leuchtet hiernach ein, wie z. B. durch Lösen von p_2 und Anziehen von p_4 die Fadenplatte von links nach rechts sich progressiv bewegt. Es leuchtet ferner ein, wie die Löchelchen im äusseren Cylindermantel, an den sich mit Reibung der radiär schraffirte Ring anlegt, gestatten

Fig. 68.

eine kleine Drehung des Fadenkreuzes um seine Mitte vorzunehmen, um hierdurch den schon durchs Augenmaass nahe beseitigten Parallelstandfehler (vergl. S. 301) gänzlich zu beseitigen.

Die Fadenplatte selbst ist in Fig. 68, *b* dargestellt, und besteht neben dem Verticalmittelfaden bei uns noch aus je drei seitlichen Verticalnebenfäden; ausserdem ist der Horizontalmittelfaden ersetzt durch zwei Horizontalparallelfäden, so dass das, was wir bis hierher Horizontalmittelfaden nannten, nunmehr die zwischen den beiden Horizontalparallelfäden zu denkende Mittellinie ist. Von den Verticalfäden nennen wir denjenigen den ersten, bei dem in der Kreis-Ost-Lage und der oberen Culmination ein Stern zuerst anlangt.

Wir haben oben gesehen, wie man mit Hilfe des Bildes eines terrestrischen Gegenstandes, das mit dem Verticalmittelfaden in Coincidenz gebracht und mittelst der Höhenmicrometerschraube durchs Gesichtsfeld bewegt wird, die fehlerhafte Richtung des Verticalfadens erkennt. Selbstverständlich kann man auch anstatt des Verticalmittelfadens den Horizontalmittelfaden zuerst auf seine Richtung untersuchen, indem man z. B. das Bild bei α zwischen die Horizontalparallelfäden bringt und durch Verstellung der Horizontalmicrometerschraube es in der Richtung des Pfeils weiter wandern lässt. Kommt es hierbei am andern Ende bei β an, so ist dies ein Beweis, dass das Fadenkreuz eine Drehung umgekehrt wie die Zeiger der Uhr erhalten muss.

Anstatt des Bildes eines irdischen Gegenstandes kann man aber auch das Bild eines Fixsterns benutzen. Da nun die Ebene EE Fig. 65, die durch den Mittelfaden cd oder $c'd'$ geht, als Durchschnitt mit der Himmelskugel stets einen grössten Kreis liefert und von den Sternen sich nur die Aequatorialsterne in einem grössten Kreise, die übrigen aber in kleineren zum Aequator parallelen Kreisen bewegen, welche letztere den grössten Kreis der Ebene EE streng genommen nur in einem Punkte berühren, so folgt, dass wenn man einen Fixstern für diese Prüfung wählt, dies am geeignetsten ein Aequatorialstern ist.

Richten wir noch einmal unsere Aufmerksamkeit auf die Fig. 65, so werden wir erkennen, wie es möglich ist, in der Ebene EE ausser der eigentlichen Collimationslinie Mm durch M auch noch je drei seitliche gerade Linien nach den Durchschnittspunkten der je drei seitlichen Fäden mit dem Mittelfaden zu ziehen, welche Geraden jenseits M verlängert auf andere Punkte des Weltraums wie S hinweisen. Der Kürze halber werden wir in Zukunft diese sechs seitlichen Linien mit dem Namen „Seitencollimationslinien“ bezeichnen, dagegen der

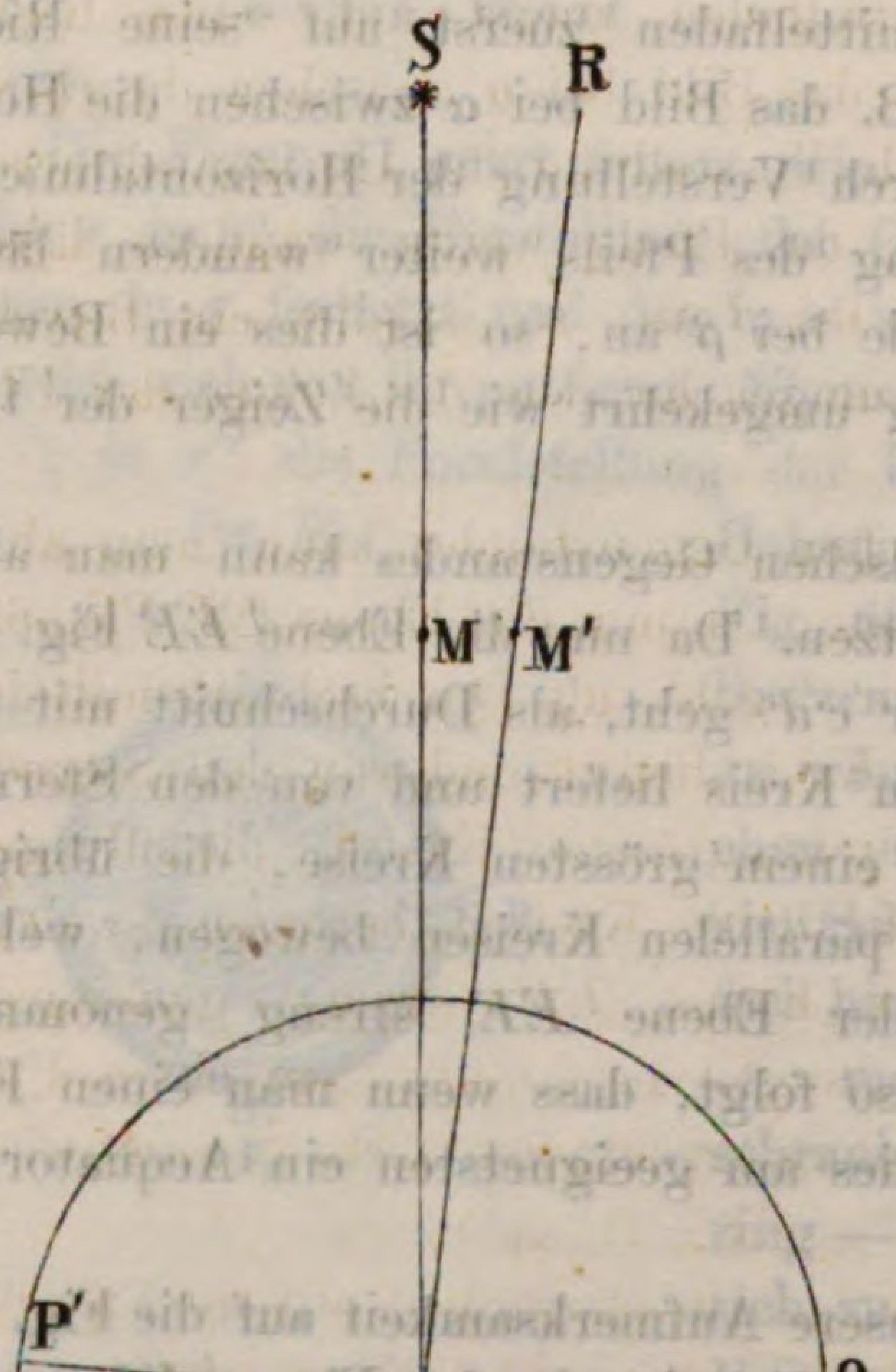
Collimationslinie, die wir bisher als solche ansahen, den Namen „Hauptcollimationslinie“ beilegen. Da nun die Ebene EE diese Collimationslinien alle enthält, so nennen wir sie in Zukunft auch die „Ebene der Collimationslinien“ und schneidet sie sich mit der Himmelskugel in einem grössten Kreise, den wir ebenfalls mit E bezeichnen wollen, durch, so kann dieser grösste Kreis kurzweg passend mit dem Namen „Collimationskreis“ bezeichnet werden.

§. 67. Ausser den beiden bis jetzt besprochenen Fehlern: dem Neigungs- und Collimationsfehler ist noch ein dritter der sogenannte

„Azimuthalfehler“

zu berücksichtigen. Denken wir nämlich ein von den beiden ersteren Fehlern gänzlich befreites Instrument, so kommt es weiter darauf an, in welcher Stellung dasselbe verwendet werden soll: ob es wie bei uns nur für die Beobachtung von Meridiandurchgängen oder vielleicht zu Beobachtungen in einem zur Meridianebene senkrechten Verticalkreis d. h. dem sogenannten „ersten Vertical“ bestimmt ist. In ersterem Falle muss die Drehungsaxe PQ genau die Ost-Westlage einnehmen, d. h. die Collimationslinie muss am Himmel einen grössten Kreis U beschreiben, der einerlei ist mit dem Meridian des Ortes und folglich auch durch das Zenith des Beobachters geht. Weicht aber die Drehungsaxe PQ Fig. 69 ein wenig von dieser Richtung ab, besitzt sie statt dessen die Lage $P'Q'$, so beschreibt die Collimationslinie zwar noch einen grössten Kreis und auch einen Kreis, der durchs Zenith des Beobachters geht, aber dieser Kreis, der L heissen möge, weicht vom Meridian U ab und seine Ebene bildet mit der Ebene des Kreises U einen Winkel $PCP' = MCM' = a$, den man den Azimuthalfehler zu nennen pflegt und dessen

Fig. 69



Maass nur im grössten Kreise des Horizonts liegt. Es folgt hieraus ein wesentlicher Unterschied zwischen Collimations- und Azimuthalfehler, indem bei letzterem, wie eben erwähnt wurde, sein Maass nur auf e i n e m grössten Kreise, nämlich dem Horizonte, bei ersterem aber, wie wir sahen, auf jedem durch PQ laufenden grössten Kreise liegt, und da wir hier uns gewisse fürs Folgende wichtige geometrische Auffassungen zu eigen machen wollen, so müssen wir diese auch noch in Bezug auf den Neigungsfehler vervollständigen. Ein Instrument, das bis auf diesen letztern Fehler richtig ist, liegt mit der Axe PQ nicht genau horizontal, sondern so, dass das Ostende P der Axe etwas unter oder über dem Horizont nach einem Punkte P'' weist, und ist der Inclinationswinkel i gleich dem Bogen PP'', der auf dem grössten Kreise N des ersten Verticals liegt, oder auch gleich dem Bogen ZZ', den die Zenithaxen des Fernrohrs beim Durchschnitte mit dem Kreise N zwischen sich einschliessen; mithin liegt auch das Maass des Neigungsfehlers i nur auf e i n e m grössten Kreise.

Denken wir das Fernrohr im Horizont auf eine entfernte Marke eingestellt, so wird bei richtiger Aufstellung ein Punkt S Fig. 69 mit der Mitte des Fadenkreuzes, dagegen bei einem mit dem Azimuthalfehler $PCP' = a$ behafteten Instrumente der Punkt R coincidiren, und sollte man meinen, es könnte der Azimuthalfehler etwa auch durch Umlegen oder Umdrehen des Fernrohrs um seine Verticalaxe erkannt werden. Man überzeugt sich jedoch sofort, dass diese Operation nicht zum Ziele führt, indem beim Umlegen ebenfalls der Punkt R mit der Mitte des Fadenkreuzes zusammenfällt, und auch beim Umdrehen des Fernrohrs um 180° kein anderer Punkt mit der Mitte des Fadenkreuzes coincidiren kann, ein Umstand, der die Verschiedenheit im Wesen des Collimations- und des Azimuthalfehlers noch in anderer Beziehung erkennen lässt.

Es würde nun ungereimt sein, wenn wir eine Methode auseinandersetzen wollten, die auf die Erforschung einer ganz kleinen Abweichung der Drehungsaxe von der Ost-Westlage hinzielte, ohne zu wissen, wie stellt man denn überhaupt vorläufig diese Lage her, wie erreicht man zunächst annähernd für das Fernrohr die

„E i n s t e l l u n g i n d e n M e r i d i a n“?

Dass man hierbei auf verschiedenen Wegen zum Ziele gelangen kann, ist klar, jedoch beschränken wir uns hier auf die Auseinandersetzung einer von S a w i t s c h in seiner praktischen Astronomie*) mitgetheilten Methode, indem diese unseren Zwecken besonders entspricht. Es werden hierbei vier Einstellungen und Ablesungen sowohl des

*) Bd. 1. S. 114 u. f.

Höhen- wie des Horizontalkreises nöthig und zwar, wie erst später näher begründet werden soll, am besten dann, wenn die Sonne Vor- oder Nachmittags möglichst den ersten Vertical passirt, was sie natürlich nur vom 21. März bis zum 21. Septbr. thut, während ausserdem die Anwendung der Methode nicht ausgeschlossen bleibt. Das Schema für eine vollständige derartige Beobachtung ist dann folgendes:

I. Einstellung auf die Sonne in einer Anfangslage des Fernrohrs also wenn Nachmittags beobachtet würde bei der Lage, wo der Höhenkreis zunächst z. B. zwischen Osten und Süden liegt:

1) Einstellung des Höhenkreises und Horizontalkreises so, dass der Unterrand der Sonne symmetrisch vom Vertical-Mittelfaden durchschnitten wird und gleichzeitig mitten zwischen den Horizontalfäden liegt;

1,1 Ablesung am Verticalkreis $= v_,$

1,2 „ „ Horizontalkreis $= H_,$.

2) Einstellung des Oberrandes der Sonne in derselben Weise;

2,1 Ablesung am Verticalkreis $= v'$;

2,2 „ „ Horizontalkreis $= H'$.

II. Umdrehen des Instruments um seine Verticalaxe um 180° so dass der Höhenkreis zwischen Westen und Norden liegt:

3) Einstellung des Oberrandes der Sonne wie bei 2;

3,1 Ablesung des Verticalkreises $= v''$

3,2 „ „ Horizontalkreises $= H''$;

4) Einstellung des Unterrandes der Sonne wie bei 1;

4,1 Ablesung des Verticalkreises $= v_{,,}$

4,2 „ „ Horizontalkreises $= H_{,,}$.

Nehmen wir an, es wäre $v_,$ und $v' < 90^0$, ebenso $H_,$ und $H' < 180^0$, so sind v'' und $v_{,,} < 270^0$ ebenso H'' und $H_{,,} > 180^0$ und somit

$$z_, = v_,;\ z'' = 360^0 - v''$$
$$z' = v';\ z_{,,} = 360^0 - v_{,,}$$

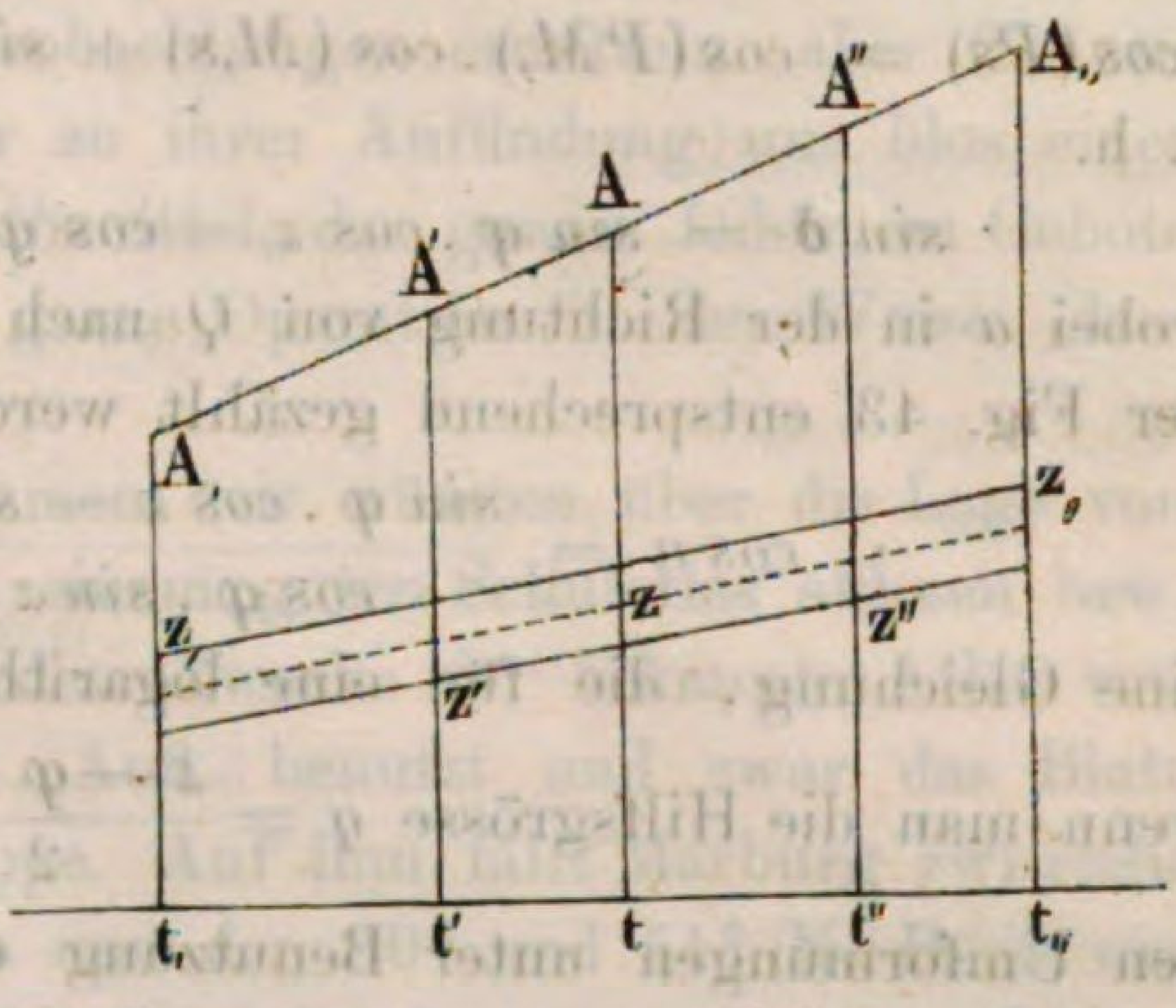
die betreffenden Zenithdistanzen des Unter- und Oberrands und ebenso

$$A_, = H_,;\ A'' = H'' - 180^0$$
$$A' = H';\ A_{,,} = H_{,,} - 180^0$$

die den z entsprechenden Stellungen der Alhidade des Horizontalkreises von dem Nullpunkt an im Sinne der Theilung gerechnet. Da nun die Ausführung der ganzen Operation, vorausgesetzt dass man sich schon vorher mit den Manipulationen vertraut gemacht hat, etwa nur 20 Minuten Zeit erfordert, so dürfen wir annehmen, dass während dieser Dauer sowohl die z wie die A sich proportional der Zeit ändern. Stellt demgemäss Fig. 70 $z_, z_{,,}$ die Veränderung der Zenithdistanz des Unterrandes Nachmittags und die hiermit parallel laufende Gerade $z' z''$

die Aenderung der Zenithdistanz des Oberrandes vor, so versinnlicht ebenso eine schief aufsteigende Gerade $A, A,,$ die betr. Aenderungen im Stande des Horizontalkreises, bei dem aber nur eine Gerade nöthig ist, weil der durch den Unterrand der Sonne gelegte Verticalkreis auch durch den Sonnenmittelpunkt und ebenso durch den Oberrand gehend angenommen werden darf und so für alle drei Punkte blos eine Stellung des Horizontalkreises gilt. Man begreift sofort, dass wenn man aus $z,$ und z' ebenso aus z'' und $z,,$ das jedesmalige Mittel nimmt, und eben so das Mittel aus $A,$ und A' sowie A'' und $A,,$ und die so gewonnenen Zahlen abermals halbirt, oder mit anderen Worten, wenn man gleich die Mittel

Fig. 70.



$$z = \frac{z, + z' + z'' + z,,}{4} \text{ und } A = \frac{A, + A' + A'' + A,,}{4}$$

bildet, dann diese Ordinaten z und A in eine und dieselbe verticale Gerade tzA fallen, und die im Momente $t = \frac{t, + t' + t'' + t,,}{4}$ zusammengehörigen Werthe von z und A, wie sie dem Sonnenmittelpunkte entsprechen, vorstellen. Diese Werthe sind gemäss der Bemerkung, die wir an die Gleichung (11) S. 296 knüpften, vor allem frei vom Indexfehler, und ausserdem, da sie aus vier Einzelwerthen abgeleitet sind, auch als genauere Werthe anzunehmen, wie wenn wir dieselben nur aus $z,$ und z' in einer Lage des Fernrohrs abgeleitet hätten.

Dieses so gefundene z bedarf aber nun zunächst zweier Correctionen, einmal wegen der Refraction, sodann wegen der Parallaxe, und muss, wenn erstere genau berechnet werden soll, der Barometer- und Thermometerstand abgelesen werden. Wir begnügen uns hier jedoch mit der Anbringung der mittleren Refraction ϱ. Was ferner die Parallaxe betrifft, so dürfen wir uns auch hierbei erlauben, nur das erste Glied der Gl. (25) Kap. V zu berücksichtigen, wobei wir also den durch ϱ schon verbesserten Werth der scheinbaren Zenithdistanz benutzen, um Δz zu berechnen, uns zugleich an die Schlussbemerkung des §. 41 erinnernd. Nach Anbringung dieses Werthes Δz hätten wir das geocentrische Zenith z der ⊙ durch Beobachtung und Rechnung gefunden. Kennen wir ausserdem dann die geographische Breite

φ, so wäre im Dreieck $PM_{,}s$ Fig. 43 der Bogen $PM_{,} = 90^0 - \varphi$, $M_{,}s = z$ gegeben, und wären wir weiter noch im Stande, die Grösse $\delta = so$ zu finden, so würde sich aus den Grössen φ, z und δ eine neue Grösse, nämlich das Azimuth a des Sonnenmittelpunkts berechnen lassen. Denn es besteht, da $\measuredangle sPM_{,} = a$ ist, die Gleichung

$$\cos(Ps) = \cos(PM_{,}) . \cos(M_{,}s) + \sin(PM_{,}) . \sin(M_{,}s) . \cos(PM_{,}s)$$

d. h.

$$\sin\delta = \sin\varphi . \cos z - \cos\varphi . \sin z . \cos a$$

wobei a in der Richtung von Q nach q, also von Süden nach Westen der Fig. 43 entsprechend gezählt werden muss. Demnach wäre

$$\cos a = \frac{\sin\varphi . \cos z - \sin\delta}{\cos\varphi . \sin z}$$

eine Gleichung, die für eine logarithmische Rechnung bequem wird, wenn man die Hilfsgrösse $q = \frac{z - \varphi - \delta}{2}$ einführt und so nach einigen Umformungen unter Benutzung der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

und

$$\sin x + \sin y = 2 . \sin\frac{x+y}{2} . \cos\frac{x-y}{2}$$

schliesslich zur Gleichung

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos q . \sin(q + \delta)}{\cos\varphi . \sin z}}$$

gelangt. Ist auf diese Weise nun $\frac{a}{2}$ und somit auch a bekannt, und liegt der Südpunkt des Horizonts vom Nullpunkt des Horizontalkreises an gerechnet bei S, so ist für die Nachmittagsbeobachtung:

$$S + a = A$$

und

$$S = A - a$$

wobei rechts, wenn S negativ werden sollte, 360^0 zugelegt werden müssen, und für eine Vormittagsbeobachtung, wenn wir das Azimuth dann von Süden nach Osten hin zählen, wodurch in der Formel für $\sin\frac{a}{2}$ keine Aenderung eintritt:

$$S - a = A$$

d. h.

$$S = A + a$$

wird und wobei, wenn $A + a > 360^0$ ist, 360^0 abgezogen werden müssen.

Somit wäre S gefunden und würde, wenn man den betreffenden Nonius, der überhaupt bei der Einstellung des Horizontalkreises in

Betracht kam jetzt auf S einstellte, die verlangte Meridianstellung erreicht sein.

Das Einzige, was uns aber noch fehlt, wären die Grössen δ und φ. Erstere lässt sich, wie wir wissen, berechnen, wenn uns ein Jahrbuch zu Gebote steht und die geographische Länge λ bekannt ist. Die Grösse φ lässt sich durch Beobachtungen ermitteln, aber für unsere Zwecke genügt es, wenn wir zu ihrer Auffindung uns blos einer guten Landkarte bedienen, ein Hilfsmittel, das gewiss Jedem zu Gebote steht und beginnen wir nun die ganze Operation in der Weise, dass wir in einem

Beispiele zunächst annehmen, wir wüssten über die Lage von Marburg nur das, was wir aus einem guten Schulatlas ablesen bzw. abmessen können. Es wurde zu dem Zwecke der bekannte Atlas von Lichtenstern und Lange 21. Aufl. benutzt und zwar das Blatt No. 9: Nordwestliche Staatengruppe. Auf ihm fällt Marburg zwischen den 26^0 und 27^0 öst. L. v. Ferro und den 50^0 und 51^0 N. B. in ein Rechteck (eigentlich Paralleltrapez) des Gradnetzes, dessen schmale Seite (der Länge entsprechend) 36,6 und lange Seite 57,0 Millimeter mass. Von diesen Seiten liegt entsprechend Marburg ab um 10,6 und 15,8 Millim. so, dass also die geographische Länge gleich

$$26^0 + 1^0 . \frac{15,8}{36,6} = 26^0\,25,\,54''{,}0,$$

die geographische Breite aber gleich

$$51^0 - 1^0 . \frac{10,6}{57,0} = 50^0\,48'\,50''{,}5$$

sich ergab. Da ferner nach einem andern Blatte desselben Atlasses (No. 30) die Länge von Greenwich von Ferro aus gerechnet sich gleich

$$18^0 - 2^0 . \frac{5,3}{33,5} = 17^0\,41'\,0''{,}9$$

herausstellte, so ergab sich die Länge Marburgs von Greenwich aus gerechnet gleich

$$8^0\,44'\,53''{,}1 = 34^m\,59^s{,}5$$

so dass die geographische Breite und Länge von den genauen Angaben, wie sie S. 113 und 190 gemacht worden sind, nur um

$$+ 3''{,}6 \text{ und } - 0^m\,6^s{,}1$$

abweichen.

Die Beobachtung geschah am 26. März 1874 Nachmittags und fiel mit ihrer Mitte etwa auf $5^h\,0^m$ einer Taschenuhr, deren Angabe als zuverlässig erkannt war. Da nun die Declination der Sonne im mittleren Mittage von Greenwich am 26. März gleich $+ 2^0\,15'\,15''{,}8$ und die tägliche Aenderung vom $\frac{26}{27}$. März $+ 23'\,29''{,}7$ betrug, so war die der Zeit $5^h\,0^m$ in Marburg entsprechende Declination

$$\delta = 2^0\ 15'\ 15'',8 + \frac{(5^h\ 0^m - 35^m)\ 23'\ 29'',7}{24^h}$$

$$= 2^0\ 15'\ 15'',8 + 4'\ 19'',4 = 2^0\ 19'\ 35'',2.$$

Die Ablesungen ergaben weiter am Verticalkreis:

$$v_{,} = 77^0\ 27';\quad v'' = 281^0\ 55'$$
$$v' = 77\ \ 23\ ;\quad v_{,,} = 281^0\ \ 8'$$

am Horizontalkreis:

$$H_{,} = 118^0\ 10'\ 30'';\ H'' = 299^0\ 30'\ 30''$$
$$H' = 118\ \ 50\ \ 0\ ;\ H_{,,} = 299\ \ 49\ \ 0$$

und war somit

$$\begin{aligned} z_{,} &= 77^0\ 27' \\ z' &= 77\ \ 23 \\ z'' &= 78\ \ \ 5 \\ z_{,,} &= \underline{78\ \ 52} \\ & \quad 3^0\ 47' \end{aligned} \qquad \text{mithin } z = 77^0\ 56'\ 45''$$

und ebenso

$$\begin{aligned} A_{,} &= 118^0\ 10'\ 30'' \\ A' &= 118\ \ 50\ \ \ 0 \\ A'' &= 119\ \ 30\ \ 30 \\ A_{,,} &= \underline{119\ \ 49\ \ \ 0} \\ & \qquad 20'\ \ 0'' \end{aligned} \qquad \text{mithin } A = 119^0\ 5'\ 0''.$$

Für die gefundene Zenithdistanz z ist ferner die mittlere Refraction

$$\varrho = 4'\ 24''$$

somit das hiernach verbesserte

$$z = 78^0\ 1'\ 9''.$$

Da ferner die Aequatorial-Horizontalparallaxe

$$\pi_0 = 8'',96$$

war, so ist nach Gl. (25) Kap. V

$$\Delta z = 8'',96 \,.\, sin\,(78^0\ 1'\ 9'') = 8'',8$$

mithin das geocentrische Zenith

$$z = 78^0\ 1'\ 9'' - 8'',8 = 78^0\ 1'\ 0'',2.$$

Demgemäss nun

$$q = 12^0\ 26'\ 19'',0 \qquad log\ cos\ q = 9{,}98968$$
$$q + \delta = 14\ \ 45\ \ 54\ ,2 \qquad log\ sin\,(q + \delta) = \underline{9{,}40629}$$
$$9{,}39597$$
$$log\ cos\ \varphi = 9{,}80061 \qquad \underline{9{,}79104}$$
$$log\ sin\ z = \underline{9{,}99043} \qquad 9{,}60491$$
$$9{,}79104 \qquad log\ sin\,\frac{\alpha}{2} = 9{,}80246$$

mithin

$$\frac{\alpha}{2} = 39^0\ 23'\ 8'';\ \alpha = \mathbf{78^0\ 46'\ 16''}$$

und demgemäss

$$S = 119^0\ 5'\ 0'' - 78^0\ 46'\ 16'' = \mathbf{40^0\ 18'\ 44''}$$

wird. In der That fand aber bei unserem Instrumente die Einstellung auf die Mitte des Meridiansteins statt, als der betreffende Nonius auf

$$\mathbf{40^0\ 19'\ 55''}$$

eingestellt wurde, so dass auf diese Weise die Meridianstellung bis auf 1′ 11″ genau erreicht wurde, in welcher Lage des Fernrohrs eine genaue Zeitbestimmung nach der im nächsten Kapitel näher auseinandergesetzten Methode ohne weiteres möglich ist und welche Zeitbestimmung uns dann auch weitere Mittel an die Hand giebt, um einen solchen noch zu grossen Azimuthalfehler kleiner zu machen.

Kapitel VIII.

Das Passageinstrument und dessen specieller Gebrauch zur Zeitbestimmung.

§. 68. Wir wenden das Passageinstrument nur im Meridian des Beobachters an, und verfolgen diese Anwendung nun weiter. Trotzdem, dass wir im Stande sind, unsere obigen drei Fehler des Instruments: den

Neigungsfehler,
Collimationsfehler
und Azimuthalfehler

durch mechanische Mittel nach vorausgegangenen Beobachtungen kleiner und kleiner zu machen, so vermögen wir doch nicht, sie völlig wegzuschaffen; ja würde dieses auch wirklich gelingen, so bestände dieser Zustand des Instruments nur kurze Zeit und beim nächsten Gebrauch hätte man doch wieder Fehler zu gewärtigen. Man schlägt daher einen Weg ein, der überall in ähnlichen Fällen, wo es sich um die Erforschung der Wirklichkeit handelt, betreten werden muss, nämlich den, dass man das Instrument von vornherein als mit Fehlergrössen behaftet ansieht, diese in gewisse Gleichungen einführt und zusieht, ob sich durch Rechnung aus diesen Gleichungen die Unbekannten i, c und a bestimmen lassen, um schliesslich unter Berücksichtigung der nun bekannten Fehler zur Kenntniss der Hauptunbekannten: nämlich des Fehlers der Uhr zu gelangen. Der Weg ist also folgender: Man beobachtet mit dem Instrumente den Durchgang eines Sterns durch den Meridian; er erfolgt nach der Uhr um die Zeit t_1; wäre nun die Uhr und das Instrument völlig richtig, so wäre t_1 die genaue Durchgangszeit; besitzt aber letzteres die drei genannten Fehler, und müssen wir auch die Uhr mit einem Fehler behaftet annehmen, so leuchtet ein, dass an die beobachtete Zeit t_1, um die richtige Durchgangszeit zu erhalten, vier Correctionen angebracht werden müssen nämlich:

eine Corr. (u) wegen des Fehlers der Uhr;
„ Corr. (i) „ „ „ der Neigung des Fernrohrs;
„ Corr. (c) „ „ „ der Collimation;
„ Corr. (a) „ „ Azimuthalfehlers,

und bezeichnen wir mit t_1' die genau richtige Zeit des Durchgangs, so besteht die Gleichung:

$$t_1' = t_1 + \text{Corr.}(u) + \text{Corr.}_1(i) + \text{Corr.}_1(c) + \text{Corr.}_1(a) \quad . \; . \; (1)$$

Da wir nun u, i, c und a nicht kennen, so ist klar, dass uns zunächst auch die, wegen dieser Fehler in einem bestimmten Falle anzubringenden Correctionen vier Unbekannte sind, die für einen zweiten und dritten Stern im Allgemeinen andere werden. Mit Rücksicht darauf aber, dass die Beobachtungen nicht längere Zeit erfordern, vielmehr meistens in etwa zwei Stunden vollendet sind, dürfen wir annehmen, dass der Standfehler der Uhr sich gleich geblieben ist, dass mithin Corr. (u) für jeden Stern denselben Werth hat. Wir haben desshalb in Gl. (1) die drei übrigen Correctionen mit dem Index „1" bezeichnet, die Corr. (u) dagegen ohne besonderen Index gelassen. Für einen zweiten, dritten, . . . Stern erhalten wir daher die Gleichungen:

$$t_2' = t_2 + \text{Corr.}(u) + \text{Corr.}_2(i) + \text{Corr.}_2(c) + \text{Corr.}_2(a) \quad . \; . \; . \; (2)$$
$$t_3' = t_3 + \text{Corr.}(u) + \text{Corr.}_3(i) + \text{Corr.}_3(c) + \text{Corr.}_3(a) \quad . \; . \; . \; (3)$$

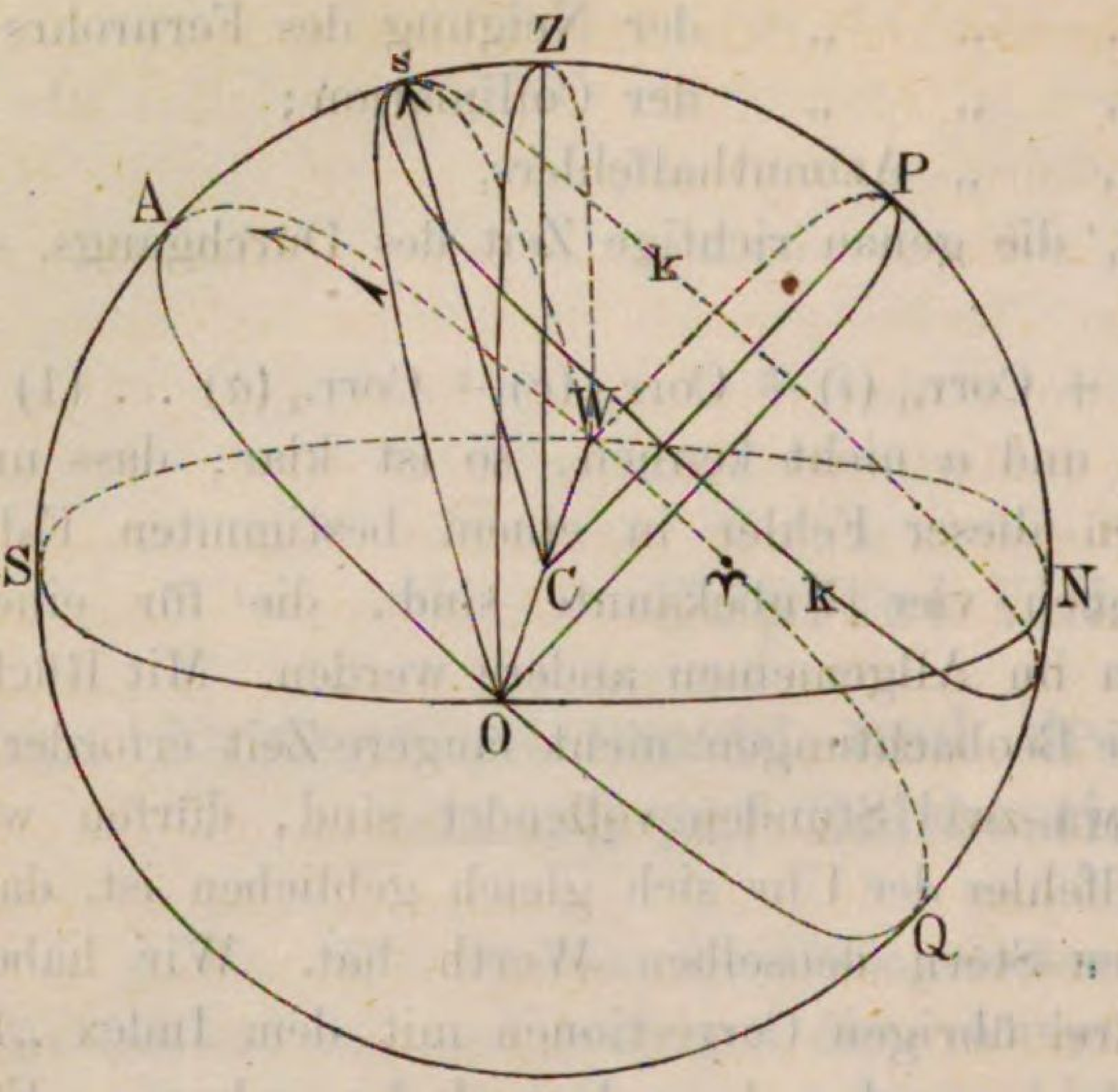
. . . .

. . . .

Es wird sich nun zeigen, dass diese Gleichungen vom ersten Grad sind, und i, c und a auf einfache Weise numerisch bestimmt werden können. Denn subtrahiren wir eine von der anderen, so resultirt eine neue Gleichung, in welcher die Corr. (u) fehlt, und werden drei solche Gleichungen zur Berechnung von i, c und a dienen können. Die Grössen t_1, t_2, t_3 . . . sind hierbei die wirklich beobachteten Zeiten, und werden wir sie in folgenden durch den Buchstaben O als Abkürzung von „Observatio" darstellen. Die Corr. (u) ist mit Rücksicht auf die Kürze der ganzen Beobachtungszeit, wie schon angedeutet, gleich dem constanten Fehler des Standes der Uhr, und bezeichnen wir sie in der Folge kurz mit s als die eigentlich gesuchte Grösse, denn alle Zeitbestimmungen laufen zunächst darauf hinaus, den Standfehler einer Uhr zu finden.

§. 69. Sollen wir nun zum Ziele gelangen, so müssen wir nothwendig einen Ausdruck für die drei anderen Correctionen finden, und um hier den Zusammenhang zu übersehen, betrachten wir zunächst unsere Figur 71. In ihr bedeutet CP die Erdaxe, AQ die Ebene des Aequators; Z das Zenith des Beobachters; SN die Ebene des Horizonts, der sich mit dem Aequator in der Linie OW oder der Ost-West-Li ie schneidet. Der grösste Kreis durch Z und P gelegt ist

Fig. 71.



der Meridian des Beobachters, während der durch Z und O laufende grösste Kreis den „ersten Vertical“ vorstellt. Bei einem absolut richtigen Instrument fällt demnach die horizontale Fernrohraxe mit OW zusammen und muss die Collimationslinie bei ihrer Bewegung um OW die Ebene des Meridians beschreiben. Denken wir ferner einen Fixstern s in der oberen Culmination begriffen und auf dem Aequator den Frühlingspunkt in ♈, so ist klar, dass die, seit dem Durchgange unseres Meridians durch den ♈ bis zur Culmination von s verflossene Zeit durch den Bogen ♈A in der Richtung des Pfeils oder der Rotation der Erde um ihre Axe gemessen wird. Der zum Aequator AQ parallele Kreis k ist der vom Stern scheinbar beschriebene Parallelkreis, in Wirklichkeit aber der Durchschnitt, welchen die von der Collimationslinie des Fernrohrs während der Rotation um CP beschriebene Kegelfläche mit der Himmelskugel liefert, falls eben das Fernrohr auf den Stern s mit der betreffenden Declination As eingestellt bleibt. Legen wir ferner durch OW und den Punkt s einen grössten Kreis, so ist dies kein anderer als der Collimationskreis E, den wir am Schlusse des §. 66 schon erwähnten. Dieser Kreis berührt den Kreis k streng genommen nur in einem Punkte und ziehen wir durch C Linien, welche mit den ebenfalls am Schlusse des §. 66 bezeichneten „Seitencollimationslinien“ der Richtung nach zusammenfallen, so werden diese den Kreis E in je drei Punkten beiderseits durchschneiden, welche sechs Punkte streng genommen auf E und nicht auf k liegen. Lassen wir auch diese sechs Seitencollimationslinien sich um OW drehen, so beschreiben sie als Durchschnitte mit der Himmelskugel sechs zum grössten Kreise, der von der Hauptcollimationslinie beschrieben wird und beim richtigen Fernrohr mit dem Meridian des Beobachters identisch ist, parallele kleinere Kreise. Wir werden in Zukunft die Durchschnittspunkte der sieben Kreise der Collimationslinien mit dem Collimationskreis E durch

$$e_1 \ldots . e_4 \ldots . e_7$$

sowie deren Durchschnittspunkte mit dem Parallelkreis k durch

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4 \ldots \varepsilon_7$$

bezeichnen und ist beim richtigen Apparate e_4 als mit ε_4 und im Momente der Culmination des Sterns auch mit s zusammenfallend und hiermit identisch zu erachten. Da ferner der Winkel, den selbst die beiden äussersten Seitencollimationslinien mit einander bilden, nur ein kleiner Winkel ist und bei unserem Marburger Instrumente z. B. nur 22′ 22″ beträgt, da mithin der Bogen $a_1 a_7$ nur ein kleines Bogenstückchen des grössten Kreises E ist und in unserem Falle rundweg nur den 966ten Theil von E ausmacht, so werden wir auf diese kurze Strecke hin uns erlauben können anzunehmen:

„es fände die Berührung von E mit k nicht nur in einem ein- „zigen Punkte, sondern in allen zwischen a_1 und a_7 gele- „genen Punkten statt, und es wären in Folge hiervon über- „haupt alle Punkte $e_1 \ldots e_4 \ldots e_7$ identisch mit den ent- „sprechenden Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4 \ldots \varepsilon_7$, eine Annahme, die um „so mehr statthaft ist, je näher der Stern s dem Aequator „steht."

Demgemäss werden wir auch die Bogen $\varepsilon_1 \varepsilon_4$, $\varepsilon_2 \varepsilon_4$, die streng genommen Bogen eines kleineren Kreises k auf der Kugel sind, ohne weiteres auch als Bogen des grössten Kreises E ansehen dürfen, wonach gewisse Betrachtungen und Entwickelungen im Folgenden an Einfachheit sehr gewinnen.

Der Bogen ΥA bedeutet die Rectascension des Sterns, und bezeichnen wir diese in Zeit ausgedrückt mit AR, so würde, wenn das Fernrohr absolut richtig und die Sternuhr ohne Fehler wäre, letztere die Culmination auf dem Zifferblatt zur Zeit AR anzeigen, d. h. es bestände die Gleichung

$$O = AR$$

oder

$$O - AR = 0;$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die vier Fehler anzunehmen sind, die Gleichung

$$O + s + \text{Corr.}(i) + \text{Corr.}(a) + \text{Corr.}(c) = AR$$

oder

$$[O + \text{Corr.}(i) + \text{Corr.}(a) + \text{Corr.}(c)] - AR = s.$$

Der Klammerausdruck stellt das wegen der drei Fehler des Instruments verbesserte O vor, d. h. das O, wie es bei einem absolut richtigen Instrumente hätte ausfallen müssen. Wird von diesem letzteren O das AR abgezogen, so bekommt man das s, wobei aber s in der letzten Gleichung nicht mehr wie seither die an die Uhr anzubringende Correction, sondern den Stand bedeutet, den wir ja im ersten Theil als positiv

ansahen, wenn die Uhr zu viel zeigte. Wollte man aber wie bisher unter s die anzubringende Correction der Uhr verstehen, so müsste s mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen werden. Wir werden im Folgenden sehen, dass es zweckmässig ist, O direct mit der $\mathcal{R}$ zu vergleichen, und schreiben desshalb nun unsere Fundamentalgleichung als

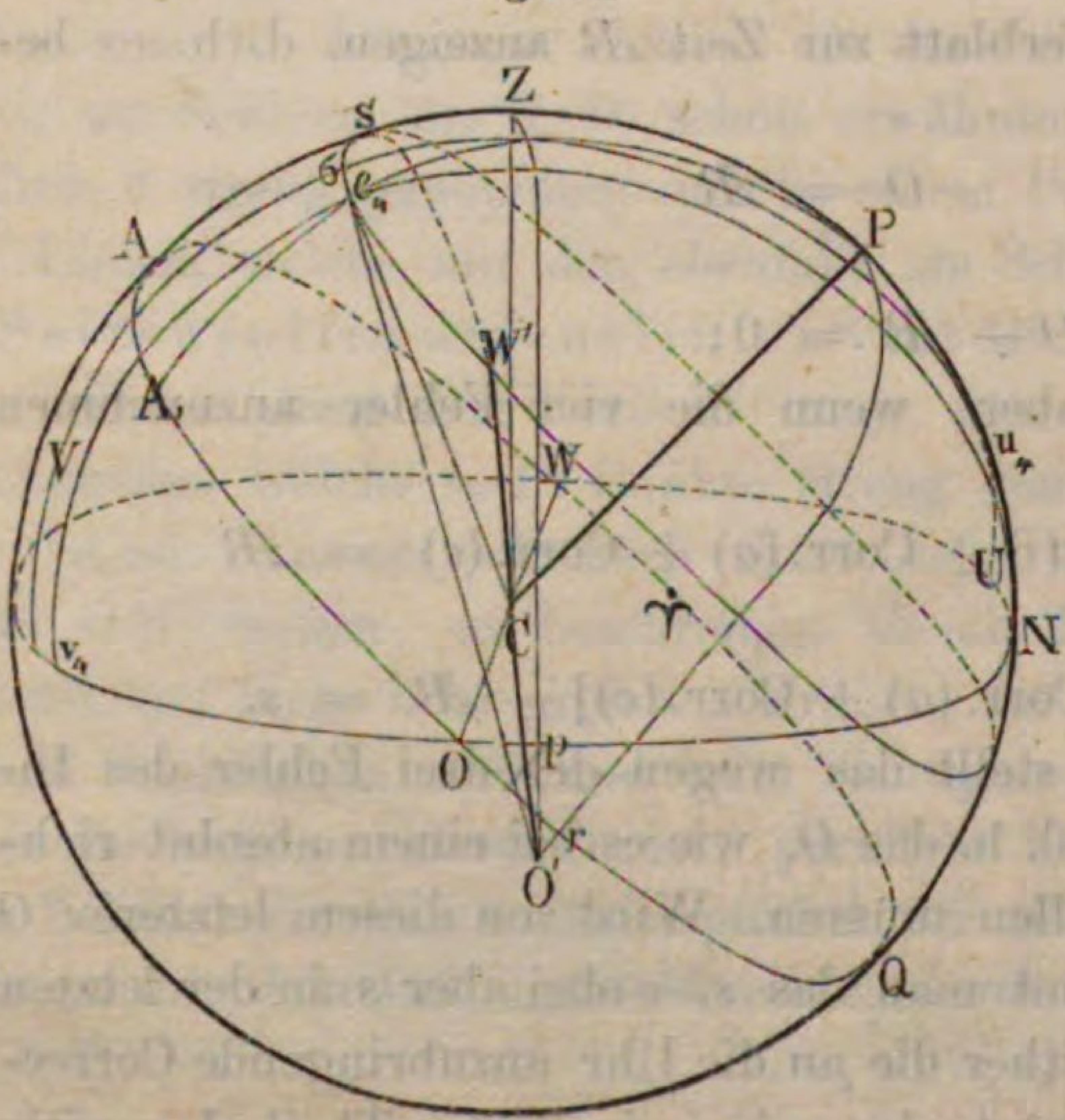
$$(O - \mathcal{R}) + \text{Corr.}\,(c) + \text{Corr.}\,(i) + \text{Corr.}\,(a) = s \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich ganz allgemein, dass die drei Correctionen als positive Grössen anzusehen sind, wenn wegen jedes der betreffenden drei Fehler i, a und c das O zu klein ausfällt. Ist dies der Fall, so werden die hernach zu findenden Ausdrücke für Corr. (i) etc. beweisen, dass

1) der Fehler i positiv zu rechnen ist, wenn das Ostende der Drehungsaxe OW sich ein wenig dem Nadir zu neigt, d. h. etwas unter dem Horizonte liegt;
2) der Fehler a positiv zu rechnen ist, wenn das Ostende der Drehungsaxe OW ein wenig dem Norden zu steht;
3) der Fehler c positiv zu rechnen ist, wenn die Collimationslinie bei der Drehung um OW einen Parallelkreis beschreibt, der nach der Ostseite von jenem grössten Kreise liegt, den sie beschreiben würde, falls sie senkrecht auf OW stände.

Versinnlichen wir uns demnach den Vorgang bei der oberen Culmination und setzen jetzt ein Instrument mit den drei positiven Fehlern voraus, so gestaltet sich der ganze Zusammenhang so wie in der Figur 72. Dadurch nämlich, dass ein Azimuthal- und Höhenfehler vorhanden ist, kommt die sonst horizontale Drehungsaxe aus der Lage OW in Fig. 71 in eine Lage $O'W'$ und beschreiben wir um O' einen grössten Kreis, so wird dieser etwa wie UV liegen. Nehmen wir ausserdem noch einen Collimationsfehler an, so würde ein diesem Fehler entsprechender kleinerer Kreis um O' parallel zu UV gedacht werden müssen, der etwa die Lage u_4v_4 annimmt, und den der Endpunkt der fehlerhaften Hauptcollimationslinie beschreibt, wenn

Fig. 72.



diese um $O'W'$ sich dreht. Dieser kleinere Kreis schneidet die scheinbare Bahn des Sterns s in einem Punkt e_4 durch, und haben nun die drei Fehler zur Folge, dass im Momente, wo unser Meridian durch den Stern s geht, und wo die richtige Collimationslinie die Lage Cs (in der Figur nicht angegeben) haben müsste, diese im Gegensatze hierzu die Richtung Ce_4 hat, d. h. dass in diesem Momente die Culmination von s vom Fernrohr als schon vorüber angezeigt wird. Legen wir dann durch e_4 und P einen Meridian, so nimmt dieser die Lage PA, an und stellt, wie erwähnt, Bogen ΥA die Rectascension des Sterns s vor, so ist klar, dass anstatt dieses Sterns ein Punkt e_4 mit der Rectascension ΥA, $= Æ + \varDelta Æ$, in der Culmination beobachtet wird, in der eigentlich s mit der Rectascension $Æ$ beobachtet werden sollte. Der Winkel APA, in Zeit verwandelt ist es demnach, um welchen die Beobachtung zu klein ausfällt und bezeichnen wir ihn nach einer Sternzeit zeigenden Uhr anstatt $\varDelta Æ$ mit $\varDelta t$, so ist diese Zeitgrösse $\varDelta t$ der Fehler, der durch die drei Fehler des Instruments in die Zeitbestimmung hinein kommt, d. h. es ist $\varDelta t$ = Corr. (a) + Corr. (i) + Corr. (c).

Um $\varDelta t$ zu bestimmen, legen wir durch O' noch drei grösste Kreise $O'P$, $O'Z$ und $O'e_4$. Die beiden ersten liefern mit dem Aequator und dem Horizont entsprechend die Durchschnitte r und p und ist

$$Op = a$$
$$O'p = i.$$

Der dritte grösste Kreis $O'e_4$ liefert ausserdem mit UV noch einen Durchschnitt σ und da dieser grösste Kreis $O'e_4$ auch durch W' geht und identisch ist mit dem was wir S. 314 Collimationskreis nannten, so ist nach den Erörterungen auf S. 310 der Bogen

$$e_4\sigma = c.$$

Setzen wir ausserdem noch für

$$Or \text{ ein } h$$
$$O'r \;\;,,\;\; h'$$

so ist im Dreieck e_4PO'

$$\cos(O'e_4) = \cos(Pe_4) . \cos(O'P) + \sin(Pe_4) \sin(O'P) . \cos(O'Pe_4),$$

oder

$$\cos(90^0 - c) = \cos(90^0 - \delta) . \cos(90^0 + h')$$
$$+ \sin(90^0 - \delta) . \sin(90^0 + h') . \cos(90^0 + h - \varDelta t),$$

oder

$$\sin c = -\sin\delta . \sin h' - \cos\delta . \cos h' . \sin(h - \varDelta t),$$

oder, wenn man mit Rücksicht auf die Kleinheit von c, h, h' und $\varDelta t$ die bekannten Vereinfachungen eintreten lässt:

$$c = -h' . \sin\delta - h . \cos\delta + \varDelta t . \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus gleichem Grunde dürfen wir das eigentlich sphärische Vier-

eck $O'rpO$ als eine ebene Figur ansehen, welche bei p und r rechte Winkel besitzt und deren Seiten $Op = a$, $O'p = i$ nebst dem Winkel $pOr = z$ = Zenithdistanz bekannt sind. Dies zugegeben wird man im Stande sein zu beweisen, dass

$$\left.\begin{aligned} h &= a \cdot \cos z + i \cdot \sin z \\ h' &= i \cdot \cos z - a \cdot \sin z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist, welche Ausdrücke in (4) eingeführt

$$c = -i \cdot \sin(z+\delta) - a \cdot \cos(z+\delta) + \Delta t \cdot \cos\delta$$

liefern, woraus man die Gleichung

$$\Delta t = \frac{c}{\cos\delta} + i \cdot \frac{\sin(z+\delta)}{\cos\delta} + a \cdot \frac{\cos(z+\delta)}{\cos\delta}$$

oder wenn man für z den Werth $(90^0 - \varphi)$ einführt die Gleichung

$$\Delta t = \frac{c}{\cos\delta} + i \cdot \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} + a \cdot \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

erhält, wodurch unsere Aufgabe einen Ausdruck für jede der drei Grössen: Corr. (c), Corr. (i), Corr. (a) und zwar für die obere Culmination zu finden gelöst ist, denn offenbar ist

$$\text{Corr.}(c) = \frac{c}{\cos\delta},$$

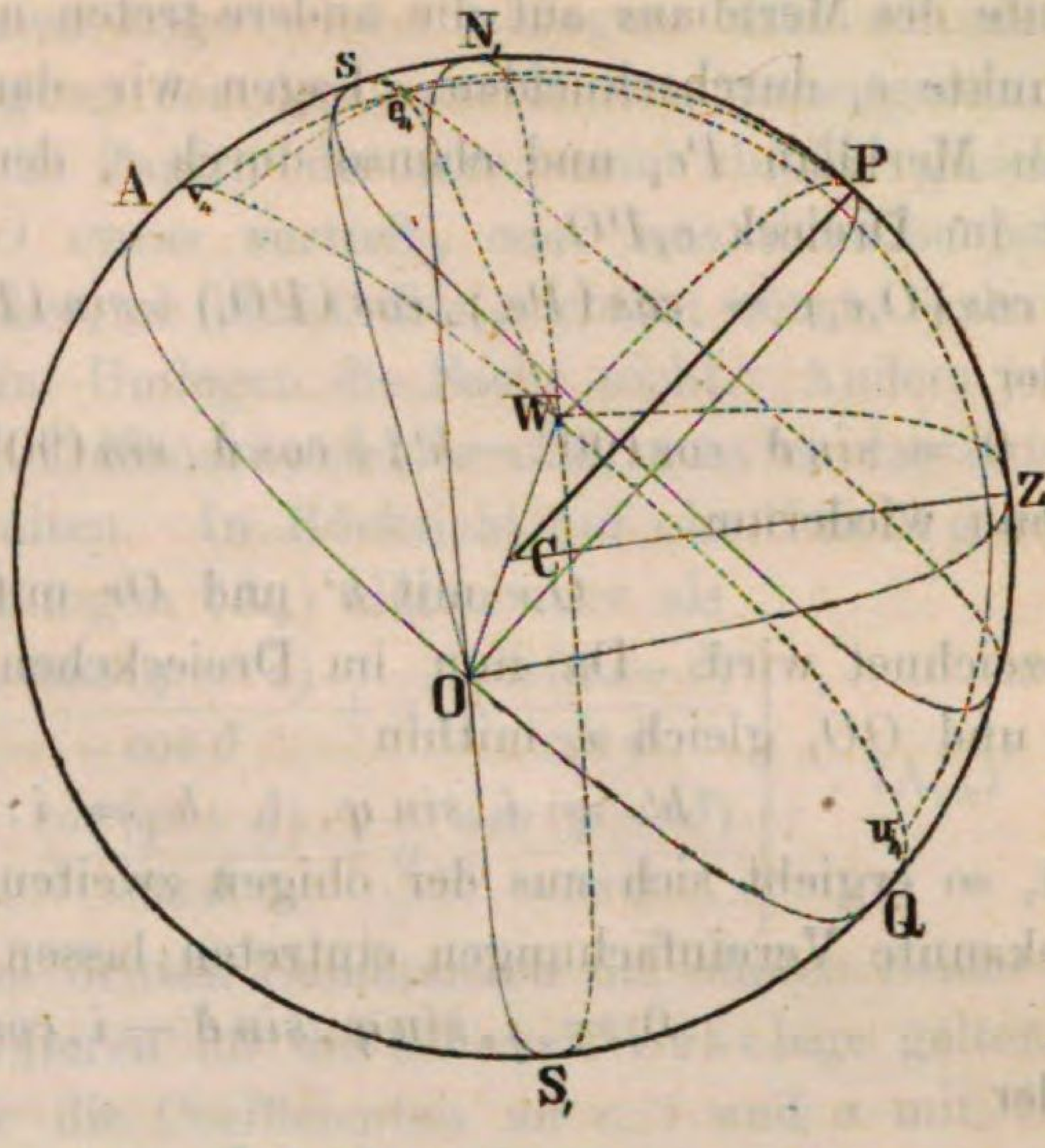
$$\text{Corr.}(i) = i \cdot \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta},$$

$$\text{Corr.}(a) = a \cdot \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta}.$$

§. 70. Aus der Gleichung (I) erkennen wir also, dass unter der Voraussetzung, die ihrer Ableitung zu Grunde lag, nämlich dass i, a und c nur kleine Winkelgrössen seien, die drei Correctionen von einander unabhängig und nur Functionen der betreffenden Fehler i, a und c sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes und der Declination des Sterns sind. Es folgt daraus aber, dass wir, um zum Ausdrucke für Δt zu gelangen, auch die Fehler einzeln hätten voraussetzen können, um so die Ausdrücke für die einzelnen Correctionen zu finden und dann die Summe dieser drei Correctionen hätten nehmen können. Sollen wir z. B. den Einfluss des Fehlers c und zwar für die untere Culmination finden, so werden, da wir blos eine Rotation der Erde um ihre Axe zulassen wollen, die Linien CP und Cs sowie der Aequator und ebenso der kleinere Kreis k ihre Lage unverändert beibehalten, während die Zenithaxe CZ Fig. 71 in die Lage CZ_1 Fig. 73 gelangt, welche Veränderung auch den Horizont $SONW$ in die neue Lage N_1OS_1W bringt, ohne dass hiermit eine Aenderung in der Richtung der Durchschnittslinie OW verbunden wäre. Fiel ausserdem in Fig. 71 der Kreis u_4v_4 auf die Osthälfte der Himmelskugel, so fällt er jetzt auf die Westhälfte und schneidet den Kreis k in einem Punkte e_4 durch

derart, dass wenn wir wiederum durch diesen und P einen grössten Kreis Pe_4 legen, der Winkel APe_4 die vom Collimationsfehler allein veranlasste Abweichung darstellt, die wir mit Δt_c bezeichnen wollen. Legen wir durch OW und e_4 einen grössten Kreis, so schneidet dieser den Meridian in einem Punkte, der jetzt wo nur ein Fehler c vorhanden ist, als mit s zusammenfallend betrachtet werden muss, da ferner $se_4 = c$ jetzt mit dem negativen Vorzeichen genommen werden muss, so ist

Fig. 73.



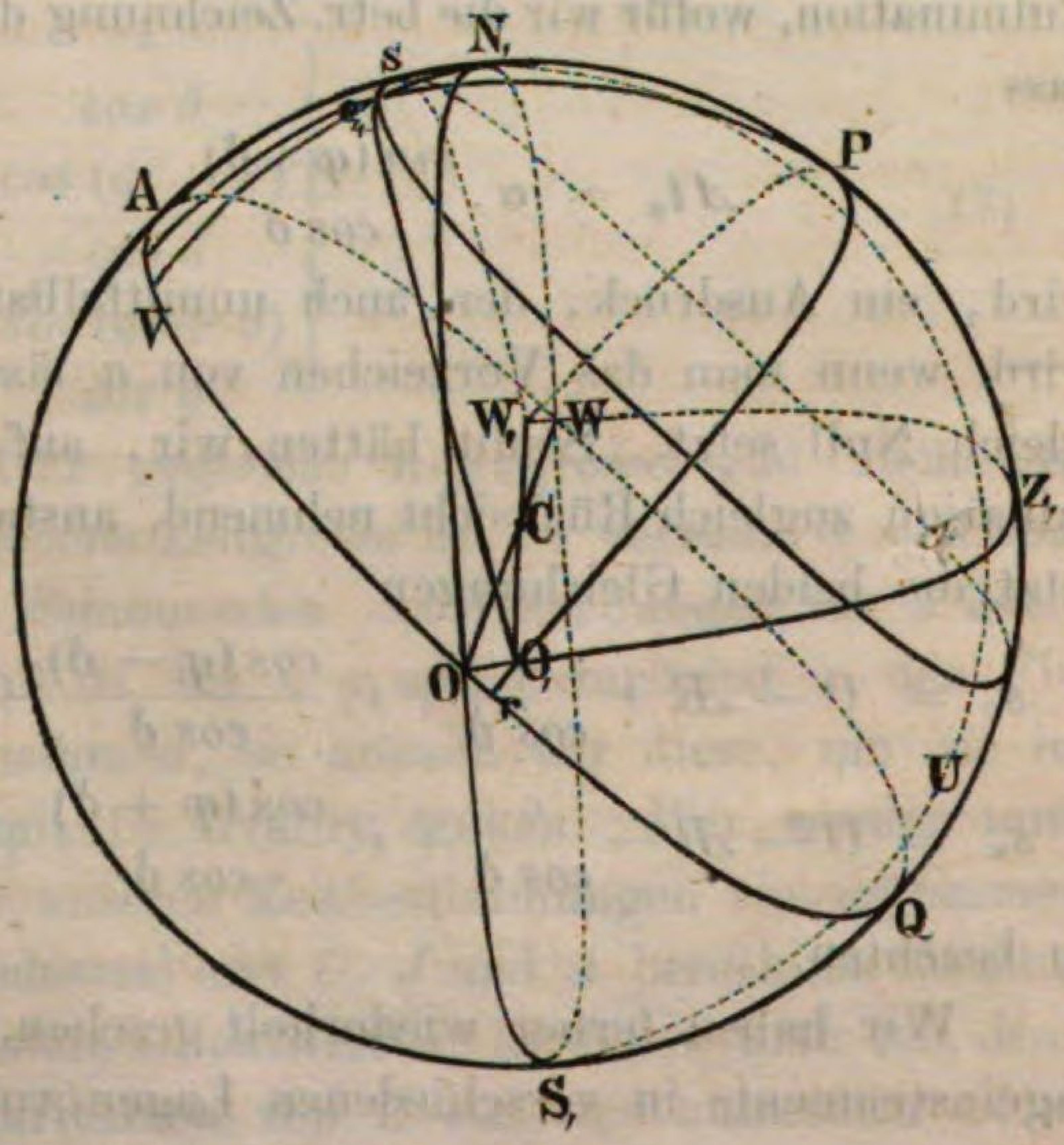
$$\sin(-se_4) = \sin(-c) = \cos\delta \,.\, \sin \Delta t$$

d. h.

$$\Delta t_c = -\frac{c}{\cos\delta}.$$

Um ebenso einzeln z. B. die Corr. (i) für die untere Culmination abzuleiten, beachten wir, dass das Zenith und der Horizont in eben solche Lagen gelangt wie in der Fig. 73; ferner ist klar, dass wenn die Axe $O'W'$ Fig. 72 eine Drehung von 180^0 um CP vollendet, dann auf der Ostseite des Himmels das Ende O, Fig. 74 um die Bogenstrecke $OO_r = i$ über den Horizont und umgekehrt das Westende um die Bogenstrecke $WW_r = i$ tiefer unter den Horizont N, WZ, S, O gelangt. Dies zugegeben wird nun ein um O_r beschriebener grösster Kreis UV noth-

Fig. 74.



wendig durch S_1 und N_1 laufen, d. h. im Punkte N_1 von der einen Seite des Meridians auf die andere treten und hier den Kreis k in einem Punkte e_4 durchschneiden. Legen wir dann durch e_4 und P wieder den Meridian Pe_4 und ebenso durch e_4 den grössten Kreis $O_1e_4W_1$, so ist im Dreieck e_4PO_1

$$\cos(O_1e_4) = \cos(Pe_4).\cos(PO_1) + \sin(Pe_4).\sin(PO_1).\cos(e_4PO_1)$$

oder

$$0 = \sin\delta.\cos(90^0 - h') + \cos\delta.\sin(90^0 - h').\cos(90^0 + h - \varDelta t);$$

wenn wiederum

$$O_1r \text{ mit } h' \text{ und } Or \text{ mit } h$$

bezeichnet wird. Da nun im Dreieckchen OrO_1 Winkel rOO_1 gleich φ und OO_1 gleich i, mithin

$$h' = i.\sin\varphi, \qquad h = i:\cos\varphi$$

ist, so ergiebt sich aus der obigen zweiten Gleichung, wenn wir erst bekannte Vereinfachungen eintreten lassen:

$$0 = i.\sin\varphi.\sin\delta - i.\cos\varphi.\cos\delta + \varDelta t_i.\cos\delta$$

oder

$$\varDelta t_i = \frac{i.\cos(\varphi+\delta)}{\cos\delta}.$$

Zu demselben Resultate würden wir gelangt sein, wenn wir in den allgemeinen Gleichungen (4) und (5) die Grössen c und a gleich Null, sowie i und z negativ gesetzt hätten. Denn diese letztere Annahme bedingt auch die richtigen Vorzeichen von h' und h, wie sie so eben in die fürs Dreieck e_4PO_1 geltende Gleichung eingeführt wurden.

Aus einer ähnlichen Betrachtung ergiebt sich für die untere Culmination, wofür wir die betr. Zeichnung dem Leser auszuführen rathen, dass

$$\varDelta t_a = a.\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos\delta}$$

wird, ein Ausdruck, der auch unmittelbar aus (4) und (5) erhalten wird, wenn man das Vorzeichen von a lässt, z negativ und c und i gleich Null setzt. Somit hätten wir, auf die obere und untere Culmination zugleich Rücksicht nehmend, anstatt der Gleichung (A) S. 326 jetzt die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} s_o &= O - AR + \frac{c}{\cos\delta} + i.\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} + a.\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \\ s_u &= O - AR - \frac{c}{\cos\delta} + i.\frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos\delta} + a.\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos d} \end{aligned}\right| \quad \ldots (A_*)$$

zu beachten.

Wir haben ferner wiederholt gesehen, dass das Fernrohr des Passageinstruments in verschiedenen Lagen vorkommt, insbesondere dass

sich dasselbe „umlegen“ d. h. aus dem Axenlager herausheben und in einer um 180° verschiedenen Lage wieder auflegen lässt. Findet dies statt, so bleibt die Neigung der Axe unverändert, vorausgesetzt, dass wir annehmen dürfen: die Zapfen der Axe seien absolut gleich dick. Ist also das Ostende O etwas vertieft, oder was dasselbe bedeutet das Westende etwas höher, so bleibt dies auch so; ebenso ändert auch der Azimuthalfehler beim Umlegen die Sache nicht. Anders jedoch verhält es sich mit dem Collimationsfehler und muss er das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. In Rücksicht auf ein Umlegen müssen demnach obige Gleichungen (A_*) allgemeiner als

$$\left.\begin{aligned} s_o &= O - Æ \pm \frac{c}{\cos\delta} + i.\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} + a.\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \\ s_u &= O - Æ \mp \frac{c}{\cos\delta} + i.\frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos\delta} + a.\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos\delta} \end{aligned}\right\} \quad . \; (A_{**})$$

geschrieben werden, wobei am dritten Summanden die oberen Zeichen für die Kreis-Ost-, die unteren für die Kreis-Westlage gelten.

§. 71. Bezeichnen wir die Coefficienten an c, i und a mit C, J, A und fügen diesen Buchstaben ein o oder u hinzu, je nachdem die obere oder untere Culmination gemeint ist, so bestehen, abgesehen vom Vorzeichen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_o &= \frac{1}{\cos\delta} \\ J_o &= \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \\ A_o &= \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (6)$$

$$\left.\begin{aligned} C_u &= \frac{1}{\cos\delta} \\ J_u &= \frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos\delta} \\ A_u &= \frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (7)$$

Da aber O eine von der Uhr gegebene Zeitgrösse und auch $Æ$ eine durch ein Jahrbuch gegebene Zeitgrösse ist, so versteht es sich von selbst, dass die drei übrigen Summanden der Gleichungen für s auch Zeitgrössen sein müssen, und da wir i, a und c zunächst in den Figuren als Winkelgrössen annahmen, so müssen wir diese, um sie in Zeitgrössen zu verwandeln, mit 15 dividirt denken. Wir werden nun weiter erfahren, dass es bei unseren Zeitbestimmungen ein mühsames Geschäft wäre, wenn man jedesmal erst C, J und A berechnen müsste, und pflegt man auch hier Tafeln zu entwerfen, in denen man mit dem Argument δ einmal die Logarithmen von C etc. und ausserdem C, J

und A selbst direct oder nach einer Interpolation findet, Tafeln, die natürlich nur für eine bestimmte Polhöhe passen. Diese Tafeln zerfallen zunächst zweckmässig in zwei Abtheilungen mit der Ueberschrift:

„Obere Culmination“

und

„Untere Culmination“.

Vor allem aber fragt es sich: was setzen wir für φ und δ für Werthe? Ist z. B. für Marburg, was φ anlangt, die

scheinbare Breite $\varphi = 50^0\ 48'\ 47''$

oder die

geocentrische „ $\varphi_0 = 50\ 37\ 30$

anzunehmen; ist ferner das δ als scheinbare oder als wahre Declination in Rechnung zu nehmen?

Wir haben im Kap. IV u. V hinlänglich erläutert, wie bei Fixsternen — und auf solche kommt es hier zunächst nur allein an — die jährliche Aberration, die Präcession, Nutation und eigene Bewegung dazu beitragen, dass ein solcher Stern unter einer anderen Declination erscheint, als ohne diese Einflüsse und ist darauf hingewiesen worden, dass im Naut. Alm. z. B. die scheinbare AR und δ zu finden ist und zwar im Jahrgang: 1870 von Seite 330—337 für α Urs. min. und δ. Urs. min., und von S. 338—387 für eine grosse Anzahl anderer Sterne. Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass wir jetzt die scheinbaren Werthe von AR und δ in Rechnung zu ziehen haben, denn wir machen ja unsere Beobachtungen an Sternen, die den genannten Einflüssen unterworfen sind. Ausser den genannten Einflüssen müssen wir aber auch die atmosphärische Strahlenbrechung in Rechnung nehmen und ausserdem auch noch die tägliche Aberration berücksichtigen. Der Einfluss der letzteren ist Kap. IV §. 34 betrachtet worden, und haben wir, da bei der Beobachtung im Meridian $T = AR$ zu setzen ist, jetzt die Gleichungen (29) Kap. IV anzuwenden, woraus folgt, dass für δ die tägliche Aberration gleich Null ist und nur für die AR berücksichtigt zu werden braucht. Für den Polarstern würde $\Delta AR'$ bei einer Polhöhe gleich der von Marburg $0^s,56$ betragen, und werden wir diesen Einfluss für die meisten Sterne ausser Acht lassen dürfen.

Was den Einfluss der astronomischen Strahlenbrechung anlangt, so haben wir dessen Wesen ebenfalls im Kap. IV kennen gelernt. Es würden aber sehr weitläufige Rechnungen auszuführen sein, wenn wir bei jedem Fixstern die genaue Berechnung der Refraction vornehmen müssten, und wenn wir uns bei der Berechnung von C, J, A nicht der mittleren Refraction, wie solche aus der Taf. V. (A) unmittelbar zu entnehmen ist, bedienen dürften.

Was φ anlangt, so ist auch einleuchtend, dass wir die scheinbare Breite zu nehmen haben, denn wir operiren ja mit einem Instrumente, dessen Axe mit der Libelle horizontal gerichtet wird, und ist demnach die Zenithrichtung einerlei mit der Richtung *Md* Fig. 43 oder der Richtung der Schwere.

Dies vorausgesetzt, wollen wir eine

Aufgabe lösen, nämlich den Werth von J_n berechnen, falls wir am 17. Januar 1870 in Marburg den Stern α Urs. maj. beobachtet hätten. Auf Seite 358 im Naut. Alm. findet sich für

α Urs. maj. 1870 11. Jan. das $\delta = 62^0\ 26'\ 54'',8$

21. „ „ „ $= 62\ \ 26\ \ 55\ ,8$

und ist mithin

17. „ „ $\delta = 62^0\ 26'\ 55'',4.$

Nach der Gleichung für a_4 auf S. 297 ist aber der Höhenkreis in der *KO*-Lage einzustellen auf

$$v_4 = 180^0 + 50^0\ 48'\ 47'' + 62^0\ 26'\ 55'' = 293^0\ 15'\ 42''$$

d. h. die Zenithdistanz ist

$$z = 360^0 - 293^0\ 15'\ 42'' = 66^0\ 44'\ 18''$$

oder die Höhe

$$h = 90^0 - 66^0\ 44'\ 18'' = 23^0\ 15'\ 42''$$

welches h man auch direct aus v_4 durch Subtrahiren von 270^0 erhalten hätte. Für diese Höhe ist nach Taf. V. (A) die mittlere Refraction

$$\varrho = 2'\ 13'',8$$

und da, wie die Fig. 62 lehrt, ein solcher Stern s_4 hierdurch etwas über den Punkt N, mithin auch über Q nach P hin gehoben, mithin Qs_4 oder δ durch die Refraction vergrössert wird, so müssen wir ϱ zu δ addiren um

$$\delta' = 62^0\ 29'\ 9'',2;\ \varphi + \delta' = 113^0\ 17'\ 56''$$

zu erhalten, demgemäss

$$J_n = \frac{\cos\,(113^0\ 17'\ 56'')}{\cos\,(62^0\ 29'\ 9'')}$$

wird und sich

$$\log\, J_n = 9{,}93258_n$$

sowie

$$J_n = -\ 0{,}8562$$

ergiebt.

Mit Rücksicht hierauf ist es nun zweckmässig, den

„Tafeln

„für die Correctionen des Passageinstruments“

die folgende Form zu geben, die durch die Köpfe der einzelnen Columnen und die für $-38^0\ 0'$ etc. beispielshalber berechneten Zahlenwerthe hinreichend verständlich sein wird.

Marburg.

A. Obere Culmination.

δ	δ'	$log\ C_o$	$log\ A_o$	$log\ J_o$	C_o	A_o	J_o
$-38^0\ 0'$	$-37^0\ 39'\ 22'$	0,10146	0,10131	8,52807	1,263	1,263	0,037
.							
.							
.							
.							
.							
$0^0\ 0'$							
.							
.							
.							
$60^0\ 0'$	$59^0\ 59'\ 51''$	0,30100	$9,50407_n$	0,29540	2,000	−0,319	1,974
.							
.							
.							
.							
.							
89^0							

Hierbei ist es hinreichend, wenn in der ersten Columne innerhalb $-38^0\ 0'$ und $+50^0$ das Argument von Grad zu Grad, innerhalb $+50^0$ bis $+60^0$ von 30 zu 30 Minuten, innerhalb $+60^0$ bis $+80^0$ in Viertelgraden und dann zwischen $+80^0$ und $+89^0$ von 5 zu 5 Minuten fortschreitet.

B. Untere Culmination.

δ	δ'	$Log\ C_u$	$Log\ A_u$	$Log\ J_u$	C_u	A_u	J_u
$+40^0\ 0'$							
.							
.							
.							
.							
.							
$50^0\ 0'$							
. 30′	$50^0\ 34'\ 43''$	0,19721	0,18858	$9,49282_n$	1,575	1,544	−0,311
51 0							
.							
.							
.							
$60^0\ 0'$	$60^0\ 2'\ 31''$	0,30158	0,27215	$9,85304_n$	2,003	1,871	−0,713
.							
.							
.							
.							
.							
$89^0\ 0'$							

Hierbei ist es hinreichend, wenn in der ersten Columne zwischen 40^0 und 50^0 in ganzen zwischen 50^0 und 60^0, in halben zwischen 60^0 und 80^0 in Viertelgraden aufgestiegen wird, und wenn von hier an das Argument δ sich wieder von 5 zu 5 Minuten ändert.

Der Werth von C_o sollte nach der obersten der Gleichungen (6) und (7) gleich C_u sein; da aber die Refraction bei der unteren Culmination anders wirkt, wie in der oberen, so erklären sich diese Abweichungen und sind auch die betreffenden Werthe von C_o und C_u für $\delta = 60^0\ 0'$ zu vergleichen.

Bezüglich unserer Berechnung des δ', wie wir sie oben für den Stern α Urs. maj. und eine gegebene durch die Refraction nicht beeinflusste und somit in dieser Beziehung wahre Declination $\delta = 62^0\ 26'\ 55''$ ausführten, müssen wir aber noch eine weitere nicht unwichtige Bemerkung machen und wollen wir zunächst einmal in derselben Weise, wie wir δ' aus $\delta = 62^0\ 26'\ 55''$ berechneten und ersteres gleich $62^0\ 29'\ 9''$ fanden, diese Berechnung ebenso für ein $\delta = -38^0$ in der oberen Culmination ausführen. Eine solche Declination entspricht einem Sterne s_1 Fig. 62 und ist mithin die wahre Höhe h gleich $90^0 - (\varphi + \delta) = 90^0 - 88^0\ 48'\ 47'' = 1^0\ 11'\ 13''$, für welche man die mittlere Refraction nach der Taf. V. (A) gleich $22'\ 58'',1$ und demgemäss die scheinbare Höhe $h' = 1^0\ 34'\ 11''$ und somit $\delta' = -37^0\ 37'\ 2''$ findet, ein Werth, der auffällig von dem im obigen Schema für δ' angegebenen Werthe abweicht, welcher Werth direct einer Tafel für die Coefficienten des Passageinstruments entnommen wurde, die im J. 1858 für Marburg von zwei damaligen Schülern Gerlings, den Herren: Dr. Mauritius und Dr. Auth berechnet wurden. Der Unterschied wird sich aber bald erklären lassen, wenn wir die beiden ersten Columnenüberschriften der Taf. V. (A) beachten. Diese lauten: „scheinbare Zenithdistanz" (identisch mit wirklich beobachteter) und ebenso „scheinbare Höhe", wonach die Tafeln nur dann unmittelbar zur Anwendung kommen können, wenn z' oder h' gegeben ist und durch Subtraction der mittleren Refraction ϱ die wahre Höhe h bzw. durch Addition von ϱ die wahre Zenithdistanz z gefunden werden soll. In unserem gegenwärtigen Falle liegt aber die Sache gerade umgekehrt, indem nicht δ' bzw. h', sondern die wahre Declination δ gegeben ist und h' bzw. δ' zu suchen ist. Besitzen wir nun Refractionstafeln, wobei das Argument nicht h' sondern h ist, so würde man durch Addition von einem ϱ_* zu h das h' und hiernach δ' finden; ist dies aber nicht der Fall und liegen uns nur Tafeln mit dem Argumente h' vor, so bedarf die Sache einer weiteren Ueberlegung, denn es wird sich sofort zeigen, dass ϱ_* von ϱ sehr merklich abweichen kann. Am einfachsten kommen wir hierbei aber zur Ent-

scheidung, wenn wir uns ein Stück einer Tabelle berechnen, die neben h' das h enthält und mittelst derer wir umgekehrt aus h nun durch Interpolation h' finden können. Benutzen wir die mittlere Refraction der Taf. V. (A), so ergiebt sich

h'	h
1° 0′	0° 35′ 35″,4
10	46 53 ,3
20	58 4 ,4
30	1° 9 9 ,1
40	20 8 ,1
50	31 2 ,0

Unser oben gegebenes h war gleich 1° 11′ 13″ und weicht von h = 1° 9′ 9″,1 um 2′ 3″,9 = 123″,9 ab; da ferner zwischen den Werthen h = 1° 9′ 9″,8 und h = 1° 20′ 8″,1, denen eine Differenz von 10′ = 600″ scheinbarer Höhe entspricht, 10′ 59″,0 = 659″,0 liegen, so beträgt die betreffende Correction, um von h auf h' zu kommen

$$600'' \cdot \frac{123,9}{659} = 112'',8 = 1' \, 52'',8$$

demgemäss das gesuchte

$$h' = 1^0 \, 30' + 1' \, 52'',8 = 1^0 \, 31' \, 52'',8$$

ist, während das unter unmittelbarer Benutzung der Taf. V. (A) gefundene h' gleich 1° 34′ 11″ wurde. Da der Werth 1° 31′ 52″,8 offenbar der richtige ist, so erhalten wir mit ihm δ' = — 39° 11′ 13″ + 1° 31′ 52″,8 = — 37° 39′ 20″,2, ein Werth, der von dem in dem obigen Schema aufgeführten Werthe nur um 1″,8 abweicht, daher rührend, dass bei der oben angestellten Interpolation die zweiten Differenzen unberücksichtigt blieben.

Benutzen wir also die Taf. V. (A) unmittelbar und sehen die Werthe der mittleren Refraction, die nur als Subtrahend dienen dürfen, auch als Summanden an, so wäre in unserem Beispiele für δ = — 38° 0′ 0″ ϱ = + 22′ 58″,1 während das eigentlich n. Taf. A S. 334 zu verwendende ϱ_* gleich + 20′ 38″ ist.

Dass diese Unterschiede für grössere Höhen wegfallen und man demnach die Tafel V. (A) von einer bestimmten Stelle an unmittelbar benutzen darf, wollen wir sofort zeigen, indem wir ϱ und ϱ_* für ein h = 10° berechnen. Es ist für

h'	h
9° 50′	9° 44′ 38″,7
10 0	54 43 ,8
10 10	4 48 ,8

und weicht das gegebene h von h = 10° 4′ 48″,8 um 4′ 48″,8 = 288″,8

ab, demgemäss die betreffende Correction, da die benachbarten h um $10' \, 5'',0 = 605'',0$ differiren, gleich

$$600 \cdot \frac{288,8}{605} = 286'',4 = 4' \, 46'',4$$

wird, so dass $h' = 10^0 \, 10' - 4' \, 46'',4 = 10^0 \, 5' \, 13'',6$ und demgemäss $\varrho_* = 5' \, 13'',6$ wird, welcher Werth von $\varrho = 5' \, 16'',2$ nur noch um $2'',6$ abweicht. Für $h = 20^0$ ist $\varrho_* = 2' \, 37'',0$ und $\varrho = 2' \, 37'',3$, so dass wir von $h = 20^0$ an ϱ und ϱ_* als identisch ansehen dürfen. Da nun bis zu diesem Werthe von h es wünschenswerth ist, auch eine Tabelle mit dem Argumente h zu besitzen, so wurde diese berechnet und findet sich als Taf. V (A_*) in unserem Anhange.

§. 72. Die Fig. 68, b zeigte uns eine Fadenplatte, worauf ausser dem Mittelfaden noch je drei Seitenfäden parallel zu ersterem gezogen waren, deren Bedeutung sich sofort erkennen lässt. Denn denken wir die Seitenfäden so gezogen, dass der 1[te] und 7[te], 2[te] und 6[te], 3[te] und 5[te] genau gleich weit vom Mittelfaden abstehen, und nennen die **Durchgangszeiten** eines Sterns durch die sieben Fäden τ_1, τ_2, τ_3 τ_4, τ_5, τ_6, τ_7, wobei also τ_4 identisch ist mit unserem bisherigen O, so können wir aus je zwei symmetrisch liegenden Beobachtungen die Mittelwerthe

$$\left.\begin{aligned} \tau'_4 &= \frac{\tau_1 + \tau_7}{2} \\ \tau''_4 &= \frac{\tau_2 + \tau_6}{2} \\ \tau'''_4 &= \frac{\tau_3 + \tau_5}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ableiten, die mit τ_4 zusammen ein Gesammtmittel

$$t = \frac{\tau'_4 + \tau''_4 + \tau'''_4 + \tau_4}{4} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

als Werth der Durchgangszeit liefern der genauer ist, wie die einmalige Beobachtung $\tau_4 = O$ sein kann.

Die den Gleichungen (8) und (9) zu Grunde liegende Voraussetzung ist aber im allgemeinen nicht statthaft, indem die Abstände des Fadens I von IV und VII von IV etc. nicht genau gleich sind, so dass z. B. das Mittel $\tau'_4 = \frac{\tau_1 + \tau_7}{2}$ etc. nicht die genaue Durchgangszeit durch den Mittelfaden vorstellt, sondern mehr oder weniger nach τ_1 oder τ_7 hinneigt, je nachdem der Abstand IV—I grösser oder kleiner VII—IV ist, und sucht man daher auf einem anderen Wege zum Ziele zu gelangen. Da der Collimationskreis (siehe die Bemerkungen am Schlusse des §. 66) den Parallelkreis k des Sterns s angenommenermaassen auf der ganze Strecke zwischen ε_1 und ε_7 berührt und die Punkte

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4 \ldots \varepsilon_7$$

wie auch schon Seite 325 erwähnt, identisch sind mit

$$e_1 \ldots e_4 \ldots e_7\,,$$

so können wir die Bogen

$$e_1\,e_4\,;\; e_2\,e_4\,;\; e_3\,e_4\,;\; e_5\,e_4\,;\; e_6\,e_4\,;\; e_7\,e_4$$

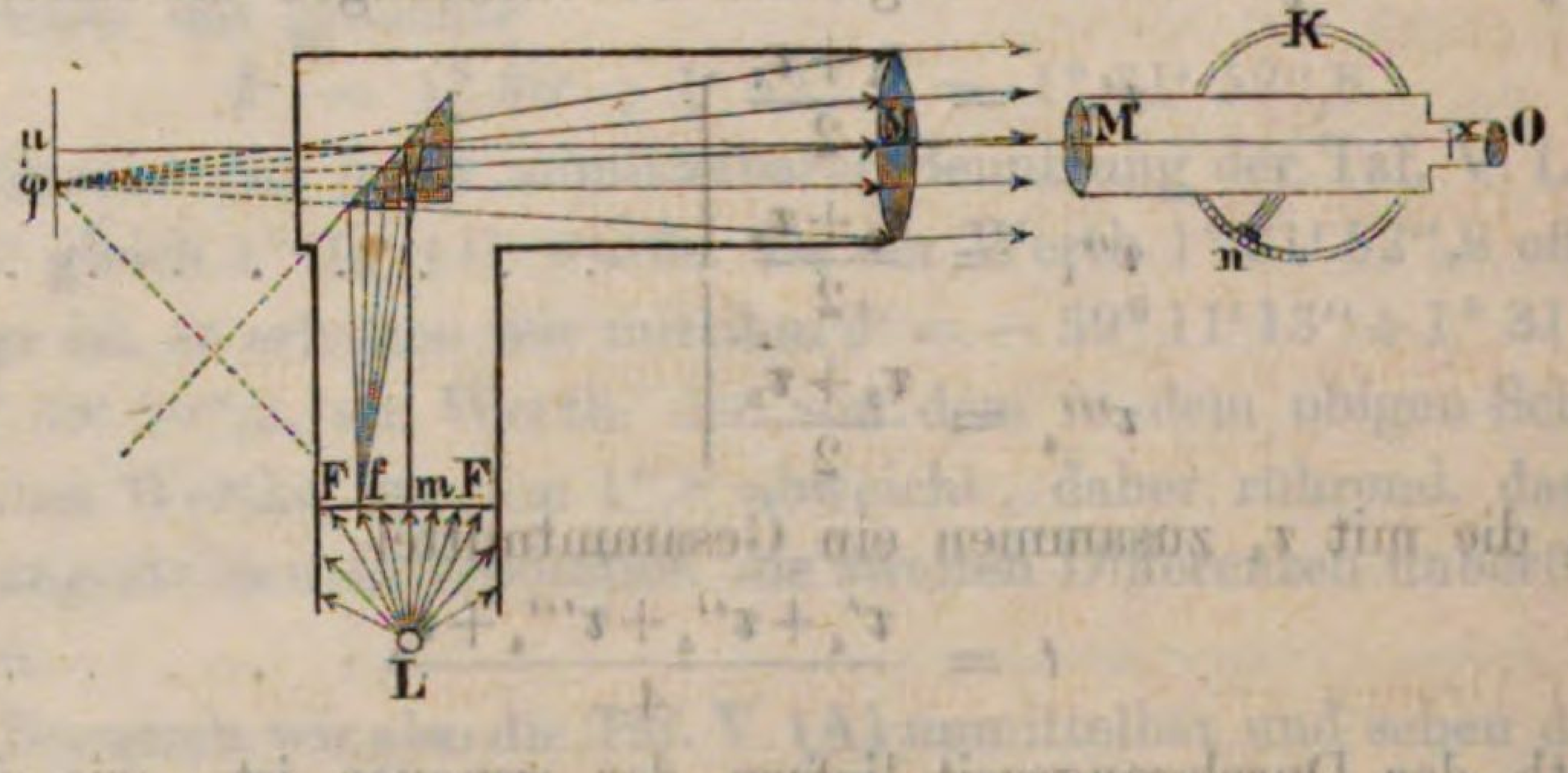
als das Maass der Winkel betrachten, welche die Seitencollimationslinien mit der Hauptcollimationslinie bilden. Da ferner diese Winkel, welche die Linien Ce_1 und Ce_4 .... mit einander bilden, identisch sind mit den Winkeln, unter welchen die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden und zwar von einem in der Mitte M des Objectivs befindlichen und nach der Fadenplatte blickenden Auge gesehen werden können, so nennt man sie auch die

„Fädendistanzen“

sei es nun, dass dieselben als Winkel gedacht, oder nach der Division mit 15 als Zeitgrössen aufgefasst werden, und kommt es zunächst darauf an, diese Fädendistanzen bestimmen zu lernen.

Die directeste Methode, sie zu messen, rührt von Gauss her und möge näher durch die Figur 75 erläutert werden. Die Methode

Figur 75.



setzt einen zweiten genauen Winkelmesser, also etwa einen Theodolithen voraus, dessen Fernrohr so nach dem Fernrohr des Passageinstruments gerichtet wird, dass die Objective M und M' einander zugekehrt sind, und die Collimationslinien beider Fernröhre möglichst in eine und dieselbe horizontale Gerade fallen. Ist diese Stellung erreicht, so leuchtet ein, dass wenn von einem Punkte f der Fadenplatte F divergente Strahlen auf das Prisma und von hier auf die Linse M des Passageinstruments fallen: diese jenseits M parallel der betreffenden Seitencollimationslinie φM nach M' hin weiter gehen. Ist demnach das Fernrohr M' auf Unendlich eingestellt, so wird das beobachtende Auge O in der Brennebene x des Objectivs M' ein deutliches Bild der Fadenplatte F erhalten, dessen hinreichende Helligkeit dadurch erzielt wird, dass man das Ocularglas des Passageinstruments weg-

nimmt und das helle Tageslicht auf F fallen lässt, oder so, dass direct vor das, von der Ocularlinse befreite, Ocularrohr eine Lampe L mit einem Kugelschirm vorgesetzt wird. Die Messung des Winkels $\varphi M\mu$ geschieht dann so, dass man zunächst die Mitte m des Fadenkreuzes F mit dem Mittelfaden x des Theodolithen in Coincidenz bringt, mittelst des Nonius n den Horizontalkreis K abliest, dann das Theodolithenfernrohr mit Hilfe der Horizontalmicrometerschraube dreht bis $M'x \parallel \varphi M$ zu liegen kommt und wieder abliest. Bedeuten dann a und a' diese Ablesungen am Nonius von K, so ist die betreffende Fädendistanz gleich $(a' - a)$. Da es sich hierbei aber nur um kleine Winkel handelt, wird eine oftmalige Wiederholung einer solchen Messung nöthig sein. Noch bequemer aber wird man zum Ziele gelangen, wenn der Theodolith ein sogenannter „Repetitionstheodolith" ist, d. h. wenn er zwei Horizontalmicrometerschrauben S und S' besitzt, von denen S den Horizontalkreis mit der Alhidade, S' aber nur die Alhidade allein bewegt. Die ganze Operation ist dann folgende:

1) Drehen an S bis zur Einstellung von m mit x;
   Ablesung am Nonius gleich a.
2) Drehen an S' bis zur Einstellung von f mit x;
   Stand des Nonius gleich (a').
3) Drehen an S bis zur Einstellung von m mit x;
   Stand des Nonius gleich (a').
4) Drehen an S' bis zur Einstellung von f mit x;
   Stand des Nonius gleich (a'').
5) Drehen an S bis zur Einstellung von m mit x;
   Stand des Nonius gleich (a'').
6) Drehen an S' bis zur Einstellung von f mit x;
   Ablesung am Nonius gleich a'''.

Die eingeklammerten Standzahlen, von denen je zwei identisch sind, werden nicht abgelesen, sondern blos a und a''', und leuchtet ein, dass $a''' - a$ gleich der dreifachen Fädendistanz, mithin diese selbst gleich $\frac{a''' - a}{3}$ ist. Anstatt dreimal können wir aber auch 5- oder 10mal repetiren, und erhielten dann, wenn die letzte Ablesung b ist, in $\frac{b - a}{10}$ einen Werth, der bequemer gefunden wurde, als wenn wir neben den 10 Einstellungen auch 10 Ablesungen vorzunehmen gehabt hätten, abgesehen davon, dass bei der Repetition auch etwaige Theilungsfehler der Kreise möglichst unschädlich gemacht werden.

Beispiel. Eine an unserem Passageinstrumente mit Hilfe eines

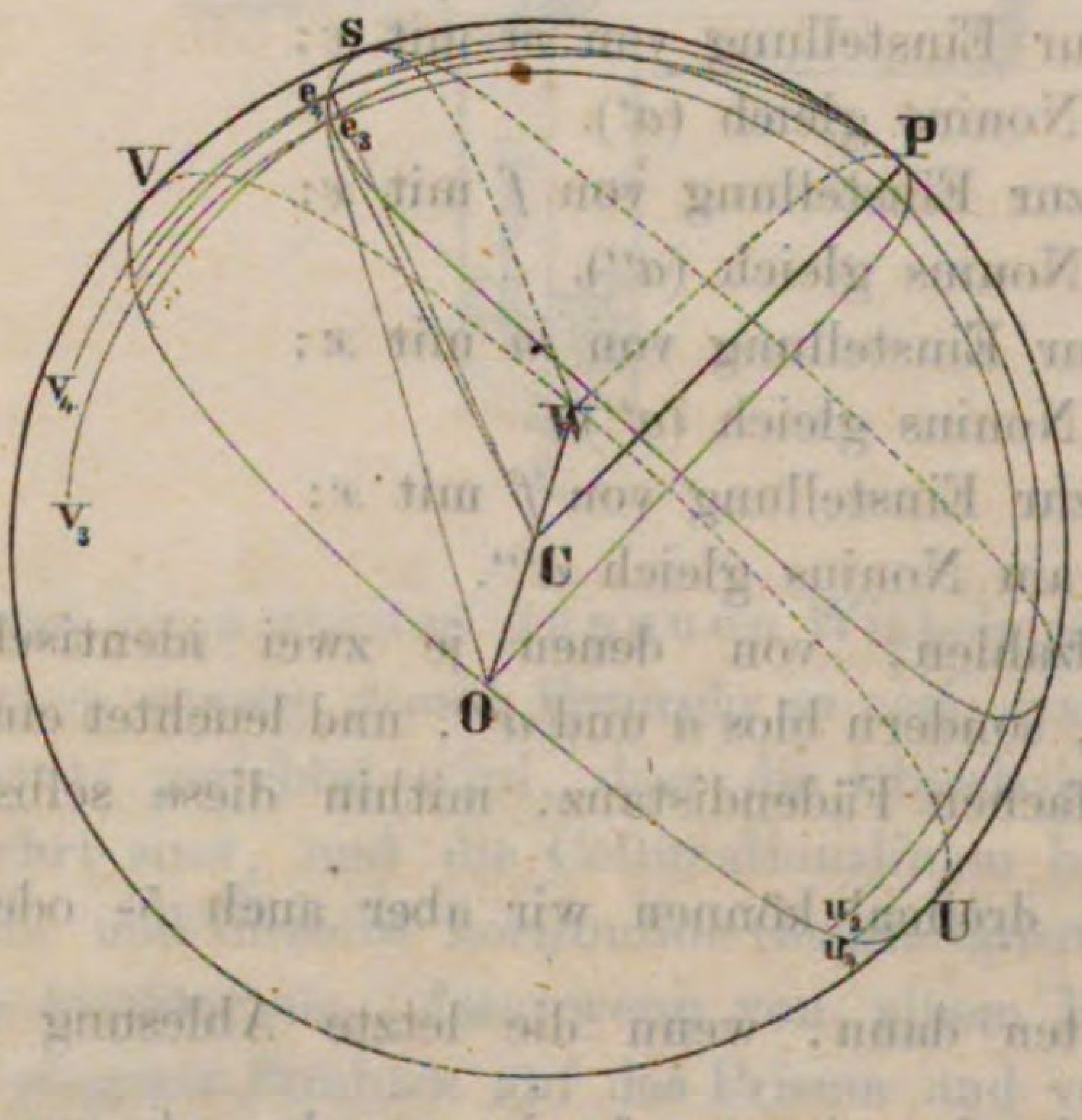
Ertel'schen Repetitionstheodolithen vorgenommene Messung ergab nach je 10maliger Repetition und 10maliger Wiederholung der ganzen Operation die Fädendistanz:

VII—IV	VI—IV	V—IV	IV—III	IV—II	IV—I
11′ 6″,0	7′ 34″,0	3′ 43″,0	3′ 43″,5	7′ 27″,5	11′ 12″,5
8 ,0	37 ,5	39 ,0	34 ,5	32 ,0	15 ,0
8 ,5	33 ,0	40 ,0	38 ,0	29 ,5	11 ,0
9 ,0	30 ,0	44 ,5	44 ,0	24 ,0	10 ,5
10 ,5	32 ,0	42 ,5	43 ,0	30 ,5	10 ,5
8 ,0	29 ,0	39 ,0	43 ,0	25 ,0	9 ,5
6 ,5	30 ,0	44 ,0	40 ,5	26 ,5	9 ,0
8 ,5	30 ,5	40 ,0	40 ,5	31 ,5	11 ,0
6 ,0	33 ,0	45 ,0	43 ,0	27 ,5	14 ,0
8 ,5	32 ,0	42 ,0	36 ,5	31 ,0	13 ,0
79 ,5	321 ,0	419 ,0	406 ,5	285 ,0	116 ,0

Mittel = 11′ 7″,95; 7′ 32″,10; 3′ 41″,90; 3′ 40″,65; 7′ 28″,50; 11′ 11″,60.

Eine andere Methode, die Fädendistanzen zu bestimmen, setzt die Beobachtung von Fixsterndurchgängen im Meridian voraus und zwar, wie wir sehen werden, am besten von einem Fixstern, der nahe am Pol steht.

Fig. 76.



In Fig. 76 stellt UV den grössten Kreis des Meridians vor, $u_4 v_4$ und $u_3 v_3$ dagegen zwei zu UV parallel liegende kleinere Kreise, die von der Hauptcollimationslinie Ce_4 (der Allgemeinheit wegen nehmen wir nämlich an, es existire ein Collimationsfehler) und der Seitencollimationslinie Ce_3 bei der Rotation um OW beschrieben würden, so dass auf dem Kreise k das Bogenstück $e_3 e_4$ = Fädendistanz III — IV $e_4 s$ = Collimationsfehler c ist und wir demgemäss den Collimationsfehler c auch als die Fädendistanz zwischen dem richtig und dem falsch liegenden Verticalmittelfaden ansehen können. Legen wir nun durch OW und s den grössten Kreis, den wir den Collimationskreis genannt haben und der, wie schon wiederholt bemerkt, auch durch alle die Punkte s, e_4, e_3 ... des Kreises k lauft, legen wir ebenso durch P einerseits und andererseits durch e_4 und e_3 grösste

Kreise, so stellt der Winkel

$$e_3 P e_4 = \Delta\tau_3$$

in Zeit ausgedrückt, die Zeit vor, welche der Stern s braucht, um während der Drehung des Beobachters um CP vom Faden III zum Faden IV zu gelangen, während der Winkel

$$e_3 C e_4 = f_3$$

die Fädendistanz III—IV bedeutet. Demgemäss ist im sphärischen Dreieck $e_3 P e_4$

$$\frac{\sin(\Delta\tau_3)}{\sin 90^0} = \frac{\sin f_3}{\sin(90 - \delta)}$$

wenn δ die Declination des Sterns bedeutet, oder

$$\sin(\Delta\tau_3) = \frac{\sin f_3}{\cos\delta}.$$

Lassen wir die nähere Bezeichnung am $\Delta\tau$ und f weg, so gelten die allgemeinen Gleichungen:

$$\sin(\Delta\tau) = \frac{\sin f}{\cos\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

und

$$\sin f = \sin(\Delta\tau)\cos\delta \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

als die Gleichungen, aus denen einerseits $\Delta\tau$ berechnet werden kann, wenn f, oder umgekehrt f sich finden lässt, wenn $\Delta\tau$ gegeben ist.

Diese Gleichungen lehren, dass f und $\Delta\tau$ einerlei werden, wenn $\delta = 0$, d. h. wenn der Stern im Aequator steht. Hieraus würde nun die einfachste Methode der Fädendistanzbestimmung sich ergeben, darin bestehend, dass man einen Aequatorialstern durchs Fadenkreuz gehen liesse und die Durchgangszeiten $\tau_1, \tau_2 \ldots$ notirte, wobei dann $(\tau_4 - \tau_1) = \Delta\tau_1$, $(\tau_4 - \tau_2) = \Delta\tau_2 \ldots$ gleich $f_1, f_2 \ldots$ letztere Grössen auch in Zeit gedacht, wäre. Aber diese Methode führt nicht zum gewünschten Ziele, weil ein solcher Stern zu rasch durchs Gesichtsfeld hindurch geht und man nicht im Stande ist, die geringen Unterschiede, die zwischen f_1 und f_7, f_2 und $f_6 \ldots$ bestehen, mit Sicherheit festzustellen. Man wählt vielmehr umgekehrt einen Stern, der nahe am Pol steht und der lange Zeit gebraucht, um das Gesichtsfeld zu durchlaufen. Insbesondere werden hierbei α Urs. min. (Polaris) und δ Urs. min. benutzt, von denen ersterer im J. 1870 eine mittleres $\delta = +88^0\,36'\,58'',74$, letzterer $= +86^0\,36'\,21'',06$ besass. Da nun nach unserer ersten Bestimmungsmethode der Fädendistanzen auf S. 340 $f_1 + f_7 = 11'\,7'',95 + 11'\,11'',60 = 22'\,19'',55$ gefunden wurde, so berechnet sich die ganze Zeit $\Delta\tau$ für den Durchgang zwischen I und VII von α. Urs. min. nach der Gleichung

$$\sin\Delta\tau = \frac{\sin(22'\,19'',55)}{\cos\delta}$$

und hieraus

$$\varDelta\tau = 15^0\ 28'\ 52'' = 1^h\ 1^m\ 55^s.$$

Insofern diese beiden Sterne häufig in Betracht kommen, ist es zweckmässig, ein Täfelchen zu berechnen, aus welchem man sofort die Culminationszeit für einen gewissen Ort ersehen kann. Ein solches Täfelchen findet sich für Greenwich nach mittlerer Zeit im Anhang als Taf. VIII berechnet und zwar für jeden ersten Monatstag des Jahres 1875. Die Berechnung geschieht einfach wie folgt.

1. März $\mathit{AR}\,\alpha$ Urs. min. gleich $1^h\ 11^m\ 55^s,1$

$\overset{+}{\mathit{AR}}\odot$ „ $22\ 35\ 31,9$

$2^h\ 36^m\ 23^s,2$

Corr. . . . . $19,6$ } $25^s,5$
$5,9$

$MZ = 2^h\ 35^m\ 58^s$ Nachm.

Wollte man hieraus die Culminationszeit für einen andern Ort, z. B. für Marburg haben, so müsste anstatt der Greenwicher $\overset{+}{\mathit{AR}}\odot$ ein $\overset{+}{\mathit{AR}}\odot - 5^s,7$ gesetzt werden; statt dessen kann man aber auch die Grösse $5^s,7$, nach dem sie in MZ verwandelt gedacht wird, und wodurch sie unverändert bleibt, zur Zeit für Greenwich einfach addiren, so dass für Marburg die betr. Culminationszeit am 1. März 1875 gleich

$$2^h\ 36^m\ 3^s$$

wird. Zur Uebung liese sich noch die Culminationszeit z. B. 1. Juni für δ. Urs. min. U. C. berechnen und empfehlen wir diese kleine Rechnung durchzuführen.

Wiewohl nun die längere Durchgangszeit bei α Urs. min. einerseits einen Vortheil gewährt, so ist andererseits hierin auch wieder ein Nachtheil gelegen. Denn die Durchgangszeiten $\tau_1 \ldots \tau_4 \ldots \tau_7$ müssen so bestimmt werden, dass man den Zeitmoment aufschreibt oder im Sinne behält, in welchem der Stern eben den Faden zu erreichen scheint, dass man ebenso den Moment zu bestimmen sucht, in welchem er aus der Berührung mit dem Faden auf der anderen Seite heraustritt und dann das Mittel aus diesen beiden Zeitmomenten als τ_1, τ_2 etc. ansieht. Diese Momente des Ein- und Austritts an dem Faden scharf zu bestimmen, ist schwerer, als es auf den ersten Blick scheint, da das Bild des Sterns sehr oft nicht ruhig bleibt, und leuchtet ein, dass die Beobachtungsfehler, die hierbei begangen werden, um so grösser ausfallen, je länger die Durchgangsdauer ist, d. h. je länger man darüber im Zweifel erhalten wird, ob der Stern wirklich in Berührung mit dem Faden sich befindet oder nicht. Es ist daher wohl vortheilhafter, anstatt α das δ Urs. min. zu wählen, und wurden fünf Durchgänge

dieses Sterns in der unteren Culmination, bei der er zuerst am Faden VII antrat, beobachtet. Eine solche Beobachtung ergab z. B.

9. März 1874. Berührungsmomente. Momente τ.

Berührungsmomente	Momente τ
$5^h\ 57^m\ 22^s$	
40	$5^h\ 57^m\ 31^s,0$
6 1 27	
46	6 1 36 ,5
5 43	
6 1	5 52 ,0
9 48	
10 6	6 9 57 ,0
13 59	
14 18	14 8 ,5
18 12	
30	18 21 ,0
22 26	
44	22 35 ,0

woraus man die Zeiten $\Delta\tau_7$, $\Delta\tau_6$ .... $\Delta\tau_1$ erhält, wenn man von $\tau_4 = 6^h\ 9^m\ 57^s,0$ die drei vorausgehenden und τ_4 von den drei folgenden τ abzieht, nämlich

$$\Delta\tau_7 = 12^m\ 26^s,0 = 746^s,0$$
$$\Delta\tau_6 = 8\ \ 20,5 = 500,5$$
$$\Delta\tau_5 = 4\ \ 5,0 = 245,0$$
$$\Delta\tau_4 = 4\ \ 11,5 = 251,5$$
$$\Delta\tau_2 = 8\ \ 24,0 = 504,0$$
$$\Delta\tau_1 = 12\ \ 38,0 = 758,0.$$

Aus dieser und vier anderen Beobachtungen ergaben sich nun die Werthe:

$\Delta\tau_7$	$\Delta\tau_6$	$\Delta\tau_5$	$\Delta\tau_3$	$\Delta\tau_2$	$\Delta\tau_1$	
$746^s,0$	$501^s,0$	$244^s,0$	$251^s,0$	$503^s,5$	$758^s,5$	4. Februar.
746 ,0	501 ,5	244 ,0	250 ,5	503 ,0	758 ,0	9. „
745 ,5	501 ,0	246 ,0	250 ,5	503 ,5	758 ,0	25. „
746 ,0	500 ,5	245 ,0	251 ,5	504 ,0	758 ,0	9. März.
747 ,0	502 ,0	246 ,5	250 ,5	504 ,0	758 ,0	13. „

Um nun gemäss der Gleichung (11) die Werthe f berechnen zu können, müssten wir jeden Zeitwerth $\Delta\tau$ mit 15 multipliciren, um die betreffenden Winkelwerthe zu erhalten; sodann müssten wir, da δ veränderlich ist, für jeden der fünf Reihen das δ, wie es am Tage der Beobachtung war, benutzen, so dass wir im Ganzen 5.6 oder 30mal die Gleichung (11) auszurechnen hätten, um so die fünf Reihen für die f zu erhalten, aus denen schliesslich die Mittelwerthe $f_1 \ldots f_7$ durch Division mit 5 abzuleiten wären. Da jedoch die Endbeobach-

tungen zeitlich nicht weit auseinander liegen, so wollen wir uns eine Vereinfachung erlauben, darin bestehend: dass wir vorläufig für δ den Mittelwerth aus dem δ am 4. Februar und am 13. März nehmen und ebenso sofort aus den obigen fünf Reihen die Mittelzahlen für $\Delta\tau$ bilden, um schliesslich blos 6mal die Gleichung (11) berechnen zu müssen. Diese Mittelwerthe von $\Delta\tau$ in Zeit sind aber:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\tau_1 = 758^s,1 & \Delta\tau_5 = 245^s,1 \\ \Delta\tau_2 = 503,6 & \Delta\tau_6 = 501,0 \\ \Delta\tau_3 = 250,8 & \Delta\tau_7 = 746,1 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

oder als Winkel ausgedrückt

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\tau_1 = 3^0\ 9'\ 31'',5 & \Delta\tau_5 = 1^0\ 1'\ 16'',5 \\ \Delta\tau_2 = 2\ \ 5\ \ 54,0 & \Delta\tau_6 = 2\ \ 5\ \ 15,0 \\ \Delta\tau_3 = 1\ \ 2\ \ 42,0 & \Delta\tau_7 = 3\ \ 6\ \ 31,5 \end{array}\right\} \quad . \quad (12_*)$$

Die Logarithmen der Sinus dieser Winkelgrössen sind

$$\begin{array}{ll} \log\sin\Delta\tau_1 = 8{,}7411726 & \log\sin\Delta\tau_5 = 8{,}2509860 \\ \log\sin\Delta\tau_2 = 8{,}5636546 & \log\sin\Delta\tau_6 = 8{,}5614076 \\ \log\sin\Delta\tau_3 = 8{,}2609694 & \log\sin\Delta\tau_7 = 8{,}7342500 \end{array}$$

Ferner ist

4. Febr. 1874	δ Urs. min. gleich	$86^0\ 36'\ 5'',6$
13. März	„ „ „ „ „	86 35 59 ,2
Mittelwerth	„ „ „ „	86 36 2 ,4

der durch Anbringung der mittleren Refraction $\varrho = 53''$

$$\delta = 86^0\ 36'\ 55'',4$$

macht, demgemäss dann z. B.

$$\begin{array}{rl} \log\sin(\ 3^0\ \ 9'\ 31'',5) = & 8{,}7411726 \\ \log\cos(86^0\ 36'\ 55'',4) = & \underline{8{,}7711335} \\ \log\sin f_1 = & 7{,}5123061 \\ f_1 = & 0^0\ 11'\ 11'',02 = 44^s,735 \end{array}$$

wird. In derselben Weise wurden auch die übrigen Werthe von f berechnet und ergab sich in Zeit ausgedrückt:

$$\left.\begin{array}{ll} f_1 = 44^s,735 & f_5 = 14^s,473 \\ f_2 = 29,727 & f_6 = 29,573 \\ f_3 = 14,809 & f_7 = 44,027 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

oder als Winkelgrössen:

$$\left.\begin{array}{ll} f_1 = 0^0\ 11'\ 11'',02 & f_5 = 0^0\ \ 3'\ 37'',09 \\ f_2 = 0\ \ \ 7\ \ 25,90 & f_6 = 0\ \ \ 7\ \ 23,60 \\ f_3 = 0\ \ \ 3\ \ 42,13 & f_7 = 0\ \ 11\ \ \ 0,41 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (13_*)$$

Die Logarithmen der Sinus dieser Winkelgrössen sind:

$$\begin{array}{ll} \log\sin f_1 = 7{,}5123061 & \log\sin f_5 = 7{,}0221195 \\ \log\sin f_2 = 7{,}3347881 & \log\sin f_6 = 7{,}3325411 \\ \log\sin f_3 = 7{,}0321029 & \log\sin f_7 = 7{,}5053835. \end{array}$$

Vergleichen wir aber mit diesen Werthen unsere obigen direct

nach der Gauss'schen Manier gefundenen Winkel, so werden wir sehr auffällige Unterschiede finden. Denn während bei den Werthen der Gl. (13_*) das $f_6 < f_2$ und $f_5 < f_3$ ist, ist es bei den Werthen S. 340 umgekehrt und fragt es sich, worin liegt der Grund hiervon? Nach verschiedenen Ueberlegungen ergab sich Folgendes. Die nach der Gauss'schen Methode gefundenen Werthe wurden in der Weise erhalten, dass das Fadenkreuz durch eine Lampe erhellt wurde und die Fäden hell auf dunklem Grunde erschienen; da nun bei Beobachtungen von Sterndurchgängen, wenn die Beleuchtung mit der Lampe L und dem kleinen Spiegelchen s Fig. 58 geschieht, die Fäden dunkel auf hellem Grunde erscheinen, so war anzunehmen, dass durch eigenthümliche Refractionen die Distanzen der Fäden falls man den Contrast so oder so wählt, nicht als dieselben gefunden werden. Um daher die directe Gauss'sche Methode in dieser Beziehung mit den Durchgangsbeobachtungen mehr in Einklang zu bringen, wurden die directen Winkelmessungen wiederholt, wobei unter Beleuchtung mit Tageslicht die Fäden dunkel auf hellerem Grunde erschienen, und ergab sich nun nach einer ebenso ausgedehnten und sorgfältigen Beobachtung wie die frühere

$$\begin{aligned} f_1 &= 0^0\ 11'\ 13'',69 & f_5 &= 0^0\ \ 3'\ 38'',25 \\ f_2 &= 0\ \ \ 7\ \ 28\ ,12 & f_6 &= 0\ \ \ 7\ \ 27\ ,94 \\ f_3 &= 0\ \ \ 3\ \ 41\ ,81 & f_7 &= 0\ \ 11\ \ \ 7\ ,31 \end{aligned}$$

oder in Zeit

$$\begin{aligned} f_1 &= 44^s,96 & f_5 &= 14^s,60 \\ f_2 &= 29\ ,90 & f_6 &= 29\ ,84 \\ f_3 &= 14\ ,86 & f_7 &= 44\ ,48, \end{aligned}$$

welche Werthe mit denen in (13_*) und (13) verglichen eine weit bessere Uebereinstimmung zeigen. Wir halten dafür, dass die Werthe der Fädendistanzen aus den Durchgangsbeobachtungen von δ Urs. min. abgeleitet mehr Vertrauen zu erwecken im Stande sind, als die aus den directen Winkelmessungen abgeleiteten, und werden wir die ersteren bei den folgenden Rechnungen zu Grunde legen.

§. 73. Hiermit wäre die Aufgabe, die Fädendistanzen zu bestimmen, gelöst, aber man begreift, dass trotzdem zunächst noch kein wesentlicher Vortheil für unsere Zeitbestimmung errungen ist, und dass wir umgekehrt die Aufgabe lösen müssen: wenn $f_1, f_2 \ldots$ nach einer der vorausgehenden Methoden gefunden sind, nun auch für ein beliebiges δ d. h. für einen beliebigen Stern die Zeitgrössen Δt_1, Δt_2 .... zu finden. Denn hätte man z. B. für $\delta = 23^0\ 15'$ die betreffenden Grössen Δt_1, Δt_2 .... und wäre ein Stern mit dieser Declination durchs Fadenkreuz gegangen am

Faden I zur Zeit τ_1
" II " " τ_2
. . . . .

so wäre er am Mittelfaden anstatt am Faden I erschienen um die Zeit

$$\tau_1 + \Delta\tau_1,$$

am Mittelfaden anstatt am Faden II um die Zeit

$$\tau_2 + \Delta\tau_2$$

u. s. w; ferner am Mittelfaden anstatt am Faden V zur Zeit

$$\tau_5 - \Delta\tau_5$$

u. s. w. und hätten wir, falls $\Delta\tau_1 \ldots . \Delta\tau_7$ gegeben wären, sieben Werthe, die alle sieben den Durchgangsmoment durch den Mittelfaden darstellen, nämlich die Zeitwerthe

$$\begin{aligned}(\tau_1 + \Delta\tau_1) &= \tau_4^{I}\\ (\tau_2 + \Delta\tau_2) &= \tau_4^{II}\\ (\tau_3 + \Delta\tau_3) &= \tau_4^{III}\\ \tau_4 &= \tau_4^{IV}\\ (\tau_5 - \Delta\tau_5) &= \tau_4^{V}\\ (\tau_6 - \Delta\tau_6) &= \tau_4^{VI}\\ (\tau_7 - \Delta\tau_7) &= \tau_4^{VII}\end{aligned}$$

deren arithmetisches Mittel

$$O = \frac{\tau_4^{I} + \ldots\tau_4 + \ldots\tau_4^{VII}}{7} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

erstens einen principiell richtigeren Werth für die Durchgangszeit liefert, wie das Mittel der Gleichung (9), weil die Bildung unseres Mittels (14) die Berücksichtigung der etwaigen Ungleichheit der Fädendistanzen f_1 und f_7, f_2 und f_6 etc. voraussetzt und zweitens einen schärferen Werth, weil bei (9) nur vier Zahlen, bei (14) aber sieben vorliegen.

Man nennt nun die Berechnung der Zeitgrössen τ_4^{I}, τ_4^{II} ...

„Die Reduction auf den Mittelfaden“

und gelingt diese unmittelbar nach gehöriger Benutzung der Gleichung (10). Denn da wir jetzt $f_1 \ldots f_7$ kennen, so lässt sich umgekehrt, wenn δ gegeben ist, $\Delta\tau_1 \ldots \Delta\tau_7$ für die betr. Declination finden, und gestaltet sich z. B. für $\delta = 60^0$ in der oberen Culmination, wobei wegen der mittleren Refraction, wie schon oben S. 334 erwähnt, $\delta' = 59^0\ 59'\ 51''$ anzunehmen ist, für Marburg wie folgt:

$$\begin{aligned}\log \sin f_1 &= 7{,}5123061\\ \log \cos \delta' &= 9{,}6990029\\ \hline \log \sin \Delta\tau_1 &= 7{,}8133032\\ \Delta\tau_1 &= 0^0\ 22'\ 21'',94 = 89^s,46\end{aligned}$$

Die Berechnung der Grössen $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ .... kann jedoch auch noch auf einem anderen Wege geschehen, nämlich in der Weise, dass man $\Delta\tau_1$ ... in eine Reihe entwickelt und von dieser Reihe entweder nur das erste oder die beiden ersten, oder höchstens die drei ersten Glieder benutzt. Da nämlich nach einer bekannten Reihenentwickelung

$$\Delta\tau = \varrho . sin (\Delta\tau) + \frac{1}{6} \varrho . sin^3 (\Delta\tau) + \frac{3}{40} \varrho . sin^5 (\Delta\tau) + \ldots .$$

gesetzt werden kann, so ist, wenn man rechts für die Sinus die aus der Gl. (10) folgenden Werthe einführt und zugleich, um $\Delta\tau$ als Zeitgrösse zu haben, noch mit 15 dividirt auch

$$\Delta\tau = \frac{\varrho}{15} \left(\frac{sin f}{cos \delta'}\right) + \frac{\varrho}{90} \left(\frac{sin f}{cos \delta'}\right)^3 + \frac{\varrho}{200} \left(\frac{sin f}{cos \delta'}\right)^5 + \ldots .$$

oder, wenn man etwas anders zusammenfasst:

$$\Delta\tau = \frac{1}{cos \delta'} \left(\frac{\varrho}{15} sin f\right) + \frac{1}{cos^3 \delta'} \left(\frac{\varrho}{90} sin^3 f\right)$$

$$+ \frac{1}{cos^5 \delta'} \left(\frac{\varrho}{200} sin^5 f\right) + \ldots \ldots \quad (15)$$

in welcher Gleichung die in eine Klammer eingeschlossenen Grössen für dieselbe Fädendistanz constante Grössen sind, zu deren Logarithmen man nur die Logarithmen der reciproken Cosinusgrössen, die mit δ' veränderlich sind, hinzu zu addiren hat, um $log \Delta\tau$ sofort zu erhalten.

Zunächst wollen wir aber zusehen, für welche Declinationen wir nöthig haben, das 2[te] bzw. auch das 3[te] Glied hinzuzunehmen. Da es hierbei nur auf den Grad der gewünschten Genauigkeit ankommt, so wollen wir annehmen, dass Grössen, die kleiner als $0^s,01$ sind, zu vernachlässigen wären. Demgemäss besteht für die Mitnahme des zweiten Glieds die Bedingungsgleichung

$$0{,}01 = \frac{1}{cos^3 \delta'} \left(\frac{\varrho}{90} sin^3 f\right)$$

oder

$$cos \delta' = sin f \left(\frac{\varrho}{90 . 0{,}01}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

woraus folgt, dass δ' um so kleiner ausfällt, je grösser f ist. Da nun die symmetrischen Fädendistanzen nur wenig von einander abweichen, so wollen wir blos die je grösste bei der Berechnung des Werthes von δ' berücksichtigen, und berechnet sich hiernach z. B. für $f_3 = 3' \, 42'',13$ bis auf Minuten genau das

$$\delta' = 86^0 \, 13'.$$

Da die Refraction für ein solches δ' nur gering ist, so lassen wir dieselbe jetzt ganz unberücksichtigt und wäre rund gerechnet von $\delta = 86^0 \, 10'$ an das zweite Glied der Reihe (16) zu berücksichtigen.

Für die Mitnahme des dritten Glieds berechnet sich gemäss der Gleichung

$$\cos \delta' = \sin f \left(\frac{\varrho}{200 \,.\, 0{,}01}\right)^{\frac{1}{3}}$$

das

$$\delta' = 89^0\, 23'$$

so dass, da Sterne mit dieser grossen Declination für uns nicht in Betracht kommen, dieses Glied für die Fädendistanz f_3 und f_5 überhaupt weggelassen werden kann. In gleicher Weise ergiebt sich für f_2 (incls. f_6) die Mitnahme des zweiten Glieds von $\delta = 82^0\, 20'$, die des dritten von $\delta = 88^0\, 45'$ an, und kann demnach das dritte Glied auch für die Fädendistanzen f_2 und f_6 überhaupt vernachlässigt werden. Für f_1 und f_7 ergeben sich ebenso für das zweite und dritte Glied entsprechend die Werthe $\delta = 78^0\, 30'$ und $\delta = 88^0\, 10'$.

Anstatt unserer Berechnung von $\varDelta\tau_1$ auf S. 346 können wir daher jetzt, da für ein $\delta = 60^0$ weder das zweite noch das dritte Glied berücksichtigt zu werden braucht, die Berechnung auch wie folgt machen

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\varrho}{15} \sin f_1\right) &= 1{,}6506399 \\ \log \cos \delta' &= 9{,}6990029 \\ \hline \log \varDelta\tau_1 &= 1{,}9516370 \\ \varDelta\tau_1 &= 89^s{,}46 \end{aligned}$$

Auch hierbei würde es ein mühsames Geschäft sein, müsste man bei einer solchen Zeitbestimmung immer erst die Grössen $\varDelta\tau_1$, $\varDelta\tau_2 \ldots$ berechnen, und pflegt man desshalb dieselben ein für allemal zu berechnen und in eine Tabelle zu ordnen, die wir die

„Tabelle der Fädendistanzen“

nennen wollen, und worin man mit dem Argument δ eingehend daneben die betreffenden Zeitgrössen $\varDelta\tau_1$, $\varDelta\tau_2 \ldots$ findet, eine Anordnung, die das folgende Schema hinreichend versinnlicht.

Obere Culmination.

δ	I—IV	II—IV	III—IV	IV—V	IV—VI	IV—VII
—38°						
.						
.						
.						
.						
0						
.						
.						
.						
.						
.						
60,0	89ˢ.46	59ˢ,45	29ˢ,61	28ˢ,94	59ˢ,14	88ˢ,05
.						
.						
.						
.						
99						

Das Fortschreiten des Argumentes wird ähnlich wie bei den Tafeln für die Coefficienten J, A und C im §. 71 zu geschehen haben.

§. 74. Wir wollen nun den vollständigen Verlauf einer Zeitbestimmung mit Hilfe des Passageinstruments zunächst im Allgemeinen kennen lernen, und knüpft der Verfasser hierbei der Hauptsache nach an den praktischen Rechnungsmodus an, wie ihn sein verehrter Lehrer Gerling zu lehren und zu empfehlen gewohnt war. Zu einer solchen Zeitbestimmung gehören vor allem die Durchgangsbeobachtungen von mehreren Sternen, und nehmen wir an, es wären beispielshalber fünf Sterne beobachtet worden. Dem entsprechend bestehen dann gemäss der Fundamentalgleichung (A) und mit Rücksicht auf die im Anfang des §. 71 bestimmten Bezeichnungen die fünf Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} s_{,} \;\;= O_1 - A\!\!R_1 + J_1.i + A_1.a + C_1.c \\ s_{,,} \;= O_2 - A\!\!R_2 + J_2.i + A_2.a + C_2.c \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_{,,,,,} = O_5 - A\!\!R_5 + J_5.i + A_5.a + C_5.c \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (16)$$

Da unser Fadenkreuz 7 Fäden hat, so liegen, falls jeder Durchgang des Sterns an diesen Fäden beobachtet werden konnte, 5 . 7 Beobachtungszeiten vor, nämlich für jeden Stern die Zeiten

$$\tau_1 \, , \; \tau_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; \tau_7$$

aus welchen nach geschehener Reduction auf den Mittelfaden die Grösse

$$O_1 = \frac{\tau_4^{\,\mathrm{I}} + \tau_4^{\,\mathrm{II}} + \; . \; . \; . \; . \; \tau_4^{\,\mathrm{VII}}}{7} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

berechnet wird. Geschieht die Berechnung der übrigen Grössen $O_2 \ldots O_5$ in ähnlicher Weise, so sind $O_1 \ldots . O_5$ als gegebene Zahlenwerthe anzusehen. Da ferner die Grössen $Æ_1 \ldots Æ_5$ aus einem Jahrbuche entnommen werden können, so sind auch diese bekannt und bleiben rechts in den obigen Gleichungen (16) nur noch i, a und c als Unbekannte übrig, von denen jedoch i sich ebenfalls leicht mittelst einer Libelle bestimmen lässt. Beobachten wir nämlich vor dem Beginne und nach der Beendigung der Durchgangsbeobachtungen die Libellenblase, so erhalten wir zwei Werthe i_1 und i_2 der Neigung der Fernrohraxe, aus welcher wir das Mittel

$$i = \frac{i_1 + i_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

als das während der ganzen Beobachtung bestehende i ansehen können, und ist somit i und $log\, i$ ebenfalls als eine bekannte Grösse zu betrachten. Suchen wir ferner nach vorhandenen Tabellen, oder falls diese fehlen sollten, aus der directen Berechnung der Gl. (6) bzw. (7) den $log\, J_1 \ldots\ldots$ zu erhalten, so sind auch die Werthe $log\,(J_1.i) \ldots\ldots$ und hiermit $(J_1 . i) \ldots .$ oder $\mathrm{Corr.}_1\,(i) \ldots\ldots$ bekannt, und kann hiernach die Summe der je drei ersten Summanden der Gleichungen (16) leicht gebildet werden. Bezeichnen wir diese Summe der Reihe nach mit $\varDelta O_1, \varDelta O_2 \ldots,$ so erhalten wir anstatt der Gl. (16) die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} s_{,} = \varDelta O_1 + A_1.a + C_1.c \\ s_{,,} = \varDelta O_2 + A_2.a + C_2.c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{,,,,,} = \varDelta O_5 + A_5.a + C_5.c \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Zur weiteren Bestimmung der Unbekannten a und c bietet sich dann folgender Weg dar. Da wir den Standfehler der Uhr während der Dauer der Beobachtung als constant ansehen wollen, so ist es erlaubt, zunächst einmal $s_{,} = s_{,,} = s_{,,,,,} = s$ zu setzen; wählen wir uns nun aus den Gleichungen (19) drei bestimmte Gleichungen aus, so kommen in jeder die drei Unbekannten s, a und c vor und lassen sich aus diesen drei Gleichungen, also z. B. der 2[ten], der 3[ten] und der 4[ten] oder

$$\left.\begin{array}{l} s = \varDelta O_2 + A_2.a + C_2.c \\ s = \varDelta O_3 + A_3.a + C_3.c \\ s = \varDelta O_4 + A_4.a + C_4.c \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

durch Subtrahiren z. B. der mittelsten von der obersten sowie der untersten von der obersten zwei Gleichungen erhalten, aus welchen ohne Schwierigkeit a und c aufgefunden werden kann. Diese Gleichungen sind aber, wenn wir einfach

$$\left.\begin{array}{l} (\varDelta O_2 - \varDelta O_3) = \varDelta O' \; ; (A_2 - A_3) = \varDelta A' \; ; (C_2 - C_3) = \varDelta C' \\ (\varDelta O_2 - \varDelta O_4) = \varDelta O'' ; (A_2 - A_4) = \varDelta A'' \; ; (C_2 - C_4) = \varDelta C'' \end{array}\right\} . \quad (21)$$

setzen,

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \varDelta O' + \varDelta A'.a + \varDelta C'.c \\ 0 = \varDelta O'' + \varDelta A''.a + \varDelta C''.c \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

und haben diese eine solche Form, dass man mit Hilfe von Logarithmen die Werthe von $log\, a$ und $log\, c$ und hiernach von a und c selbst bestimmen kann, vorausgesetzt dass vorher nach vorhandenen Tabellen oder durch directe Berechnung die Coefficienten $A_1 \ldots C_1 \ldots$ und hiermit A', A'', C' und C'' in Gl. (21) gefunden wurden. Sind aber die $log\, a$ und $log\, c$ gegeben, so erhält man durch Addition von $log\, a$ zu jedem der $log\, A$ den $log\,(A_1 . a) \ldots$ und ebenso durch Addiren von $log\, c$ zu jedem der $log\, C$ den $log\,(C_1 . c)$ und hiermit $(A_1 . a) \ldots$ $(C_1 . c) \ldots$ also die Corr.$_1$ (a).. und Corr.$_1$ (c).. selbst, wonach die rechten Seiten der Gl. (19) und hiermit die Werthe $s_, \ldots$ bekannt sind, aus deren Summe dann das Mittel

$$s = \frac{s_, + s_{,,} + \ldots s_5}{5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

als Endresultat der ganzen Operation erhalten wird.

Uebersichtlich zusammengestellt ist der Verlauf einer solchen Zeitbestimmung daher folgender, wobei die gewählte Reihenfolge wohl als zweckmässig angesehen werden darf.

A. Beobachtung.

1) Aufsetzen der Libelle in zwei Lagen; Notirung der Blasenenden

$$w_0' \text{ und } o_0'$$
$$w_1' \quad ,, \quad o_1'.$$

2) Beobachtung der Sterndurchgänge.

3) Aufsetzen der Libelle in zwei Lagen; Notirung der Blasenenden

$$w_0'' \text{ und } o_0''$$
$$w_1'' \quad ,, \quad o_1''.$$

B. Berechnung.

4) Aufschlagen der wahren Declinationen δ für die verschiedenen Sterne; Berechnung der scheinbaren Declinationen δ', gemäss der Lehre auf S. 335 u. f.

5) Reduction der Durchgangszeiten auf den Mittelfaden (S. 346), also Berechnung der Zeitgrössen $O_1 \ldots O_5$ (Gl. 16).

6) Aufschlagen der Rectascensionen $AR_1 \ldots$ und Berechnung der Differenzen $(O_1 - AR_1) \ldots$.

7) Berechnung der mittleren Neigung i Gl. (18) und $log\, i$ unter

Rücksichtsnahme auf die S. 288 gemachte wichtige Bemerkung über die Anwendbarkeit der Gl. (5) Kap. VII

8) Berechnung der $log\,J_1 \ldots.$ nach vorhandenen Tabellen oder direct n. Gl. (6) bzw. Gl. (7). Berechnung der $log\,(J_1.i) \ldots.$ und hiernach der Numeri $(J_1.i) \ldots.$ also der Corr.$_1$ $(i) \ldots$; im Anschluss hieran gemäss der Vorbemerkung zu Gl. (19) Berechnung der Grössen $\varDelta\,O_1 = (O_1 - Æ_1 + \text{Corr.}_1\,(i)) \ldots.$

9) Berechnung der Coefficienten $A_1 \ldots.$, $C_1 \ldots.$ nach vorhandenen Tabellen oder unmittelbar n. Gl. (6) bzw. (7). Aufschlagen der $log\,A_1 \ldots.$, $log\,C_1 \ldots.$, welche Logarithmen man neben die Werthe $A_1 \ldots.$, $C_1 \ldots.$ setzen kann.

10) Auswahl dreier Sterne für die drei Gleichungen (20) unter Berücksichtigung bestimmter noch zu gebender Regeln. Hinschreiben der Gleichungen (20), Berechnung der Ausdrücke Gl. (21) und Bildung der zwei Gleichungen (B). Berechnung von a und c bzw. $log\,a$ und $log\,c$ mit Hilfe von Logarithmen.

12) Bildung der $log\,(A.a) \ldots log\,(C.c)$ und Aufschlagen der Numeri, wodurch die Grössen $(A.a) = \text{Corr.}\,(a)$ und $(C.c) = \text{Corr.}\,(c)$ erhalten werden; wiederholte Aufführung der Werthe $\varDelta\,O_1 \ldots$; Addiren der je drei Summanden Gl. (19), um die Endwerthe von $s, \ldots.$ zu erhalten, aus denen schliesslich das Mittel s zu nehmen ist.

Hiermit ist die eigentliche Zeitbestimmung als beendigt anzusehen. Für den Fall jedoch, dass dieser Zeitbestimmung schon eine frühere vorausgieng, wird man

13) auch eine Berechnung des Ganges der Uhr vornehmen.

Es ist aber weiter denkbar, dass man während der Beobachtungszeit mit der Uhr, die wir seither im Auge hatten, noch eine zweite Uhr z. B. ein Chronometer vergleicht. Für diesen Fall berechnet man dann

14) noch den Standfehler dieser zweiten Uhr und

15) den Gangfehler derselben.

Hierauf gehen wir zur Darstellung der praktischen Ausführung einer Zeitbestimmung mit Hilfe des Passageinstruments über. Da es hierbei darauf ankommt, dass man das Beobachtungs- und Rechnungsmaterial möglichst übersichtlich und zusammengehörig ordnet, so wird der Leser wohl thun, auch hierauf sein Augenmerk zu richten. Eine Erleichterung hierbei werden wir dadurch gewähren, dass wir die einzelnen Beobachtungs- und Rechnungssätze mit einer in eine eckige Klammer eingefassten Zahl [1] bis [15] entsprechend unseren soeben angegebenen fünfzehn Punkten bezeichnen.

Beispiel. Am 20. August 1874 beobachtete Herr Assistent F. Uth fünf Sterne.

A. Beobachtung:

[1] $w_0' = 24{,}2$; $w_1' = 28{,}0$

$o_0' = 11{,}0$; $o_1' = 7{,}5$

[2]

ζ Herculis.	ε Ursae minoris.	α Aurigae, U. C.
16h 33m 5s,2	16h 51m 8s,4	17h 3m 39s,6
22,9	52 59,0	4 0,3
40,8	54 50,1	22,1
57,9	56 39,6	43,4
34 15,4	58 28,8	5 4,7
33,3	17 0 20,0	26,2
50,1	2 7,5	47,1

ϑ Ophiuchi.	β Draconis.
17h 10m 51s,2	17h 23m 49s,6
11 7,5	24 14,2
24,1	38,7
40,2	25 2,8
56,9	27,3
12 13,2	51,6
29,4	26 15,5

[3] $w_0'' = 20{,}9$; $w_1'' = 24{,}4$

$o_0'' = 18{,}7$; $o_1'' = 15{,}7$

B. Berechnung:

[4]

	δ	δ'
ζ Herc.	31° 50′ 1″	31° 50′ 21″
ε Urs. min.	82 14 36	82 14 1
α Aur. U. C.	45 52 3	45 59 41
ϑ Oph.	— 24 52 28	— 24 48 46
β Drac.	52 23 51	52 23 49

[5] Um die Reduction auf den Mittelfaden zu machen, falls man die Tabelle der Fädendistanzen nicht besitzt, muss im vorliegenden Falle für jeden Stern 6mal, also im Ganzen 30mal die Berechnung der Grösse $\Delta\tau$ wie auf S. 346 oder auf S. 348 ausgeführt werden. Es vollzieht sich dieser Act jedoch schnell, wenn man die constanten sechs Logarithmen der Grössen $\left(\frac{\varrho}{15} \cdot \sin f_1\right)$, $\left(\frac{\varrho}{15} \cdot \sin f_2\right)$ .. vorher berechnet. Diese sind in unserem Falle, wo blos (ausser bei ε Urs. min., bei dem für f_1 und f_2 das 2te Glied der Reihe (15) gleich 0s,03, mitzunehmen ist) das erste Glied der Reihe (15) berücksichtigt zu werden braucht:

$$log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_1\right) = 1{,}6506399\,;\; log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_5\right) = 1{,}1604533$$

$$log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_2\right) = 1{,}4731219\,;\; log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_6\right) = 1{,}4708749$$

$$log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_3\right) = 1{,}1704367\,;\; log\left(\frac{\varrho}{15}\,sin f_7\right) = 1{,}6437173.$$

Zieht man hiervon die *Log* $cos\,\delta'$ ab, so erhält man die *Log* $\varDelta\tau$ und nach Aufschlagen der Numeri die Grössen $\varDelta\tau$ selbst. Es ist aber für die fünf Sterne der Reihe nach *log* $cos\,\delta'$ gleich

9,9291798
9,1307657
9,8418127
9,9579346
9,7854633.

Hiernach würden die sechs *Log* $\varDelta\tau$ und die sechs Grössen $\varDelta\tau_1$, $\varDelta\tau_2$ ... für ζ Herc. heissen:

$$log\,\varDelta\tau_1 = 1{,}7214601\,;\; \varDelta\tau_1 = 52^s{,}66$$
$$log\,\varDelta\tau_2 = 1{,}5439421\,;\; \varDelta\tau_2 = 34{,}99$$
$$log\,\varDelta\tau_3 = 1{,}2412569\,;\; \varDelta\tau_3 = 17{,}43$$
$$log\,\varDelta\tau_5 = 1{,}2312735\,;\; \varDelta\tau_5 = 17{,}03$$
$$log\,\varDelta\tau_6 = 1{,}5416951\,;\; \varDelta\tau_6 = 34{,}81$$
$$log\,\varDelta\tau_7 = 1{,}7145375\,;\; \varDelta\tau_7 = 51{,}83.$$

In gleicher Weise berechnet sich, wenn man für ε Urs. min. das 2[te] Glied der Reihe (15) berücksichtigt:

	$\varDelta\tau_1$	$\varDelta\tau_2$	$\varDelta\tau_3$	$\varDelta\tau_3$	$\varDelta\tau_5$	$\varDelta\tau_7$
ε Urs. min.	**331^s,06**	**219^s,96**	**109^s,56**	**107^s,07**	**218^s,83**	**325^s,83**
α Aurig U. C.	**64 ,39**	**42 ,79**	**21 ,31**	**20 ,83**	**42 ,57**	**63 ,37**
ϑ Ophiuch.	**49 ,28**	**32 ,75**	**16 ,31**	**15 ,94**	**32 ,58**	**48 ,50**
β Dracon.	**73 ,31**	**48 ,71**	**24 ,26**	**23 ,71**	**48 ,46**	**72 ,15**

Bringen wir nun diese Zahlen mit dem gehörigen Vorzeichen an die Zeiten sub [2] an, so ergiebt sich für

ζ Hercul.	ε Urs. min.	α Aurig. U. C.
16^h 33^m 57^s,86	16^h 56^m 39^s,46	17^h 4^m 43^s,99
57 ,89	38 ,96	43 ,09
58 ,23	39 ,66	43 ,41
57 ,90	39 ,60	43 ,40
58 ,37	41 ,73	43 ,87
58 ,49	41 ,17	43 ,63
58 ,27	41 ,70	43 ,73
1 ,01	2 ,28	4 ,12

$O_1 = $ **16^{h}33^{m}58^s,14** $O_2 = $ **16^{h}56^{m}40^s,33**; $O_3 = $ **17^{h}4^{m}43^s,59**

ϑ Ophiuchi	β Draconis
$17^h\ 11^m\ 40^s,48$	$17^h\ 25^m\ 2^s,91$
40,25	2,91
40,41	2,96
40,20	2,80
40,96	3,59
40,62	3,14
40,90	3,35
3,82	0,66

$O_4 = 17^h\ 11^m\ 40^s,55 \qquad O_5 = 17^h\ 25^m\ 3^s,09.$

		Æ	O — Æ
[6]	ζ Herc.	$16^h\ 36^m\ 33^s,84$	$-\ 2^m\ 35^s,70$
	ε Urs. min.	16 58 58,32	— 2 17,99
	α Aur. U. C.	17 7 24,36	— 2 40,77
	ϑ Oph.	17 14 18,66	— 2 38,11
	β Drac.	17 27 36,95	— 2 33,86

[7] Es ist ferner

$$i_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{w_0' - o_0'}{2} + \frac{w_1' - o_1'}{2}\right)\varphi = 8{,}42\,.\,\varphi$$

$$i_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{w_0'' - o_0''}{2} + \frac{w_1'' - o_1''}{2}\right)\varphi = 2{,}72\,.\,\varphi$$

$$i = 5{,}57\,.\,\varphi$$

$$\begin{aligned} \log 5{,}57 &= 0{,}74586 \\ \log \varphi &= 0{,}32034 \text{ (Siehe S. 252)} \\ & \quad 1{,}06620 \\ \log 15 &= 1{,}17609 \\ \log i &= 9{,}89011 \end{aligned}$$

[8] Nach der vorhandenen Tabelle ist

$\log J$	$\log (J\,.\,i) = \log$ Corr. (i)	Corr. (i)	ΔO
0,04656	9,93667	$0^s,86$	$-\ 2^m\ 34^s,84$
0,80036	0,69047	4,90	— 2 13,09
$9{,}23118_n$	$9{,}12129_n$	— 0,13	— 2 40,90
9,43706	9,32717	0,21	— 2 37,90
0,21440	0,10451	1,27	— 2 32,59

[9] A	$\log A$	C	$\log C$
0,3827	9,58286	1,1771	0,07082
— 3,8577	$0{,}58632_n$	7,4000	0,86923
1,4291	0,15506	— 1,4393	$0{,}15815_n$
1,0671	0,02820	1,1018	0,04210
— 0,0454	$8{,}65706_n$	1,6390	0,21458

[10] Aus bestimmten Gründen, welche hernach entwickelt werden sollen, wählen wir für die Bestimmung von a und c nun die Sterne: ε Urs. min., α Aur. U. C. und ϑ Oph. aus, demgemäss die den Gleichungen (20) entsprechenden drei Gleichungen sind:

$$s = -2^m\, 13^s{,}09 - 3{,}8577 \,.\, a + 7{,}4000 \,.\, c$$
$$s = -2\;\; 40{,}90 + 1{,}4291 \,.\, a - 1{,}4393 \,.\, c$$
$$s = -2\;\; 37{,}90 + 1{,}0671 \,.\, a + 1{,}1018 \,.\, c$$

woraus durch Subtrahiren der mittleren von der oberen und der unteren von der oberen (also nicht etwa auch der unteren von der mittleren)

$$0 = 27^s{,}81 - 5{,}2868 \,.\, a + 8{,}8393 \,.\, c$$
$$0 = 24{,}81 - 4{,}9248 \,.\, a + 6{,}2982 \,.\, c$$

wird. Die nun folgende logarithmische Rechnung wird man verstehen, wenn man sich die einfachen Operationen vorstellt, welche für eine Elimination von c d. h. eine Bestimmung von a nöthig sind, und wobei wir nur noch bemerken wollen, dass die betreffenden Vorzeichen der einzelnen Summanden als den Zahlencoefficienten angehörig betrachtet werden. Zunächst schlagen wir die Logarithmen der sechs Coefficienten auf und erhalten:

1,44420	$0{,}72320_n$	0,94642
1,39463	$0{,}69239_n$	0,79921
0,49778	$9{,}77678_n$	
0,59542	$9{,}89318_n$	

mithin nach Aufschlagen der Numeri

$$0 = \;\; 3{,}146 - 0{,}598 \,.\, a + c$$
$$0 = \;\; 3{,}939 - 0{,}782 \,.\, a + c$$
$$0 = -0{,}793 + 0{,}184 \,.\, a$$

9,89927
9,26482

$$\log a = \mathbf{0{,}63445} \qquad a = \mathbf{4^s{,}309}.$$

Substituirt man diesen Werth von a in eine der beiden unmittelbar vorausgehenden Gleichungen z. B. in die oberste, so erhält man

$$0 = 3{,}146 - 2{,}577 + c$$

und somit

$$c = -\mathbf{0^s{,}569} \text{ und } \log c = \mathbf{9{,}75511_n}.$$

Hierbei ist es von Bedeutung, darauf aufmerksam zu machen, dass die Werthe von a und c als Zeitwerthe erhalten werden, ohne dass etwa noch wie oben beim i eine Division mit 15 hinzukommen müsste, und wird der Leser gut thun, die ganze Entwickelung der Gleichungen in dieser Beziehung zu verfolgen, um sich von der Richtigkeit der eben gemachten Bemerkung zu überzeugen.

[11] Schreibt man sich nun den $\log a$ und $\log c$ oben auf ein Zettel-

chen, um die Addition zu den *log A* und *log C* sub [9] bequem machen zu können, so erhält man:

$log\,(A\,.\,a) = log$ Corr. (a)	$log\,(C\,.\,c) = log$ Corr. (c)
0,21731	$9{,}82593_n$
$1{,}22077_n$	$0{,}62434_n$
0,78951	9,91326
0,66265	$9{,}79721_n$
$9{,}29151_n$	$9{,}96969_n$

[12] Hiernach werden die Numeri der vorausgehenden Logarithmen aufgeschlagen und ergiebt sich die Schluss-Zusammenstellung:

Corr. (a)	Corr. (c)	Summa.	$\Delta\,O$	s
$1^s{,}65$	$-0^s{,}67$	$0^s{,}98$	$-2^m\ 34^s{,}84$	$-2^m\ 33^s{,}86$
$-16{,}62$	$-4{,}21$	$-22{,}83$	$-2\ \ 13{,}09$	$-2\ \ 33{,}92$
$6{,}16$	$0{,}82$	$6{,}98$	$-2\ \ 40{,}90$	$-2\ \ 33{,}92$
$4{,}60$	$-0{,}63$	$3{,}97$	$-2\ \ 37{,}90$	$-2\ \ 33{,}93$
$-\ 0{,}20$	$-0{,}93$	$-\ 1{,}13$	$-2\ \ 32{,}59$	$-2\ \ 33{,}72$
				$4{,}35$

aus welcher als Endresultat folgt:

$$s = -\mathbf{2^m\ 33^s{,}87}.$$

[13] Am 6. August 1874 war ebenfalls eine Zeitbestimmung mit Hilfe des Passageinstrumentes gemacht worden, welche ein

$$s = -2^m\ 28^s{,}46$$

geliefert hatte, so dass wir nunmehr im Stande sind, auch den Gang der bei der Beobachtung benutzten Sternuhr von Schmidt, die schon im ersten Kapitel beschrieben wurde, innerhalb der Zeit vom 6. bis zum 20. Aug. zu berechnen. Wollen wir hierbei genau verfahren, so berechnen wir uns zunächst die mittlere Sternzeit der beiden Beobachtungen am 6. und 20. Aug. gleich

$$\frac{16^h\ 59^m\ 0^s{,}52 + 17^h\ 27^m\ 37^s{,}31}{2} = 17^h\ 13^m\ 18^s{,}91$$

und

$$\frac{16^h\ 36^m\ 33^s{,}83 + 17^h\ 27^m\ 36^s{,}95}{2} = 17^h\ \ 2^m\ \ 5^s{,}39;$$

sodann nehmen wir für Marburg (vergl. S. 142 Z. 5 v. u.)

$$6.\ \text{Aug.}\ \overset{+}{AR}\odot = 8^h\ 59^m\ 24^s{,}79 - 5^s{,}76 = 8^h\ 59^m\ 19^s{,}03$$
$$20.\ ,,\ \ ,, = 9\ \ 54\ \ 36{,}57 - 5{,}76 = 9\ \ 54\ \ 30{,}81$$

und ziehen diese Werthe von den mittleren Sternzeiten der Beobachtungen ab um

$$T_s = 8^h\ 13^m\ 59^s{,}88$$
$$,, = 7\ \ \ 7\ \ 34{,}58$$

zu erhalten. Verwandeln wir diese Zeiten in mittlere Zeiten, so werden sie gleich

$$T_m = 8^h\ 12^m\ 38^s,96$$
$$„ = 7\ \ 6\ \ 24,54$$

und ist nunmehr für den

20. Aug.	$= 232^d\ 7^h\ 6^m\ 24^s,54$	unser s	$= -2^m\ 33^s,87$
6. „	$= 218\ \ 8\ \ 12\ \ 38,96$	„	„ $= -2\ \ 28,46$
ΔT	$= 13^d\ 22^h\ 53^m\ 45^s,58$	Δs	$= -0^m\ \ 5^s,41.$

Verwandeln wir ΔT nach Taf. III in einen Bruchtheil eines Tages und dividiren hiermit in Δs, so ergiebt sich

$$g = \frac{-0^m\ 5^s,41}{13,954} = -0^s,388$$

als Gang der Sternuhr in Sternzeit ausgedrückt innerhalb eines mittleren Sonnentages. Die Uhr gieng also um die Grösse $0^s,388$ täglich nach und hätte, wenn sie richtig gewesen wäre, am 6. Aug. $2^m\ 28^s,46$ mehr und am 20. Aug. $2^m\ 33^s,87$ mehr zeigen müssen, so dass am 20. Aug. die Correction, welche die Uhr bekommen musste, um richtig zu sein gleich

$$+ 2^m\ 33^s,87$$

war.

[14] Um den Standfehler des nach mittlerer Zeit gehenden Chronometers von Kessels berechnen zu können, hatte am 20. Aug. auch noch eine Uhrvergleichung stattgefunden, wie wir solche schon S. 51 und 52 erläutert haben. Es war nämlich

K	S
$11^h\ 30^m\ \ 0^s,5$	$16^h\ 36^m\ 44^s,0$
$32\ \ 55,0$	$39\ \ 39,0$
$36\ \ \ 0,5$	$42\ \ 45,0;$

wird als Epoche für das Chronometer der Moment $11^h\ 33^m\ 0^s$ gewählt, so sind die Correctionen, die an K angebracht werden müssen, um auf diese Epoche zu kommen, nebst den weiteren Correctionen, die nach Taf. II (B) nöthig sind, um diese Grössen in Sternzeitgrössen zu verwandeln, sowie die Summen gleich

$+ 2^m\ 59^s,5$	$0^s,492$	$+ 2^m\ 59^s,992$
$+ 0\ \ \ 5,0$	$0,014$	$+ 0\ \ \ 5,014$
$- 3\ \ \ 0,5$	$0,494$	$- 3\ \ \ 0,994$

welche Zahlen der letzten Columne zu den Coincidenzzahlen von S hinzugefügt, liefern

$$16^h\ 39^m\ 43^s,992$$
$$„\ „\ 44,014$$
$$„\ „\ 44,006$$
$$0,012$$

so dass $K = 11^h\ 33^m\ 0^s,0$

entspricht einem $S = 16^h\ 39^m\ 44^s,004.$

Addiren wir nun zu S die aus unserer Zeitbestimmung sich ergebende Uhrcorrection von $+ 2^m\, 33^s{,}87$, so erhalten wir die richtige

$$SZ = 16^h\, 42^m\, 17^s{,}874$$

welche zunächst n. Gl. (9) S. 121 in MZ zu verwandeln ist. Es ist aber für Marburg gemäss der Berechnung in [13]

$$\overset{+}{Æ}\bigcirc = 9^h\, 54^m\, 30^s{,}816$$

$$(SZ - \overset{+}{Æ}\bigcirc) = 6\ \ 47\ \ 47{,}064$$

$$\text{Corr.}\ \ .\ \ .\ \ \left.\begin{array}{r} 58{,}977 \\ 7{,}694 \\ 0{,}128 \end{array}\right\} = 1^m\, 6^s{,}799$$

und sonach

$$T_m = 6^h\, 46^m\, 40^s{,}265.$$

Subtrahiren wir diese Zeit von der Epoche $11^h\, 33^m\, 0^s{,}0$, so erhalten wir den Standfehler des Chronometers gleich

$$s^* = + \mathbf{4^h\, 46^m\, 19^s{,}735}.$$

[15] Am 6. August hatte ebenfalls eine Uhrvergleichung stattgefunden, aus welcher sich

$$T_m = 7^h\, 33^m\, 7^s{,}51$$

und

$$s^* = + 4^h\, 45^m\, 52^s{,}490$$

ergab, so dass für den

20. Aug.	=	$232^d\ 6^h\ 46^m\ 40^s{,}26$	unser s^*	=	$4^h\ 46^m\ 19^s{,}735$
6. „	=	$218\ \ 7\ \ 33\ \ \ 7{,}51$	„ „	=	$4\ \ 45\ \ 52{,}490$
ΔT	=	$13^d\ 23^h\ 16^m\ 32^s{,}75$	Δs^*	=	$0^h\ \ 0^m\ 27^s{,}245$

und hiernach

$$g^* = + \frac{27^s{,}245}{13{,}970} = + \mathbf{1^s{,}950}$$

wird, d. h. das Chronometer gieng innerhalb der genannten Zeit um $1^s{,}95$ vor.

§. 75. Es mögen nun noch einige Bemerkungen folgen, welche dazu dienen sollen, das Vorausgehende theils noch zu vervollständigen, theils noch genauer zu erläutern.

Zunächst wollen wir uns einmal die Fundamentalgleichungen (A_{**}) S. 331 ansehen, um zu erkennen, ob vielleicht unmittelbar dieselben sich so verbinden lassen, dass einer der drei Fehler c, i oder a direct bestimmt werden kann. Da beim Umlegen des Fernrohrs sich nur das Zeichen von $\frac{c}{\cos\delta}$ aber nicht der übrigen Glieder mit i und a ändert, so leuchtet ein, dass durch Subtrahiren diese letzteren Glieder wegfallen, mithin eine Bestimmung von i und a auf diesem Wege nicht gelingt, dass aber ein Umlegen sehr wohl zur Bestimmung des

Collimationsfehlers führen kann und zwar in folgender Weise. Ein Stern geht um so langsamer durch das Gesichtsfeld, je näher er dem Pole steht, wesshalb es möglich wird, einen und denselben Stern, z. B. δ. Urs. min. durch eine Anzahl Fäden bei der Kreis-Ostlage und durch eine zweite Anzahl Fäden bei der Kreis-Westlage, nachdem das Fernrohr umgelegt ist, gehen zu lassen und die Durchgangszeiten zu notiren. Hierbei ist nach der S. 312 gegebenen Regel zunächst zu bemerken, dass wenn der Stern bei der Kreis-Ostlage in der Richtung vom Faden I nach IV und VII durchs Gesichtsfeld geht, er nach dem Umlegen in der entgegengesetzten Richtung von VII nach IV und I wandert und somit ein und derselbe Faden zweimal durchlaufen werden kann. Nehmen wir nun beispielshalber an, der Stern sei in der

Kreis-Ostlage am Faden I, II und III zur Zeit τ_1, τ_2, τ_3
Kreis-Westlage „ „ II „ I „ „ τ_2^* τ_1^*

beobachtet worden, so ergiebt die Reduction auf den Mittelfaden für die

Kreis-Ostlage eine Durchgangszeit O
Kreis-Westlage „ „ O*

und es bestehen die beiden Gleichungen

$$s = O - Æ + C.c + J.i + A.a$$
$$s = O^* - Æ - C.c + J.i + A.a$$

welche von einander subtrahirt die Gleichung

$$0 = O - O^* + 2.C.c$$

d. h.

$$c = \frac{O^* - O}{2C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

liefern, aus welcher c sofort bestimmt werden kann.

Beispiel. Am 10. Septb. 1858 beobachtete der Verfasser den Stern δ. Urs. min. bei

KO am Faden I zur Zeit	18^h	4^m	$30^s,5$
„ „ „ II „ „	18	9	24,5
KW „ „ I „ „	18	14	26,0

bei einer Fadenplatte, die blos drei Fäden hatte und wofür dem entsprechenden $\delta = 86^0\ 36'\ 14'',5$ gemäss die Fädendistanz I—II sich gleich $292^s,85 = 4^m\ 52^s,85$ ergab. Mithin lieferte die Reduction auf den Mittelfaden:

KO 18^h	9^m	$23^s,35$
	9	24,50
im Mittel 18	9	23,92
KW 18	9	33,15
$O^* - O = 0^h$	0^m	$9^s,23$;

und da ferner *log C* gleich 1,2234 ist, so ergab sich

$$c = 0,906.$$

Bei dieser Bestimmung des Collimationsfehlers ist vorausgesetzt worden, die Axe des Fernrohrs habe an und für sich keine Fehler und sei blos ein Neigungsfehler i vorhanden. Darf man dieses aber nicht annehmen, hätte z. B. eine sorgfältige Beobachtung ergeben, dass wegen der ungleichen Zapfen das östliche (Kreisende) Ende der Axe um 0,4 Scalentheile der Libelle zu hoch sei, so würden die der Gl. (22) vorausgehenden Gleichungen

$$s = O - \mathcal{R} + C.c + J.(i - 0{,}4.\varphi) + A.a$$
$$s = O^* - \mathcal{R} - C.c + J.(i + 0{,}4.\varphi) + A.a$$
$$0 = O - O^* + 2.C.c - 2.J.(0{,}4.\varphi)$$

heissen, wonach dann ein

$$c = \frac{O^* - O + 2.J.(0{,}4.\varphi)}{2.C} = \frac{O^* - O}{2.C} + \frac{J.(0{,}4.\varphi)}{C}$$

resultirte. Hätte also ein solcher Fall bei der obigen Bestimmung stattgefunden, so müsste noch eine Correction angebracht werden und da φ bei unserer Hauptlibelle (siehe S. 252) gleich $2'',091 = 0^s,1$ mithin $0{,}4.\varphi = 0^s,04$ und $\log J = 1{,}13413$ ist, so ergiebt sich diese Correction gleich $0^s,325$, so dass nunmehr $c = 1^s,231$ wird, woraus man ersieht, von welcher Bedeutung eine genaue Untersuchung der Beschaffenheit der Axe des Fernrohrs ist.

Ein zweiter wichtiger Punkt betrifft die Auswahl dreier Sterne aus der Zahl derer, die überhaupt beobachtet wurden, um so zu den drei Gleichungen (21) und zu den beiden Gleichungen (B) S. 315 zu gelangen, aus denen schliesslich a und c in der vortheilhaftesten Weise bestimmt werden kann. Am besten werden wir bei dieser Frage zum Ziele kommen, wenn wir uns einen der Fehler a oder c gleich Null denken. Setzen wir also a gleich Null, so lauten die beiden Gl. (B) jetzt

$$0 = \varDelta O' + \varDelta C'.c$$
$$0 = \varDelta O'' + \varDelta C''.c$$

woraus ohne Rücksicht aufs Vorzeichen sich

$$c = \frac{\varDelta O'}{\varDelta C'} \text{ und } c = \frac{\varDelta O''}{\varDelta C''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ergiebt. Hierbei sind die Grössen $\varDelta C'$ und $\varDelta C''$ gemäss Gl. (21) von der eigentlichen Beobachtung unabhängig, während in $\varDelta O'$ und $\varDelta O''$ insbesondere Fehlergrössen kommen können, herrührend von einer ungenauen Bestimmung des Momentes des Durchgangs der Sterne durch die Fäden, soweit hierbei allein die subjective Thätigkeit des Beobachters mitwirkt. Es ist nun sofort klar, dass diese Beobachtungsfehler einen um so geringeren Einfluss auf die Bestimmung von c ausüben und die Gleichungen (23) um so besser übereinstimmende Werthe von c liefern, je grösser die Nenner $\varDelta C'$ und $\varDelta C''$ der Gl. (23) sind und ergiebt sich hieraus die

1. Regel: „Man wähle von vornherein für die Beobachtung solche Sterne aus, dass man schliesslich unter ihnen „drei findet, für welche die beiden Differenzen der Coefficienten C, also die Grössen $\Delta C'$ und $\Delta C''$ Gl. (21) einen möglichst grossen Werth bekommen."

Denken wir entsprechend c gleich Null, so ergiebt sich für eine möglichst gute Bestimmung von a die

2. Regel: „Man wähle die zur Beobachtung bestimmten „Sterne von vornherein so aus, dass die drei Sterne eine „möglichst gute Bestimmung von a liefern, d. h. drei Sterne, „für welche $\Delta A'$ und $\Delta A''$ möglichst grosse Werthe „erreichen."

Insofern aber beide Grössen c und a gleichzeitig möglichst gut bestimmt werden sollen, so kann man eine

3. Regel aussprechen, „wonach von vornherein dafür „zu sorgen ist, dass unter der Schaar von Sternen sich schliess-„lich drei finden, für welche sowohl $\Delta C'$ und $\Delta C''$ wie auch „$\Delta A'$ und $\Delta A''$ zugleich möglichst grosse Werthe erlangen";

da jedoch die Grössen C und A und hiermit $\Delta C'$ und $\Delta C''$ (ausser von φ, das wir als unveränderlich annehmen) nur vom Argumente δ bzw. δ' abhängen, so reducirt sich unsere Frage darauf:

„welche Declinationen die Sterne haben müssen, damit „schliesslich eine möglichst gute Bestimmung von c und a zu „erwarten steht?"

Es ist nun nicht schwer, die Gleichungen z. B. für $\Delta C' = \left(\frac{1}{\cos\delta_m} - \frac{1}{\cos\delta_n}\right)$ zu verfolgen, um vielleicht mittelst einer Differentiation schliesslich die Bedingungen für δ_m und δ_n, welche ein Maximum von $\Delta C'$ ermöglichen, festzustellen. Wir sehen hiervon jedoch ab und machen uns eine Zusammenstellung der berechnet vorliegenden Coefficienten A und C, aus welcher wir sofort die besten Combinationen erkennen werden, und wobei noch bemerkt werden muss, dass zwar das Argument δ ist, dass jedoch bei der Berechnung von C... selbst die wegen der Refraction verbesserte scheinbare Declination δ' zur Anwendung gekommen ist, wie wir dies ja bereits oben kennen gelernt haben.

δ	Obere Culmination.		Untere Culmination.	
	C	A	C	A
— 38°	+ 1,263	+ 1,263	—	—
— 19	+ 1,057	+ 0,992	—	—
0	+ 1,000	+ 0,775	—	—
+ 19	+ 1,057	+ 0,557	—	—
41	+ 1,325	+ 0,226	— 1,331	+ 1,330
φ	+ 1,583	0,000	— 1,585	+ 1,552
60	+ 2,000	— 0,319	— 2,002	+ 1,871
70	+ 2,923	— 0,960	— 2,928	+ 2,514
80	+ 5,754	— 2,805	— 5,769	+ 4,365
85	+ 11,448	— 6,431	— 11,510	+ 8,020
88	+ 28,480	— 17,209	— 28,857	+ 18,998
89	+ 56,585	— 34,972	— 53,562	+ 34,613
90	+ ∞	— ∞	— ∞	+ ∞

Diese Zusammenstellung ergiebt bezüglich der Maxima der Differenzen $\varDelta C$ und $\varDelta A$ d. h. für die beste Wahl der Sterne folgende Regeln:

1. Regel. Kann man blos Sterne in der oberen Culmination beobachten, so wähle man wo möglich zwei Sterne „1" und „2" mit möglichst grosser Declination und einen dritten „3" möglichst nahe dem Aequator, oder umgekehrt „1" und „2" möglichst nahe dem Aequator und „3" möglichst nahe dem Pol. Denn der Stern „3" sowohl mit „1" wie mit „2" combinirt liefert dann für $\varDelta C$ wie für $\varDelta A$ grosse Werthe.

2. Regel. Kann man blos Sterne in der unteren Culmination beobachten, so gilt dieselbe Regel wie sub 1.

3. Regel. Kann man Sterne in der oberen und andere in der unteren Culmination beobachten, so wähle man wo möglich drei Sterne, von denen „1" und „2" in oberer und „3" in unterer Culmination beobachtet werden kann, oder „3" in oberer und „1" und „2" in unterer Culmination und zwar alle drei mit möglichst grossen Declinationen, also möglichst nahe am Pol.

4. Regel. Ist man gezwungen, die Sterne zu nehmen, wie sie gerade innerhalb einer bestimmten Zeit auf einander folgen, so wird man bei der Auswahl der drei Sterne zur möglichst guten Bestimmung von a und c die Coefficienten A und C, die man ja doch sub [9] S. 359 vor der Aufstellung der drei Gleichungen (20) berechnet hat, vergleichen, um zu erkennen, welche Combinationen eben die besten sind.

Um im Sinne der letzteren Regel die in unserem Beispiele S. 356 getroffene Wahl der drei Sterne zu beurtheilen, wollen wir uns die Coefficienten A und C auf S. 355 genauer ansehen. Bezeichnen wir die Sterne, wie sie folgen, mit 1, 2 .... 5, so liefert

2 und 3 die grösste Differenz von $\Delta A'$ wie von $\Delta C'$

2 „ 4 „ zweitgrösste „ „ $\Delta A''$ „ „ $\Delta C''$;

demgemäss combiniren wir 3 mit 2 und 4 mit 2, aber nicht etwa 3 mit 4 und überzeugen uns nun, dass die getroffene Wahl der drei Sterne keine günstigere werden konnte. Um aber zu sehen, welchen Einfluss eine schlechtere Wahl auf die Bestimmung von a und c sowie schliesslich auf s selbst ausübt, wollen wir einmal gerade drei Sterne aussuchen, für welche ΔC und ΔA Minima werden. Die kleinste Differenz ΔA liefern 3 und 4; die nächst kleinste 1 und 5; die nächst kleinste 1 und 4. Die kleinste Differenz ΔC liefern 1 und 4; die nächst kleinste 1 und 5. Hiernach wird eine ungünstige Combination die von 1 mit 4 und von 1 mit 5 werden. Die den Gl. (20) und den Gl. (B) entsprechenden Gleichungen sind dann

$$s = -2^m\,34^s{,}84 + 0{,}3827\,.\,a + 1{,}1771\,.\,c$$
$$s = -2\;\;37{,}90 + 1{,}0671\,.\,a + 1{,}1018\,.\,c$$
$$s = -2\;\;32{,}59 - 0{,}0454\,.\,a + 1{,}6390\,.\,c$$
$$0 = 3^s{,}06 - 0{,}6844\,.\,a + 0{,}0753\,.\,c$$
$$0 = -2{,}25 + 0{,}4281\,.\,a - 0{,}4619\,.\,c$$

und wird ähnlich wie auf S. 356

0,48572	$9{,}83531_n$	8,87679
$0{,}35218_n$	9,63155	$9{,}66455_n$
1,60893	$0{,}95852_n$	
0,68763	$9{,}96700_n$	

$$0 = 40{,}637 - 9{,}089\,.\,a + c$$
$$0 = 4{,}871 - 0{,}927\,.\,a + c$$
$$0 = 35{,}766 - 8{,}162\,.\,a$$

1,55347
0,91180

$\log a = 0{,}64167$ $\qquad a = 4^s{,}383$

$\log c = 9{,}90795_n$ $\qquad c = -0^s{,}809$

log. Corr. (a)	*log* Corr. (c)
0,22453	$9{,}97877_n$
$1{,}22799_n$	$0{,}77718_n$
0,79673	0,06610
0,66987	$9{,}95005_n$
$9{,}29873_n$	$0{,}12253_n$

Corr. (a)	Corr. (c)	Summa	$\Delta\, O$	s
$11^s,67$	$-0^s,95$	$0^s,72$	$-2^m\ 34^s,84$	$-2^m\ 34^s,12$
$-16,90$	$-5,99$	$-22,89$	$-2\ \ 19,09$	$35,98$
$6,26$	$1,16$	$7,42$	$-2\ \ 40,90$	$33,48$
$4,68$	$-0,89$	$3,79$	$-2\ \ 32,59$	$34,11$
$-\ 0,20$	$-1,32$	$-\ 1,52$	$-2\ \ 37,90$	$34,11$
				$1,80$

$$s = -2^m\ 34^s,36.$$

Wollen wir die Unterschiede des Ergebnisses noch deutlicher sehen, so bilden wir für die zwei Berechnungen die Abweichungen der Werthe s vom Gesammtmittel und erhalten

$-0,01$	$-0,24$
$+0,05$	$+1,62$
$+0,05$	$-0,88$
$+0,06$	$-0,25$
$-0,15$	$-0,25$

woraus sich sofort ergiebt, dass die zweite Wahl der Sterne zu einem weniger befriedigenden Resultate geführt hat.

Zum Schlusse dieses Kapitels mögen noch einige Literaturangaben folgen. Das Passageinstrument ist ein für Zeitbestimmungen so wichtiger Apparat, dass dessen Theorie in allen grösseren Lehrbüchern, insbesondere in v. Littrow's theoretischer und praktischer Astronomie Bd. I, ferner in den schon früher erwähnten Werken von Sawitsch und Brünnow abgehandelt wird. Wir haben dasselbe nur als für Beobachtungen im Meridian anwendbar betrachtet und bezüglich hierauf unsere Lehre entwickelt; aber die Anwendbarkeit ist hiermit nicht erschöpft und kommt dasselbe namentlich auch in einer hierzu senkrechten Lage, im ersten Vertical vor und verweisen wir in dieser Beziehung auf eine Abhandlung von Enke „Bemerkungen über das Passageinstrument von Ost nach West.“ Berlin, Jahrb. 1843 und ebenfalls auf das Werk von Brünnow S. 494 u. f. Ausserdem machen wir noch auf eine Abhandlung von W. Döllen aufmerksam: „Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns“; Petersburg, Buchdruckerei der kaiserl. Acad. der Wissenschaften 1863 und schliesslich noch auf einen kleinen Aufsatz in Peters „Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie“, Bd. III. Heft 2. S. 112: „Beschreibung eines kleinen tragbaren Passageinstruments und dessen Gebrauch zu Zeitbestimmungen“ von C. F. W. Peters.

Kapitel IX.

Bestimmung der Zeit aus der Beobachtung correspondirender Sonnen- oder Sternhöhen.

§. 76. Wir wollen im Folgenden den Zeitmoment der oberen Culmination eines Fixsterns oder der Sonne mit T_o, den der unteren mit T_u bezeichnen; ferner den Moment, in welchem diese Gestirne vor einer bestimmt gedachten oberen Culmination eine bestimmte aber sonst beliebige Höhe h erreichen, mit T_1, den nächsten Moment, wo sie nach dieser oberen Culmination (identisch mit dem Momente, in welchem sie vor der nächsten unteren Culmination) dieselbe Höhe h erreichen, mit T_2 und endlich den nächsten Moment, in dem nach dieser unteren Culmination dieselbe Höhe h erreicht wird, mit T_3 bezeichnen. Da nun für die Folge insbesondere das Dreieck

Pol (P), Zenith (Z), Stern (S)

eine Rolle spielt, so wollen wir erst dieses Dreieck, das auch im Vorausgehenden schon wiederholt vorkam, etwas näher betrachten. In ihm ist:

$\sphericalangle SPZ = t =$ Stundenwinkel
$\sphericalangle PSZ = p =$ parallactischer Winkel
$\sphericalangle PZS = a =$ Azimuth von S

ferner:

Seite $PS = 90^0 - \delta =$ Poldistanz von S
„ $PZ = 90 - \varphi =$ „ „ Z
„ $SZ = 90 - h =$ Zenithdistanz von S

Für die drei Winkel des Dreiecks gilt hierbei Folgendes:

Der Stundenwinkel wird, wenn eine andere Zählung nicht ausdrücklich angegeben ist, gezählt vom Meridian aus im Sinne der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel von Ost nach West: von 0^0 bis 360^0; denken wir die Himmelskugel fest und lassen umgekehrt die Erde sich drehen, so muss er dann vom Meridian in einer der wahren Drehung der Erde entgegengesetzten Richtung gezählt

werden. Soll er in einer Bogenlänge ausgedrückt werden, so geschieht dieses durch Angabe eines Bogens auf dem grössten Kreise des Aequators.

Der parallactische Winkel liegt am Punkte S und ist der Winkel, den die grössten Kreise PS und ZS oder der Declinationskreis und der Höhenkreis des Sterns mit einander bilden. Soll dieser Winkel durch eine Bogenlänge gemessen werden, so muss dies auf einem um S als Pol beschriebenen grössten Kreise geschehen, den wir füglich den Horizont des Sterns S nennen könnten.

Das Azimuth ist derjenige Winkel, den der Meridian des Beobachters und der Höhenkreis des Sterns im Punkte Z mit einander bilden; er wird im Bogen auf dem Horizont des Beobachters und zwar meistens in der Richtung vom Nordpunkt aus über Osten nach Süden von 0^0 bis 360^0 gemessen.

Zu den drei Seiten: $(90^0-\delta)$, $(90^0-\varphi)$ und (90^0-h) wollen wir noch Folgendes bemerken.

Der Winkel δ oder die Declination des Sterns wird auf dem Kreise PS vom Aequator aus nach dem Sterne hingezählt und gilt zunächst als unveränderlich; d. h. im obigen Dreieck PZS ist die Seite PS eine constante Grösse. Die Declination δ selbst lassen wir nur Werthe von 0^0 bis $+90^0$ oder von 0^0 bis -90^0 annehmen, je nach dem eben ein Stern auf der nördlichen oder südlichen Hälfte der Himmelskugel gelegen ist.

Da wir nur einen Standpunkt auf der nördlichen Erdhälfte berücksichtigen wollen, so kann φ nur Werthe zwischen 0^0 und $+90^0$ haben.

Bei der Rotation der Erde um ihre Axe beschreibt das Zenith Z einen zum Aequator parallel liegenden kleineren Kreis und folgt daraus, dass auch $(90^0-\varphi)$ oder die Seite PZ eine unveränderliche Grösse ist, die sich aber von der Seite PS dadurch unterscheidet, dass sie nicht wie diese auch ihrer Lage nach unveränderlich ist, sondern um P rotirt.

Den Winkel h zählen wir auf ZS vom Horizont aus nach dem Sterne hin und nennen h positiv, falls wir hierbei in die Zenithhälfte des Himmels gelangen, umgekehrt negativ, falls wir in die Nadirhälfte kommen. Aehnlich wie bei δ lassen wir auch bei h nur Werthe von 0^0 bis $+90^0$ oder von 0^0 bis -90^0 zu, je nach dem der Stern in der Zenith- oder in der Nadirhälfte liegt.

Unter dem Südpunkte des Horizonts versteht man aber denjenigen Durchschnittspunkt des Meridians mit dem Horizont, der mit Z auf derselben Seite von P liegt, während der Nordpunkt mit Z auf verschiedene Seiten von P fällt.

Der Nord- und Südpunkt ist seiner Lage nach im Weltraume veränderlich; es rotiren beide Punkte zugleich mit dem Meridian und beschreiben Parallelkreise zum Aequator, welche von diesem entsprechend einen Winkelabstand gleich $+(90^0-\varphi)$ und $-(90^0-\varphi)$ vom Pole aber einen solchen gleich φ und $(180^0-\varphi)$ besitzen.

Nach einem bekannten und von uns schon vielfach angewandten Satze der sphärischen Trigonometrie ist nun weiter in unserem Dreieck:

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi . \sin\delta + \cos\varphi . \cos\delta . \cos t \\ \sin\varphi &= \sin h . \sin\delta + \cos h . \cos\delta . \cos p \\ \sin\delta &= \sin\varphi . \sin h + \cos\varphi . \cos h . \cos a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} \cos t &= \frac{\sin h - \sin\varphi . \sin\delta}{\cos\varphi . \cos\delta} \\ \cos p &= \frac{\sin\varphi - \sin h . \sin\delta}{\cos h . \cos\delta} \\ \cos a &= \frac{\sin\delta - \sin\varphi . \sin h}{\cos\varphi . \cos h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für den Moment der oberen Culmination ist $t = 0^0$ und wird somit

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta); \; h = 90^0 - \varphi + \delta;$$

Sterne mit einer positiven Declination $\delta > \varphi$ zeigen sich in ihrer oberen Culmination zwischen dem Zenith und dem Pol. Sterne, deren negatives δ grösser wie $(90-\varphi)$ ist, gelangen nicht zur sichtbaren oberen Culmination und sind überhaupt für einen Beobachter mit der Polhöhe φ unsichtbar.

Für den Moment der unteren Culmination ist $t = 180^0$ und wird hierfür

$$\sin h = -\cos(\varphi + \delta); \; h = -90^0 + \varphi + \delta;$$

Sterne mit einer positiven Declination $< (90^0 - \varphi)$ gelangen nicht mehr zur sichtbaren unteren Culmination; Sterne mit einer positiven Declination $\delta > \varphi$ gehen für einen Beobachter mit der Polhöhe φ niemals unter.

Zur Beurtheilung des Zusammenhangs der verschiedenen Grössen, wie sie in den Gleichungen (1) und (2) vorkommen, kann man oft mit Vortheil eine graphische Darstellung verwenden und wollen wir diese für die erste der Gleichungen (1) zu erlangen suchen. Setzen wir zu dem Ende

$$\sin\varphi . \sin\delta = m; \; \cos\varphi . \cos\delta = n$$

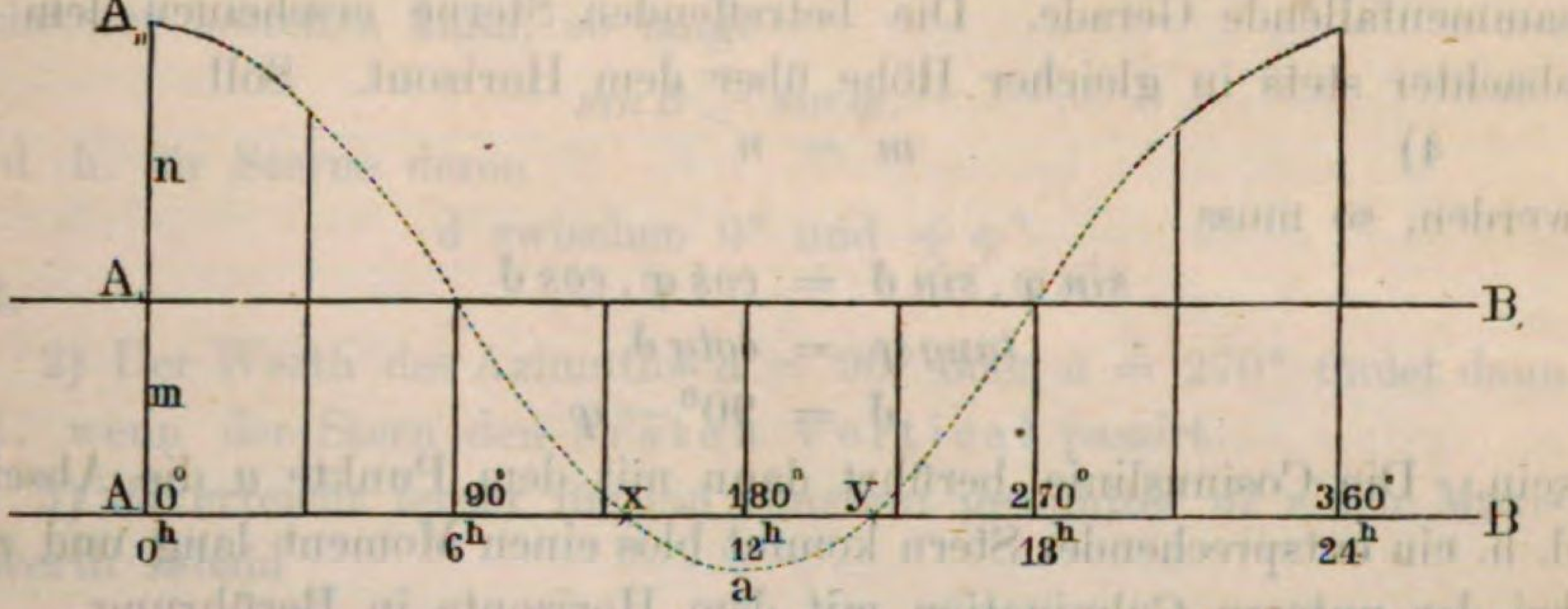
so ist

$$\sin h = m + n . \cos t;$$

rechnen wir dann Fig. 77 auf AB als Abscissenaxe die Werthe

von t in Graden und darunter in Stunden ausgedrückt, nehmen senkrecht hierzu die Ordinaten $AA_{,} = m$, $A_{,}A_{,,} = n$ an und ziehen durch $A_{,}$ eine Parallele $A_{,}B_{,}$ zur Abscissenaxe, so stellen die Ordinaten einer über $A_{,}B_{,}$ construirten Cosinuslinie, von $A_{,}B_{,}$ aus gerechnet, den Summanden $n.cos\,t$, von AB aus gerechnet, die beiden Summanden $m + n.cos\,t$, mithin den Verlauf von $sin\,h$ selbst vor.

Figur 77.



Die Grössen m und n betreffend, leuchtet ein, dass beide einzeln und zusammen gleich Null und beide, aber nur einzeln, gleich Eins werden können. Lassen wir nun zunächst nur positive Werthe von δ zu und nehmen

1) $$m = 0;\ n = 0$$

an, so setzt dies voraus, dass entweder

$$\varphi = 0^0 \text{ und } \delta = 90^0$$

oder

$$\varphi = 90^0 \text{ „ } \delta = 0^0$$

ist. Für diesen Fall wird die Cosinuslinie der Fig. 77 identisch mit der Geraden AB d. h. mit anderen Worten ein betreffender Stern wird von dem betreffenden Standpunkt aus beobachtet, sich stets im Horizonte zu bewegen scheinen, da die Abscissenaxe AB offenbar den Horizont repräsentirt. Setzen wir

2) $$m = 0;\ 0 < n < 1;$$

so verlangt diese Annahme entweder dass

$$\varphi = 0^0 \text{ und } 0^0 < \delta < 90^0$$

oder

$$\delta = 0^0 \text{ „ } 0^0 < \varphi < 90^0$$

ist. In diesem Falle behält die Curve, welche den Verlauf von $sin\,h$ vorstellt, ihre Form wie in der Fig. 77 bei, und muss nur parallel mit sich selbst verschoben werden, bis $A_{,}B_{,}$ mit AB zusammenfällt. Die Punkte x und y, in denen die Curve die Abscissenaxe durchschneidet, rücken dann weiter auseinander und fallen mit den Punkten 90^0 und 270^0 zusammen. Die betreffenden Sterne würden also einem Beobachter, dessen Ort den angegebenen Bedingungen entspricht,

eben so lange unter als über dem Horizonte zu bleiben scheinen. Soll

3) $0 < m < 1;\; n = 0$

werden, so setzt dies ein

$$\varphi = 90^0 \text{ und } 0^0 < \delta < 90^0$$

oder

$$\delta = 90^0 \quad „ \quad 0^0 < \varphi < 90^0$$

voraus und reducirt sich die Curve für $sin\, h$ auf eine mit $A_{,}B_{,}$ zusammenfallende Gerade. Die betreffenden Sterne erscheinen dem Beobachter stets in gleicher Höhe über dem Horizont. Soll

4) $m = n$

werden, so muss

$$sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta = cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta$$
$$tang\, \varphi = cotg\, \delta$$
$$\delta = 90^0 - \varphi$$

sein. Die Cosinuslinie berührt dann mit dem Punkte a die Abscisse, d. h. ein entsprechender Stern kommt blos einen Moment lang und zwar bei der unteren Culmination mit dem Horizonte in Berührung.

Lassen wir δ negativ werden, so ändert blos m sein Vorzeichen, während n dasselbe behält und muss die Cosinuslinie parallel mit sich selbst so verschoben werden, dass $A_{,}B_{,}$ unterhalb AB zu liegen kommt.

Um ferner zu erfahren, wann die Aenderung der Höhe eines Sterns ein Maximum erreicht, differenziren wir die erste der Gleichungen (1) nach t und erhalten:

$$dh = -\, cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta \,.\, \frac{sin\, t}{cos\, h} \,.\, dt \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

achten wir nun darauf, dass im Dreieck PZS auch die bekannten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{sin\, t}{sin\, a} &= \frac{cos\, h}{cos\, \delta} \\ \frac{sin\, t}{sin\, p} &= \frac{cos\, h}{cos\, \varphi} \\ \frac{sin\, a}{sin\, p} &= \frac{cos\, \delta}{cos\, \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

bestehen, so wird, wenn wir den aus der ersten und zweiten dieser letzten Gleichungen abzuleitenden Werth von $\frac{sin\, t}{cos\, h}$ in die Gl. (3) einführen, einmal

$$dh = -\, cos\, \varphi \,.\, sin\, a \,.\, dt \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

das anderemal

$$dh = -\, cos\, \delta \,.\, sin\, p \,.\, dt \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Aus diesen beiden Gleichungen allein sowie unter Berücksichtigung vorausgehender Gleichungen ergeben sich nun folgende Thatsachen.

1) dh erreicht für ein constant gewähltes dt (also z. B. für $dt = 15''$) einen Maximalwerth, sobald

$$\sin a = \pm 1 \text{ d. h. } a = 90^0 \text{ oder } a = 270^0$$

wird. Setzen wir aber in der letzten der Gl. (1) für a diese Werthe ein, so erhalten wir für diesen Fall die weitere Bedingungsgleichung

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi},$$

welche nur bestehen kann, so lange

$$\sin \delta \overline{\overline{<}} \sin \varphi$$

ist, d. h. für Sterne deren

$$\delta \text{ zwischen } 0^0 \text{ und } + \varphi^0$$

liegt.

2) Der Werth des Azimuths $a = 90^0$ oder $a = 270^0$ findet dann statt, wenn der Stern den ersten Vertical passirt.

3) dh erreicht ferner für ein constant gewähltes dt einen Maximalwerth sobald

$$\sin p = \pm 1 \text{ d. h. } p = 90^0 \text{ oder } p = 270^0$$

wird. Setzen wir diese Werthe aber in die zweite der Gl. (1) ein, so erhalten wir die weitere Bedingungsgleichung:

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta},$$

welche Gleichung nur bestehen kann, so lange

$$\delta \overline{\overline{>}} \varphi$$

ist, d. h. für Sterne deren

$$\delta \text{ zwischen } \varphi^0 \text{ und } + 90^0$$

gelegen ist. In diesem Falle wird gemäss der dritten Gleichung (4) aber

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi},$$

welche Gleichung, da δ nur positive Werthe von φ^0 bis 90^0 annehmen darf, wiederum lehrt, dass jetzt, wo es sich um einen Maximalwerth von dh handelt, a nur für den Grenzfall $\delta = \varphi$ einen Werth gleich 90^0 erlangen kann, dass ausserdem aber a stets kleiner als 90^0 ist, und die zwischen Pol und Zenith gelegenen Sterne überhaupt nicht im ersten Vertical beobachtet werden können.

4) Setzen wir $a = 90^0$ oder 270^0, so ist gemäss Gl. (5)

$$dh = \pm \cos \varphi \,.\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

welche Gleichung den bemerkenswerthen Satz enthält, dass

„für Sterne, deren Declination zwischen 0^0 und $+ \varphi$ liegt, für „ein constant gewähltes dt die Maximaländerung dh nur von

„der Polhöhe abhängig, dagegen von der Declination δ
„unabhängig ist."

5) Setzen wir $p = 90^0$ oder 270^0, so wird gemäss Gl. (6)

$$dh = \pm \cos\delta \, . \, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

welche Gleichung den bemerkenswerthen Satz enthält, dass

„für Sterne, deren Declination zwischen φ und $+ 90^0$ liegt,
„für ein constant gewähltes dt die Maximaländerung dh nur
„von der Declination abhängig, dagegen von der Polhöhe
„völlig unabhängig ist."

Es wird nicht uninteressant sein, für diese beiden letzten Sätze auch eine geometrische Begründung aufzusuchen und empfehlen wir dieses dem Leser.

Setzen wir in den Gleichungen (5) und (6) dt auf die linke Seite, so ergeben sich hierfür die weiteren Gleichungen

$$dt = -\frac{dh}{\cos\varphi \, . \, \sin a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und

$$dt = -\frac{dh}{\cos\delta \, . \, \sin p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Diese beiden Gleichungen bestätigen aber

6) Die Thatsache, dass bei einem constant gewählten dh der Werth dt gerade in all den Fällen ein Minimum wird, in denen vorhin dh bei constant gewähltem dt einen Maximalwerth erreichte. Hieraus ergeben sich zwei Sätze, die für das Folgende von besonderer Bedeutung sind, nämlich:

Erster Satz. Begeht man bei einer Höhenmessung eines Sterns, dessen Declination zwischen 0^0 und φ liegt, einen Fehler z. B. in der Einstellung des Höhenmessinstruments gleich dh, so übt dieser Fehler dann einen möglichst kleinen Einfluss auf die Zeitbestimmung aus, falls man den Stern möglichst im ersten Vertical beobachtet hat.

Zweiter Satz. Begeht man bei einer Höhenmessung eines Sterns, der zwischen dem Zenith und dem Pole liegt, einen Fehler gleich dh, so übt dieser Fehler den kleinsten Einfluss auf die Zeitbestimmung aus, wenn man den Stern in einer Lage beobachtet, in welcher der parallaktische Winkel $p = 90^0$ oder, mit andern Worten der

$$\sin a = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

wird, eine Gleichung mittelst welcher sich a in einem gegebenen Falle leicht aus φ und δ berechnen lässt.

§. 77. Hiernach können wir in der Betrachtung über unsere

Zeitbestimmungsmethode weiter gehen und bemerken vor allem, dass zwei gleiche Höhen, die ein Fixstern, die Sonne, der Mond, oder irgend ein Planet an einem bestimmten Tage zu einer Zeit T_1 vor der oberen Culmination (vor dem Mittag) und zu einer Zeit T_2 nach der oberen Culmination (nach dem Mittag) erreicht

„correspondirende Höhen"

genannt werden, wobei der Zusatz „eines Fixsterns" „der Sonne" etc. näher bezeichnet, für welchen Himmelskörper sie zu denken sind. Selbstverständlich kann man aber auch gleiche Höhen vor und nach der unteren Culmination berücksichtigen, so dass die eine Beobachtung, wenn die Sonne in Betracht käme, zur Zeit T_2 an einem bestimmten Tage Nachmittags, die andere zur Zeit T_3 am Vormittage des andern Tags stattfindend zu denken wäre. Im Folgenden werden bei der Beobachtung nur Fixsterne und die Sonne in Betracht kommen und unterscheidet sich ein Fixstern von der Sonne dadurch, dass ersterer, bei den drei gleichen Höhen zu den Zeiten T_1, T_2 und T_3 beobachtet, dieselbe Declination besitzt, und bei ihm auf eine Aenderung des δ keine Rücksicht genommen zu werden braucht; bei der Sonne können wir auf doppelte Weise Voraussetzungen machen: einmal nämlich können wir auch bei ihr es für zulässig erachten, dass innerhalb des Zeitraums von ein oder zwei Tagen die Declination unverändert dieselbe bleibe, und wäre dieser Fall dann als identisch mit der Beobachtung eines Fixsterns anzusehen. Zweitens aber, wenn es sich um grössere Genauigkeit handelt, wird zwar die Aenderung des δ, die für die ⨀ innerhalb der gegebenen Zeit, wie wir wissen, keineswegs gleich Null ist, berücksichtigt, aber dennoch darf diese Aenderung dann innerhalb zweier Tage von uns wenigstens als eine gleichförmige angesehen werden.

Weiterhin handelt es sich jetzt um die Praxis der Beobachtung. Der Schwerpunkt und das Angenehme der ganzen Methode besteht darin, dass man die betreffenden Himmelskörper nur zu beobachten hat, wenn sie zu den Zeiten T_1, T_2 und T_3 gleiche Höhen haben, ganz ohne Rücksicht auf die absolute Grösse der Höhen, woraus folgt einmal, dass das betreffende Instrument, mit dem zur Zeit T_1 beobachtet wurde, in unveränderter Höheneinstellung auch zur Zeit T_2 bzw. auch T_3 zur Anwendung kommt, zweitens dass das Instrument, wenn man nur sicher ist, dass seine Einstellung dieselbe bleibt, sonst mit Fehlern, z. B. einem Collimationsfehler oder Indexfehler, behaftet sein darf, wie es will.

Diese Art der Beobachtung gelingt demnach ohne weiteres mit jedem Theodolith oder auch mit jedem Fernrohr, dessen Verticalaxe genau vertical gestellt werden kann und bei dem der Mechanismus ge-

stattet, eine Drehung um diese Axe vorzunehmen. Da die absolute Höhe h zunächst ganz gleichgiltig ist, auch ausserdem sonst kein Winkel gemessen wird, so braucht ein solches Fernrohr aber noch nicht einmal einen Höhenkreis und einen Horizontalkreis zu besitzen, denn es kommt nur darauf an, dass wenn eine bestimmte Einstellung Vormittags zur Zeit T_1 als Anfangsstellung gewählt wird, diese am Nachmittag oder am anderen Vormittag dieselbe geblieben ist. Man begreift demnach, wie es sogar nicht einmal eines Fernrohrs bedürfte, wie man bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit auch mit andern Einrichtungen, z. B. einem passenden Diopter oder einem Apparate, bei dem eine geeignete Einrichtung zur Beobachtung von dem Schatten- oder dem Lichtbilde der ⊙ getroffen ist, wird zum Ziele gelangen können. Vor allem jedoch wird in der Praxis bei dieser Methode der von Newton erfundene und von Hadley im Jahre 1731 zuerst beschriebene

Spiegelsextant

benutzt. Der Apparat pflegt in jedem Lehrbuche der Physik besprochen zu werden, so dass hier die Beschreibung seiner äusseren Einrichtung übergangen werden kann. Auch die Betrachtung der Fehler dieses Instruments kann in unserem jetzigen Kapitel bei Seite gesetzt werden, da die Methode der Beobachtung und die hierdurch gewonnenen Resultate davon unabhängig sind.

Der Sextant kommt jedoch nicht allein zur Verwendung, sondern verlangt noch die Hilfe eines zweiten Apparats, den man den „künstlichen“ bzw. „natürlichen Horizont“ zu nennen pflegt. Der

künstliche Horizont

besteht in einer Glasplatte, welche auf drei Fussschrauben ruhend mittelst einer Libelle genau horizontal gestellt werden kann und ist desshalb ein verhältnissmässig kostbarer Apparat, weil eine Glasplatte erforderlich ist, deren für die Reflexion bestimmte Vorderfläche eine genaue Ebene bilden muss. Da nur eine einmalige Reflexion an dieser Ebene stattfinden darf und nicht ein zweites Bild an der Hinterfläche der Platte erzeugt werden soll, so muss ferner die Platte nicht aus weissem, sondern dunkel gefärbtem grünem oder rothem Glase bestehen, bei welchem das nach der zweiten Fläche hin gebrochene oder von da etwa noch zurückgeworfene Licht durch Absorption verloren geht. Ein solcher Horizont kann aus der Werkstätte von Breithaupt in Cassel, von Ertel oder Steinheil in München bezogen werden und kostete ein derartiges Instrument von ersterer Firma incl. zweier kleinen Libellen 16 Thaler.

Die Prüfung einer solchen reflectirenden Glasebene auf ihre Richtigkeit kann auf verschiedene Weisen vorgenommen werden, am einfachsten aber mit dem Sextanten selbst, indem man zunächst die im

Sextanten bei der Nullstellung und der directen Beobachtung der Sonne sich nahe berührenden beiden Sonnenbilder mittelst der Micrometerschraube vollständig mit den Rändern an einem Punkte zur Berührung bringt. Richtet man jetzt den Sextanten auf die Glasplatte und beobachtet das an einer bestimmten Stelle derselben reflectirte Sonnenbild, so wird man zwei Sonnenbilder erblicken, die entweder auch genau in einem Punkte sich berühren oder es nicht thun. Ist ersteres der Fall, so wird man, den Sextanten auf eine andere Stelle der Glasplatte richtend, zusehen, ob die Berührung der beiden Bilder auch da stattfindet und so die einzelnen Stellen der Glasplatte durchprüfen. Zeigen sie alle die genaue Berührung der Sonnenränder, so kann man überzeugt sein, dass die Platte eine genaue Ebene ist; thun sie dies aber nicht, treten die Bilder etwas auseinander, oder fallen sie an einer Stelle etwas übereinander, so besitzt die Spiegelebene Krümmungen und wird sich an solchen Stellen wohl meistens wie ein cylindrischer Hohl- oder Convexspiegel verhalten, der das Sonnenbild in bestimmter Richtung breiter oder schmäler erscheinen lässt. Aber auch in dem Falle, wo der Spiegel vielleicht an einer Stelle anstatt eine völlige Ebene zu bilden, ein Stück eines sphärischen Hohl- oder Convexspiegels bildete, würde eine Coincidenz der Sonnenränder verloren gehen, weil auch bei einer solchen Spiegelung der scheinbare Durchmesser des Sonnenbildes sich ändert, womit ja jene Coincidenz im innigen Zusammenhang steht. Zeigt sich also ein künstlicher Horizont in dieser Weise fehlerhaft, so muss er überhaupt verworfen werden, oder muss wenigstens, wenn dieser Fehler nur einer kleinen Stelle angehört, diese durch Aufkleben von Papier überdeckt und bei der Beobachtung blos die tadellose Fläche benutzt werden.

Der künstliche Horizont bietet den grossen Vortheil, dass seine Spiegelebene als solche durch Luftbewegungen und Erschütterungen nicht geändert wird. Wendet man dagegen anstatt seiner eine flüssige Masse an, die an und für sich einen

natürlichen Horizont

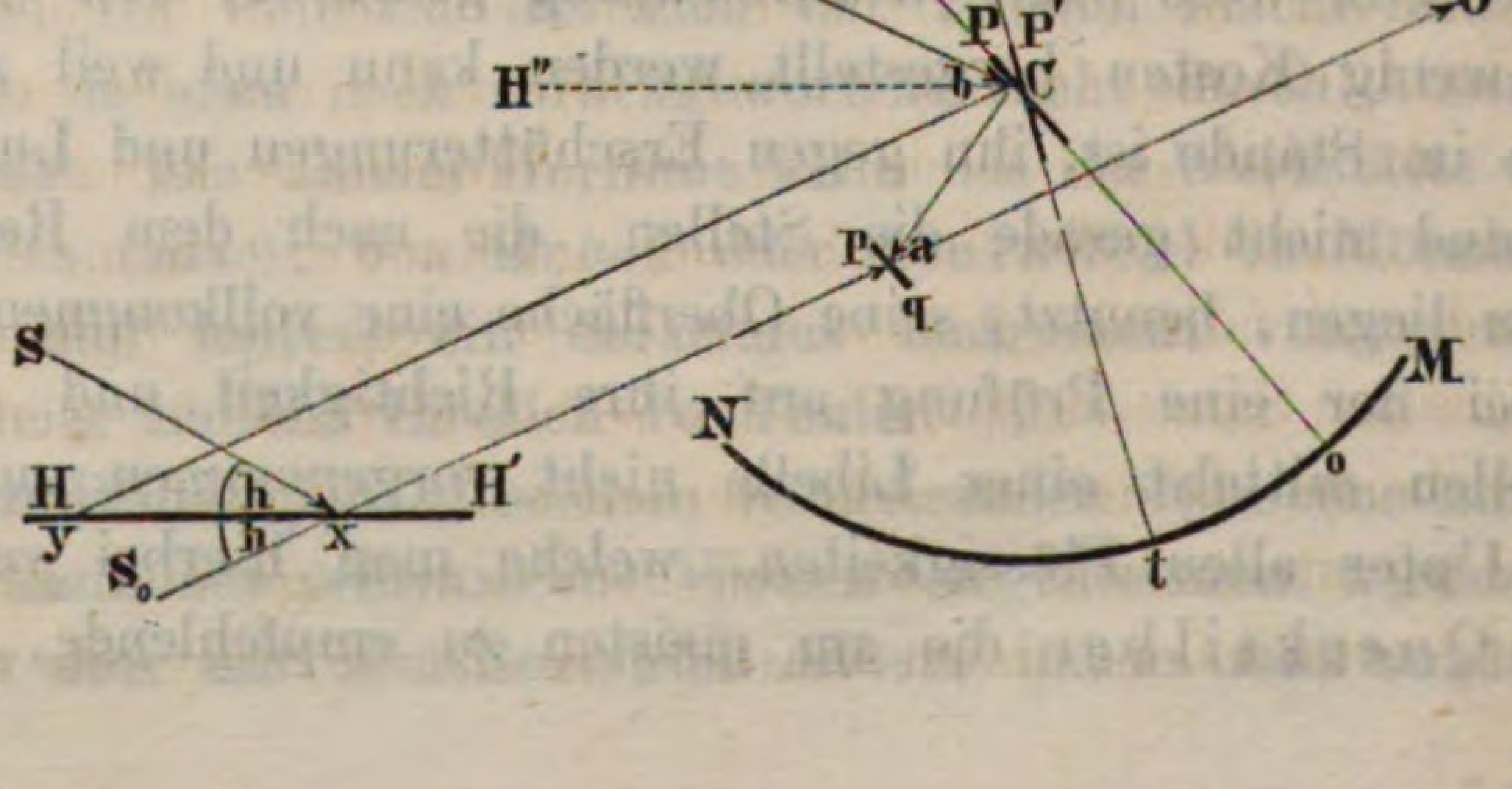
bildet, so ist dieser Einfluss oft sehr störend, aber trotzdem wird der letztere Reflector wohl mehr in Anwendung gebracht, weil er erstens mit sehr wenig Kosten hergestellt werden kann und weil zweitens, wenn man im Stande ist, ihn gegen Erschütterungen und Luftzug zu schützen und nicht gerade die Stellen, die nach dem Rande des Gefässes zu liegen, benutzt, seine Oberfläche eine vollkommene Ebene bildet, bei der eine Prüfung auf ihre Richtigkeit und ein Horizontalstellen mittelst einer Libelle nicht vorgenommen zu werden braucht. Unter allen Flüssigkeiten, welche man hierbei verwenden kann, ist Quecksilber die am meisten zu empfehlende, insofern

hierbei die stärkste Reflexion von sämmtlichen tropfbaren Flüssigkeiten eintritt und somit diese Reflexion nicht blos die Beobachtung der Sonne gestattet, sondern auch bei Nacht die schwächeren Bilder der Fixsterne zu beobachten erlaubt. Als Gefäss für das Quecksilber benutzt man nach Gerling am besten eine flache, etwa einen halben Fuss im Durchmesser haltende und nach der Mitte zu etwas vertiefte mit feinem Silber doublirte Kupferschale, bei welcher ein inniger Contact des Quecksilbers mit der Bodenfläche und dem Rande stattfindet und die ganze Masse des Quecksilbers bei einiger Erschütterung nicht wie ein grosser flacher Tropfen hin und her schaukelt, und ausserdem wegen des Contacts der Flüssigkeit mit dem Rande des Gefässes die Oberfläche auf eine weitere Strecke nach Aussen einen genauen Horizont bildet. Will man eine Metallschale nicht anwenden, so benutzt man ein Holzgefäss im Lichten etwa 13 Ctm. lang, 9 Ctm. breit, 9 Millim. hoch, dessen Seitenwände unter 45^0 gegen den Boden hin abgeschrägt sind und die Bodenfläche etwas grösser ist, wie die lichte Oeffnung des Gefässes. Will man den oft sehr lästigen Einfluss der Luftströmungen beseitigen, so stellt man über das Gefäss ein Dach, dessen schräge Seiten unter 45^0 gegen den Horizont verlaufen, mithin oben unter 90^0 zusammengehen und die am besten aus zwei ganz dünnen Glimmerplatten bestehen, während die Giebelwände, die über die langen Seiten des Gefässes zu stehen kommen, von zwei Bretchen gebildet werden.

§. 78. Inwiefern nun dieser künstliche oder natürliche Horizont in Verbindung mit dem Sextanten eine Höhenmessung gestattet, möge der Hauptsache nach durch die Figur 78 erläutert werden, bei welcher Erläuterung zugleich einige weitere praktische Bemerkungen einfliessen sollen.

Je nachdem man stehend oder im Sitzen beobachten will,

Fig. 78.



wird man den Horizont HH' in einer für den Körper passenden Höhe aufstellen und sich selbstverständlich durch eine entsprechende Kopfbedeckung gegen eine lästige Einwirkung der Sonnenstrahlen schützen. Sendet nun die Sonne ihre Strahlen in der Richtung Sx auf den Horizont HH', so dass $\measuredangle\ SxH = h$ der Höhenwinkel ist, so reflectirt dieser Horizont diese Strahlen in der Richtung xO, woraus folgt, dass wenn dieser Richtung entgegen das Auge O mit dem Fernrohr des Sextanten nach dem Horizonte sieht, um die durch die unbelegte Hälfte des festen Spiegels pq durchgehenden Strahlen aufzufangen, ein Sonnenbild wahrnimmt, das scheinbar auch unter dem Winkel $S_0xH = h$ unter dem Horizonte liegt und das wir einfach das Bild „I" nennen wollen. Hiermit wäre die Haltung des Sextanten in einer Beziehung schon bezeichnet. Käme umgekehrt ein Lichtstrahl in der Richtung Oa auf den Spiegel pq, so würde dieser Strahl in der Richtung ab auf den beweglichen Spiegel CP fallen können und stände dieser in der Nullstellung $P0$ parallel zu pq, so würde der Strahl ab in der Richtung by vom Spiegel CP zurückgeworfen der Art, dass $by \parallel Ox$ verliefe. Verfolgen wir nun einen weiteren von der Sonne kommenden Strahl $S'b \parallel Sx$, so bildet dieser mit by einen Winkel $S'by$, der sofort als ein Winkel $= 2h$ erkannt wird, und den eine Linie bH'' die $\parallel HH'$ durch b gelegt wird, halbirt. Damit ferner ein in der Richtung Oa und von hier nach b verlaufender Strahl nicht in der Richtung by sondern bS' vom beweglichen Spiegel reflectirt wird, d. h. also die Reflexionsrichtung by sich in die von bS' verwandelt und hierbei einen Winkel $= 2h$ beschreibt, muss, wie aus den Lehren der Optik bekannt ist und wonach die Reflexionsrichtungen sich um 2α ändern, wenn ein Spiegel sich um α dreht, der Spiegel CP in eine Lage CP' um C gedreht werden so, dass Winkel $0Ct = h$ wird. Ist dies aber der Fall, so wird auch umgekehrt ein Strahl $S'b$, der von der Sonne kommt und auf den Spiegel CP' fällt, in der Richtung ba auf pq und von hier in der Richtung aO ins Auge gelangen.

Da wir es weiter nicht mit einem einzigen Strahle $S'b$, sondern immer mit Parallelbündeln zu thun haben, so ist klar, dass auf diese Weise auch von der Hälfte des Spiegels pq die auf der hinteren Seite einen Beleg trägt, in der Richtung Oa ein zweites Bild „II" von der Sonne erblickt wird, das mit dem Bilde „I" zur völligen Deckung gebracht werden kann, falls der Sextant in einer ganz bestimmten Lage gehalten wird und falls die Einstellung des beweglichen Spiegels dem eben mitgetheilten Satze entspricht. Da selbstverständlich, wenn diese Deckung der beiden Bilder erreicht werden soll, die Reflexionsebenen von PC und pq gleichzeitig in die zwischen dem Auge und der Sonne zu denkende Verticalebene fallen müssen, so ist hiermit ein weiterer

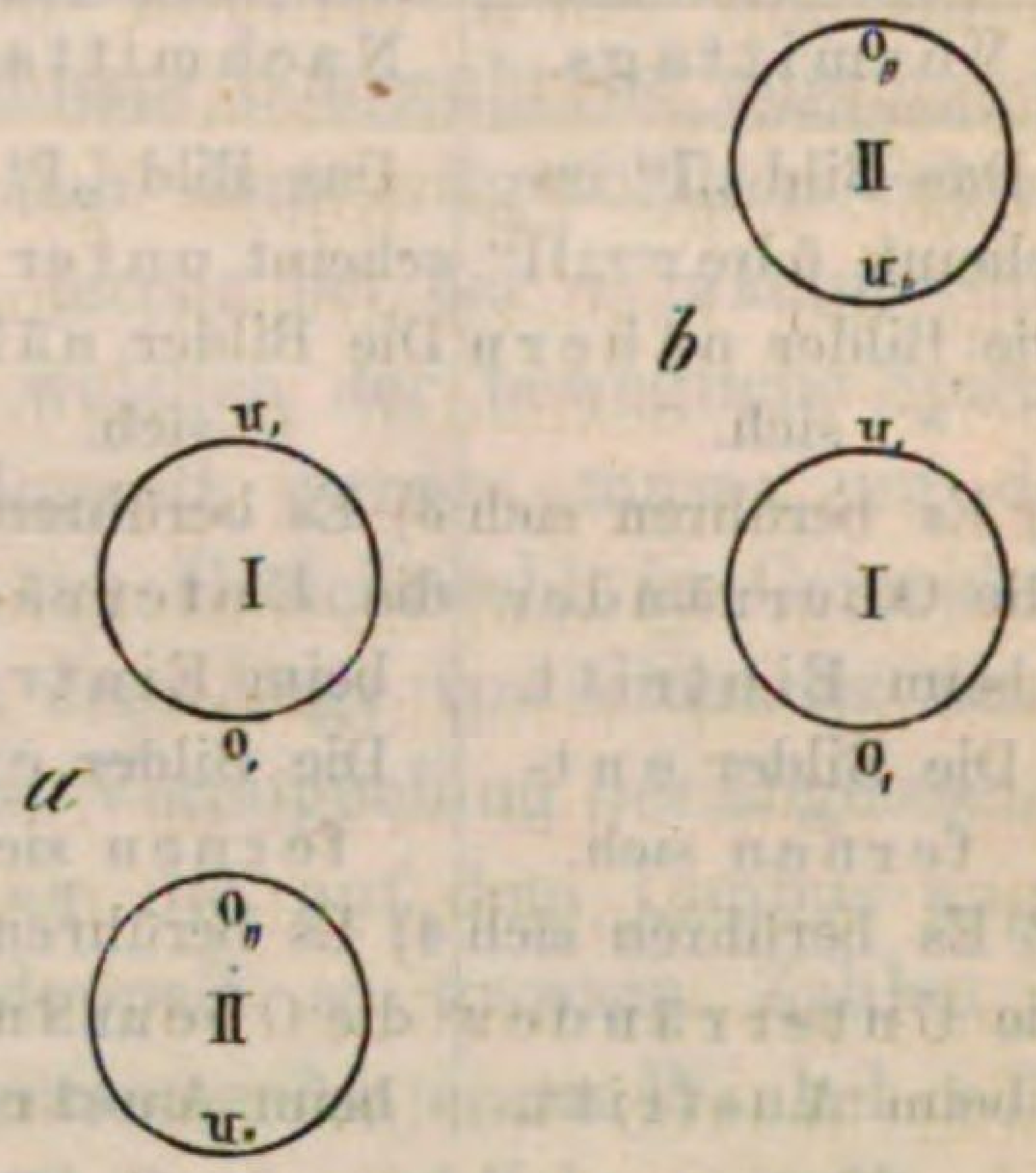
Fingerzeig für die Haltung des Sextanten gegeben. Das direct gesehene Bild „I“ bleibt nämlich sichtbar, auch wenn man den Sextanten um die Axe aO des Fernrohrs dreht, das Bild „II“ aber kann nur mit „I“ in Coincidenz gebracht werden, wenn die eben erwähnte Coincidenz der betreffenden Ebenen stattfindet und diese ist nahe erreichbar, wenn man z. B. den Schatten beobachtet, den die Metallradien des Sextanten, — denn er ist ja durchbrochen gearbeitet — werfen, und diesen Schatten eines vorliegenden Metallradius auf einen dahinter liegenden fallen lässt. Diese Schattenbeobachtung kann ziemlich in der für die Beobachtung genommenen Lage des Kopfes gemacht werden, wenn man den Blick, ohne den Kopf zu drehen, stark nach unten wendet und die Metalltheile des Sextanten zu beobachten sucht. Hält man in der hiernach sich ergebenden Lage die Kreisebene des Sextanten fest und dreht den Arm ^0C und hiermit den Spiegel P, so wird leicht die richtige Stellung CP' erreicht werden; achtet man aber auf diese einfachen Fingerzeige nicht, und fängt an zu probiren, so wird man sich unter der Hitze der Sonnenstrahlen oft abquälen und vielleicht geradezu ausser Stand gesetzt werden, eine Beobachtung zu vollenden. Zur Vermeidung hiervon beachte man auch noch die folgende Bemerkung. Der richtige Winkel tC^0 kann nämlich auch vorher schon annähernd eingestellt werden, ohne dass man dem Horizont gegenüber Stellung nimmt und ohne dass man ins Fernrohr sieht. Zu dem Ende bringt man die Kreisebene mit dem Verticalkreise der ⊙ möglichst in Coincidenz und zwar so, dass der Kreisbogen MN nach der ⊙ gekehrt ist und P^0 mit dem neben ihm liegenden unbeweglichen Metallradius möglichst horizontal liegt. Dreht man jetzt den beweglichen Arm P^0, so wird man aus dem Schatten, den gewisse Theile dieses Arms auf dahinter liegende werfen, erkennen, ob man die Höhe der Sonne annähernd eingestellt hat.

Würde nun ein Fixstern zu beobachten sein, so wäre zu dem bisher Mitgetheilten nichts mehr hinzuzufügen, da die Bilder der Fixsterne als leuchtende Punkte zu betrachten sind, und eine Coincidenz vom Bilde „I“ mit „II“ nichts Zweifelhaftes bieten kann. Bei der Sonne aber fragt es sich vor allem, welchen Punkt derselben unterwerfen wir der Beobachtung? Die Frage wird sich am besten entscheiden lassen, wenn wir uns erst darüber klar werden, wie die Sonnenbilder „I“ und „II“ im Gesichtsfeld erscheinen.

Bezüglich des Mittelpunktes der Sonne verlangt die Beantwortung der Frage keine besondere Ueberlegung und handelt es sich hierbei vielmehr um das Erscheinen des Ober- und Unterrandes derselben. Da nun das Bild „I“ ein von HH' geliefertes Spiegelbild der ⊙ ist und das

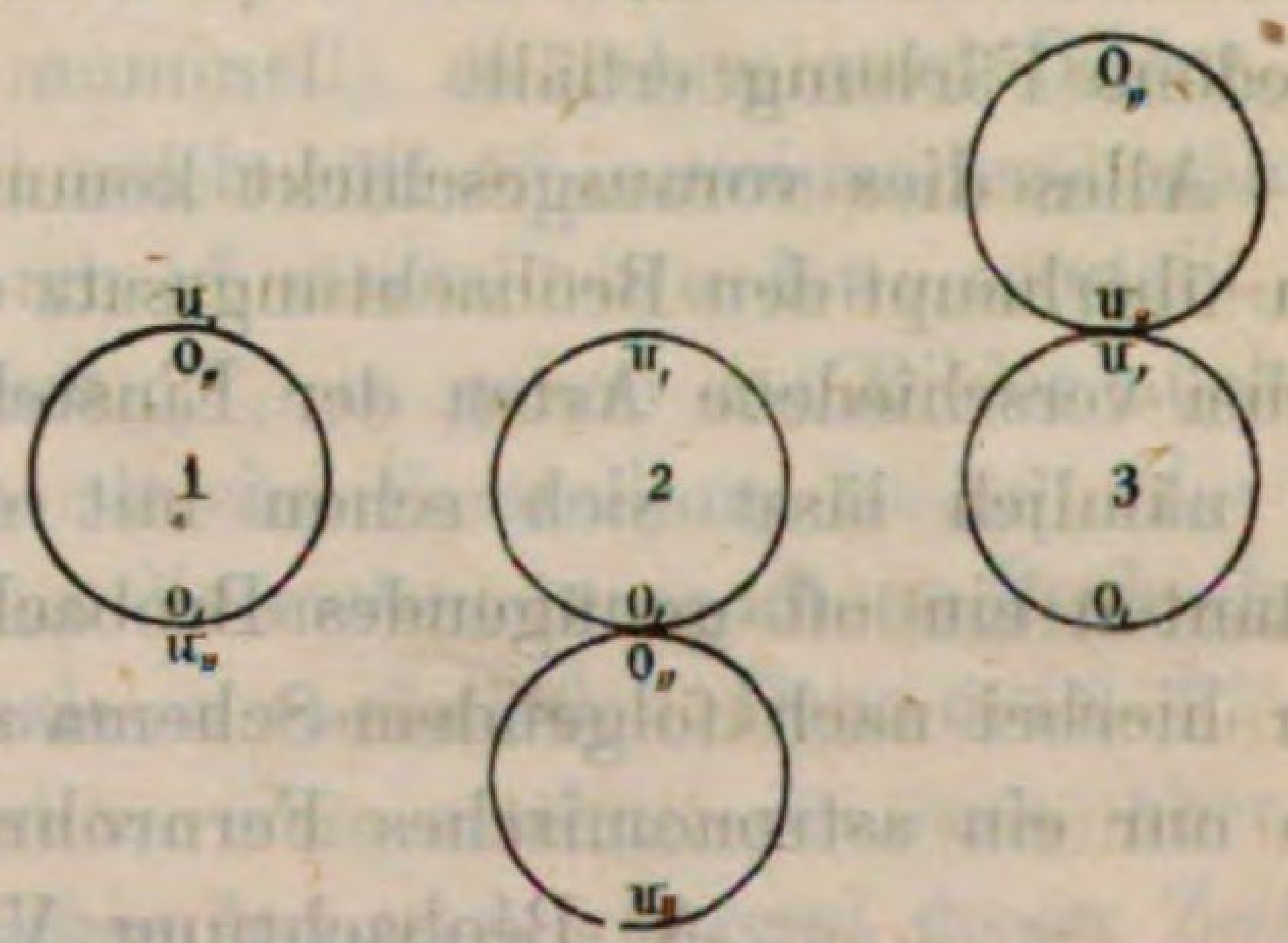
Fernrohr, wenn wir es als ein t e r r e s t r i s c h e s voraussetzen, dieses Spiegelbild nicht umkehrt, so leuchtet ein, dass derjenige Rand, der beim Bild „I“ als Oberrand erscheint, in Wirklichkeit der Unterrand der Sonne ist und umgekehrt. Anders aber beim Bild „II“, welches nach doppelter Reflexion ins Auge gelangt. In ihm entspricht der scheinbare Oberrand auch wirklich dem Oberrand der Sonne und der Unterrand dem Unterrand derselben, so dass wenn die Ränder nicht in Coincidenz sind, die Erscheinung sich so wie in Figur 79. *a* oder *b* zeigt. Würde statt des terrestrischen Fernrohrs ein a s t r o n o m i s c h e s gesetzt, so würden beide Sonnenbilder umgekehrt werden, d. h. im Bild „I“ würde der untere Rand wirklich dem Unterrand der ⊙, im Bilde „II“ dagegen der scheinbare Unterrand dem Oberrande der ⊙ entsprechen, so dass auch hier wieder die zusammengehörigen Ränder wie bei Fig. 79. *a* und *b* sich am nächsten stehen, nur mit dem Unterschiede, dass im Falle *a* die Unterränder, im Falle *b* die Oberränder einander zugekehrt sind.

Figur 79.



Es ergiebt sich aber hieraus, dass wir drei verschiedene Coincidenzen bei den Bildern „I“ und II“ erzielen können, nämlich entweder eine Coincidenz „1“ Fig. 80, wobei zwar die beiden Mittelpunkte coincidiren, aber nicht die gleichartigen Ränder zusammenfallen; zweitens eine Coincidenz „2“ des Oberrandes von „I“ mit dem Oberrande von „II“; drittens eine Coincidenz „3“ der Unterränder. Von diesen Coincidenzen sind es ausschliesslich die der Ränder, welche man mit dem Sextanten zu erreichen bestrebt sein muss, denn sicherlich lässt sich der Moment, in welchem die R ä n d e r zur Berührung kommen, viel genauer angeben als der, wobei zwei gleiche Kreisscheiben gerade in völliger Coincidenz sich befinden sollen.

Fig. 80.



Noch kann man sich die Regeln merken, nach welchen die B e w e g u n g der beiden Sonnenbilder „I“ und „II“ im Gesichtsfeld vor

sich geht und sind diese Regeln in folgendem Schema enthalten, dessen Richtigkeit nachzuweisen dem Leser überlassen bleiben möge. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass man den Sextanten auf eine bestimmte Höhe der Sonne eingestellt habe und dass, wenn die Sonne sich dieser Höhe nähert: die beiden Bilder anfangen im Gesichtsfeld aufzutreten, anfangs noch ganz auseinander liegen, hernach die Eintritts- und schliesslich die Austrittsberührung zeigen.

Terrestrisches Fernrohr.		Astronomisches Fernrohr.	
Vormittags.	Nachmittags.	Vormittags.	Nachmittags.
Das Bild „I“ erscheint über „II“. Die Bilder nähern sich.	Das Bild „I“ erscheint unter „II“. Die Bilder nähern sich.	Das Bild „I“ erscheint unter „II“. Die Bilder nähern sich.	Das Bild „I“ erscheint über „II“. Die Bilder nähern sich.
1) Es berühren sich die Oberränder beim Eintritt. Die Bilder entfernen sich.	3) Es berühren sich die Unterränder beim Eintritt. Die Bilder entfernen sich.	1) Es berühren sich die Oberränder beim Eintritt. Die Bilder entfernen sich.	3) Es berühren sich die Unterränder beim Eintritt. Die Bilder entfernen sich.
2) Es berühren sich die Unterränder beim Austritt.	4) Es berühren sich die Oberränder beim Austritt.	2) Es berühren sich die Unterränder beim Austritt.	4) Es berühren sich die Oberränder beim Austritt.

Während 1) bis 4) die Reihenfolge der Erscheinungen Vor- und Nachmittags andeuten, bezeichnen 1) und 4) sowie 2) und 3) die correspondirenden Erscheinungen und wird die Beobachtung, welche die Richtigkeit des obigen Schemas etwa darthun soll, wesentlich erleichtert, wenn die Blendgläser, die am Sextanten angebracht sind, sich so combiniren lassen, dass das Bild „I“ eine vom Bilde „II“ verschiedene Färbung erhält.

Alles dies vorausgeschickt kommt es nun weiter darauf an, wie man überhaupt den Beobachtungssatz einzurichten gedenkt und können hierbei verschiedene Arten der Einstellung in Betracht kommen. Einmal nämlich lässt sich schon mit einer einzigen Einstellung des Sextanten ein oft genügendes Beobachtungsmaterial erlangen und hat man hierbei nach folgendem Schema zu operiren, wobei wir annehmen, dass nur ein astronomisches Fernrohr zur Anwendung kommt.

A. Beobachtung Vormittags.

Einstellen des Sextanten auf eine bestimmte Höhe.

1) Beobachtung der Coincidenz der Oberränder; Notirung der Zeit T_1.

2) Beobachtung der Coincidenz der Unterränder; Notirung der Zeit t_1.

B. Beobachtung Nachmittags.

Sextanten unverändert stehen lassen.

3) Beobachtung der Coincidenz der Unterränder; Notirung der Zeit t_2.
4) Beobachtung der Coincidenz der Oberränder; Notirung der Zeit T_2.

Dieser Beobachtungssatz lässt sich nun aber auch wiederholen, indem man den Sextanten auf eine zweite, dritte etc. Höhe einstellt und ist hierbei Folgendes zu beachten. Da der scheinbare Durchmesser der Sonnenscheibe rund gerechnet 32′ beträgt, so wird man, nachdem der Austritt der Bilder „I“ und „II“ stattgefunden hat, sie mindestens wieder um 2mal die scheinbare Sonnenbreite auseinander bringen müssen, wenn der Vorgang sich dem mitgetheilten Schema entsprechend wiederholen soll. Da nun ferner bei der Winkelmessung mittelst des Sextanten der Winkel, um welchen der bewegliche Spiegel gegen den ruhenden verstellt ist, verdoppelt werden muss: um den Winkel zu finden, unter welchem die im Gesichtsfeld in Coincidenz erblickten Gegenstände in Wirklichkeit dem Auge von einander abzustehen scheinen, so pflegt man, um diese Verdoppelung des abgelesenen Winkels nicht vornehmen zu müssen, an die auf dem Limbus angegebene Winkeleintheilung gleich die doppelt so grossen Zahlen zu schreiben. Liest man also z. B. auf dem Sextanten einen Winkel = 56° ab, so ist der Winkel, um welchen die Spiegel wirklich verstellt sind, zwar nicht gleich 56°, sondern gleich 28°, aber die doppelt so grosse Angabe gleich 56° bezeichnet doch den Winkel, den man eigentlich messen will. Ist ferner auf dem Limbus jeder Grad z. B. in drei Theile getheilt, so gelten diese nominell für 20′, entsprechen aber blos einer Spiegeldrehung von 10′. Verstellt man ferner den Sextanten z. B. um 1° der Theilung (also nominell), so gehen zwei Bilder, die im Gesichtsfeld erblickt werden, auch um 1° auseinander, während die Spiegel in Wirklichkeit blos um $\frac{1}{2}$° verstellt wurden; verstellt man ebenso den Sextanten nominell um 2°, so gehen die Bilder auch um 2° auseinander und gerade eine solche Verstellung ist es, die man zweckmässig vornehmen kann, um die soeben besprochene Beobachtung der ☉ zum zweiten- oder drittenmale zu wiederholen. Denn um 2 . 32′ oder 1° 4′ müssen die Bilder mindestens auseinander: da man aber zur neuen Einstellung einige Zeit nöthig hat und während dieser Zeit die Bilder „I“ und „II“ sich gegen einander hinbewegen, so muss eine grössere Winkelverstellung vorgenommen werden, um sicher zu sein, dass man beim Hereinsehen ins Fernrohr die in Annäherung begriffenen Bilder „I“ und „II“ noch weit genug auseinander findet und in aller Ruhe die zweite Berührung der Oberränder wie sub A, 1 wiederum beobachten kann, wonach dann auch die Beobachtung der Coin-

cidenz der Unterränder bei derselben Stellung des Sextanten ohne weiteres gelingt.

Diese Beobachtungsweise bietet den Vortheil, dass man nur zwei oder drei Einstellungen des Sextanten vorzunehmen braucht, hat aber auch den Nachtheil, dass wenn man z. B. nur zwei Einstellungen vornimmt, nur vier correspondirende Beobachtungen schliesslich erhalten werden. Um diese Zahl zu vermehren und so einen genaueren Mittelwerth der Zeit ableiten zu können, kann die Beobachtung der Coincidenz blos der Oberränder oder blos der Unterränder, in kürzeren Intervallen in folgender Weise wiederholt werden. wobei wir der Kürze halber für die Einstellung des Sextanten ein S und für die Bezeichnung der Coincidenz der Oberränder ein O gesetzt haben.

A. Beobachtung Vormittags.

$S_1 = h$; Beobachtung von O zur Zeit T_1'.
$S_2 = h + dh$; Beobachtung von O zur Zeit T_1''.
$S_3 = h + 2 . dh$; Beobachtung von O zur Zeit T_1'''.

. . . .

. . . .

B. Beobachtung Nachmittags.

. . . .

. . . .

$S_3 = h + 2 . dh$; Beobachtung von O zur Zeit T_2'''.
$S_2 = h + dh$; Beobachtung von O zur Zeit T_2''.
$S_1 = h$; Beobachtung von O zur Zeit T_2'.

Was die Grösse dh und den Zusammenhang der Zeitgrössen T untereinander anlangt, so wird später, wenn wir ein Beispiel der correspondirenden Sonnenhöhenbeobachtung mittheilen, sich noch Näheres ergeben.

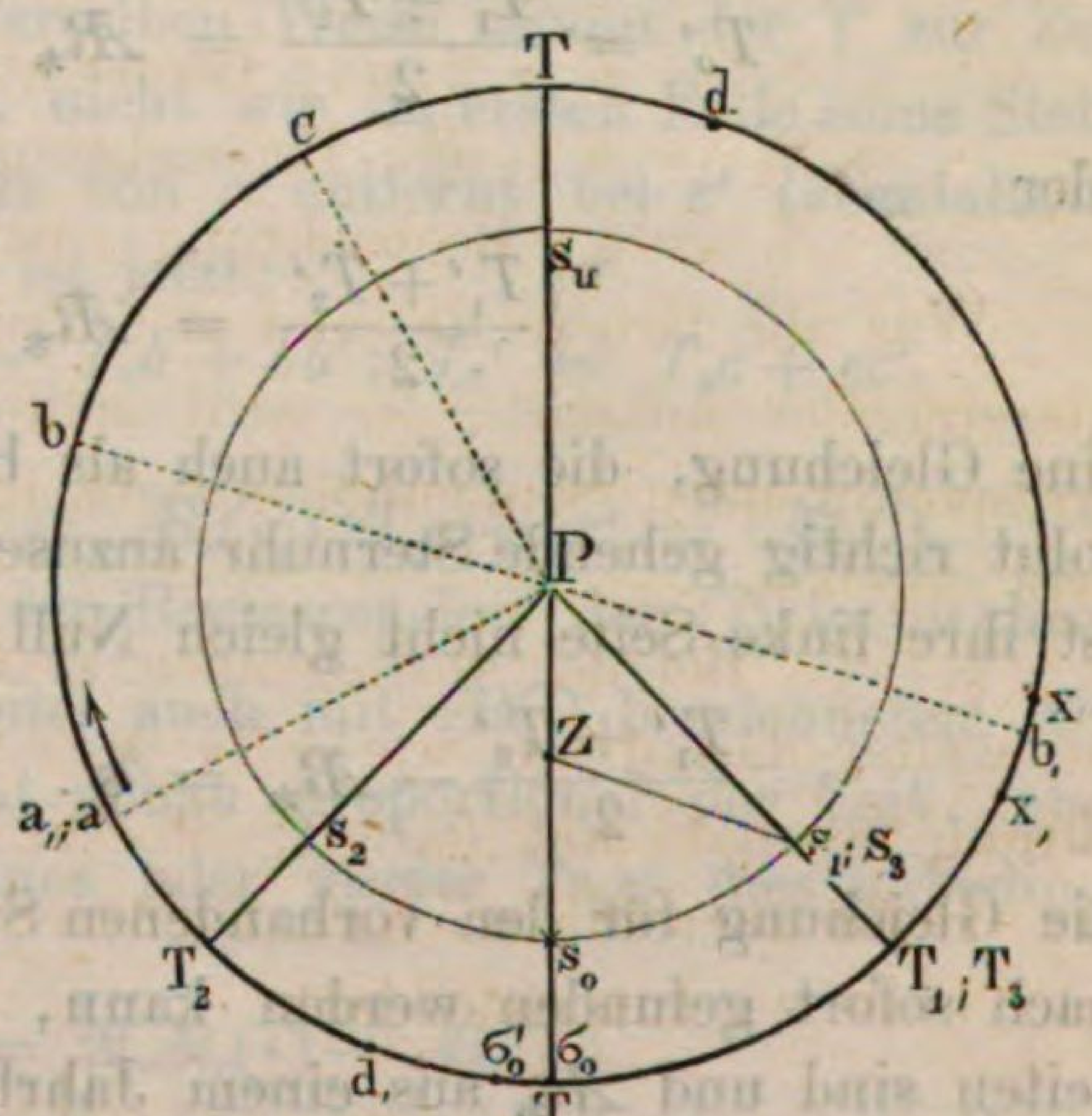
§. 79. Bei der vorliegenden Zeitbestimmungsmethode kommt es nun weiter darauf an: welche Art von Uhren man bei der Beobachtung benutzt und darauf: ob der beobachtete Himmelskörper ein Fixstern oder die wahre Sonne ist, und sind hiernach folgende sechs Fälle zu unterscheiden.

	Uhr.	Himmelskörper.
1)	Sternuhr.	Fixstern.
2)	„	Wahre Sonne.
3)	Mittlere-Zeituhr.	Fixstern.
4)	„ „	Wahre Sonne.
5)	Wahre-Sonnenzeit-Uhr.	Fixstern.
6)	„ „ „	Wahre Sonne.

Unter diesen sechs Fällen hat nur der erste und der letzte die Eigenthümlichkeit, dass der scheinbare Lauf des beobachteten Himmelskörpers mit dem Laufe der Uhr conform ist, während in allen übrigen Fällen dies nicht zutrifft, indem z. B. der Zeiger auf dem Zifferblatte einer Sternuhr seinen Umlauf rascher vollendet, als die wahre Sonne scheinbar um die Erde sich bewegt. Zur weiteren Vereinfachung bezeichnen wir die Anzeigen der drei verschiedenen Uhren der Reihe nach mit T', T'' und T''' und fügen, je nachdem die Beobachtung (A) vor der oberen Culmination oder (B) nach derselben (vor der unteren) oder (C) nach der unteren Culmination (am andern Vormittag) stattfand, unten an den genannten Buchstaben ein 1, 2 oder 3 hinzu, so dass z. B. T_2'' die Uhrangabe einer mittleren Sonnenzeit-Uhr bei der Beobachtung (B) vor der unteren Culmination (Nachmittags) bedeutet. Bei der folgenden Erläuterung halten wir uns ferner an die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper und überlassen es dem Leser, darüber nachzudenken: wie die wahren Bewegungen sich vollziehen müssen, wenn sie identische Erscheinungen hervorbringen sollen. Ferner sehen wir, wenn von der Sonne die Rede ist, von einer Declinationsänderung derselben innerhalb der Zeit der Beobachtung, also innerhalb zweier Tage vorläufig völlig ab.

Dies vorausgeschickt stellt der äussere Kreis in Fig. 81 den Aequator, der innere kleinere den vom Gestirn scheinbar beschriebenen Parallelkreis, P den Pol, Z das Zenith und T_0ZPT_u den Meridian des Beobachters vor, welcher Meridian unserer eben bezeichneten Annahme zu Folge in seiner Lage als unveränderlich zu betrachten ist, während das Gestirn sich in der Richtung des an den Aequator gezeichneten Pfeils fortbewegt. Steht demnach das Gestirn vor der oberen Culmination in s_1, so erhält man die correspondirende Stellung s_2, wenn man mit der Zenithdistanz $Zs_1 = (90^0 - h)$ um Z einen Kreis beschreibt (in der Figur nicht weiter angegeben), der auf dem inneren Kreise in s_2 derart einschneidet, dass Bogen $s_1s_0 = s_2s_0$ wird.

Fig. 81.



Nehmen wir nun für den ersten Fall und die Beobachtung (A)

an: der Frühlingspunkt stände zur Zeit T_1 in a, so ist der Bogen $T_0 a$ (hier und im folgenden immer in Zeit verwandelt gedacht) die der Uhrangabe T_1' entsprechende Sternzeit, und wenn wir zunächst eine richtige Uhr voraussetzen, so ist diese Uhrangabe T_1' selbst auch identisch mit der Sternzeit, d. h. es ist Bogen $T_0 a = T_1'$, und eben weil in diesem Momente, wo der Stern in s_1 steht, die Zeit T_1' angenommen wird, ist an den Meridian Ps_1 bzw. seinen Durchschnitt mit dem Aequator ein T_1 geschrieben, hierbei aber um die Figur auch für die weiteren Fälle brauchbar zu machen, der Index oben weggelassen worden. Man achte also wohl darauf, dass nicht etwa der Bogen $T_0 T_1$, sondern $T_0 a = T_1'$ ist. Schreitet nun der Stern weiter, so befindet er sich bei der oberen Culmination in s_0, bei der correspondirenden Stellung in s_2 und entspricht diesen Stellungen eine Stellung des ♈ im Punkte b und c der Art, dass Bogen $bc = ba$ ist, d. h. es gehören zu diesen beiden Zeitmomenten: der oberen Culmination und der correspondirenden Stellung, die Sternzeiten $T_0 b = T_0'$ und $T_0 c = T_2'$ und ist demgemäss

$$T_0' = \frac{T_1' + T_2'}{2}$$

Da ferner $\sphericalangle T_0 Pb$ = der Rectascension des Sterns ist, die wir mit $\mathcal{R}_*$ bezeichnen wollen, so besteht die weitere Gleichung

$$T_0' = \frac{T_1' + T_2'}{2} = \mathcal{R}_* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

oder

$$\frac{T_1' + T_2'}{2} - \mathcal{R}_* = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

eine Gleichung, die sofort auch als Bedingungsgleichung für eine absolut richtig gehende Sternuhr anzusehen ist. Denn besteht sie nicht: ist ihre linke Seite nicht gleich Null sondern gleich s, so stellt

$$\frac{T_1' + T_2'}{2} - \mathcal{R}_* = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

die Gleichung für den vorhandenen Standfehler der Uhr vor, der demnach sofort gefunden werden kann, weil T_1' und T_2' gegebene Uhrzeiten sind und $\mathcal{R}_*$ aus einem Jahrbuche zu entnehmen ist.

Beobachten wir den Stern zuerst vor der unteren Culmination und nehmen, um die Figur möglichst einfach zu lassen, an: er stände zur Zeit T_2' in s_2, bei der unteren Culmination in s_u, bei der correspondirenden Stellung nach der unteren Culmination in s_3 (mit s_1 zusammenfallend), so entspricht diesen drei Stellungen eine Stellung des ♈ in c, in b, (dem b diametral entgegen) und a, (mit a zusammenfallend) und ist ferner

$$T_2' = T_0 Pc \text{ (stumpf)}$$
$$T_u' = T_0 Pb, \text{ (überstumpf)} = 12^h + AR_*$$
$$T_3' = 24^h + T_0 Pa, \text{ (spitz)}$$

so dass

$$T_u' = \frac{T_2' + T_3'}{2} = 12^h + AR_* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und hiernach

$$\frac{T_2' + T_3'}{2} - 12^h - AR_* = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wiederum die Gleichung für einen vorhandenen Standfehler der Uhr ist, den zwei Beobachtungen (B) und (C) zu ermitteln gestatten. Für den Fall, dass $T_2' < T_1'$ oder $T_3' < T_2'$ ausfällt, ist für T_2' ein $T_2' + 24^h$ und für T_3' ein $T_3' + 24^h$ zu setzen.

Hiermit ist die Aufgabe: mittelst einer Sternuhr und der Beobachtung correspondirender Fixsternhöhen den Fehler dieser Sternuhr zu finden, vollständig gelöst.

Für die Betrachtung des zweiten Falls denken wir anstatt eines Fixsterns in s_1, s_0 und s_2 die wahre Sonne. Steht nun zur Zeit T_1' der Frühlingspunkt in a, so befindet er sich, wenn die Sonne culminirt, nicht in b, sondern ist, da er etwas schneller lauft wie die Sonne, ein wenig weiter bis zu einem Punkte b' (in der Figur nicht weiter angegeben) gelangt; in derselben Weise nimmt der ♈ zur Zeit wo die ☉ in s_2 beobachtet wird, nicht wie im ersten Falle seine Stelle bei c, sondern eine kleine Strecke von c entfernt bei c' (ebenfalls in der Figur weggelassen) ein und ist jetzt:

$$T_1' = \text{Bogen } T_0 a; \; T_0' = T_0 b + bb'; \; T_2' = T_0 c + cc'.$$

Ferner ist Bogen:

$$T_1 a = AR_1 ☉; \; T_0 b + bb' = AR_0 ☉; \; T_2 c + cc' = AR_2 ☉,$$

wobei AR_0☉ identisch ist mit der Rectascension der ☉ im wahren Mittage, die wir im dritten Kapitel auch mit $\dot{AR}$☉ bezeichneten. Die AR☉ ändert sich nun zwar nicht genau proportional der Zeit, aber doch so, dass wir innerhalb eines oder zweier Tage dies unbedingt annehmen dürfen, d. h. es ist

$$AR_2 ☉ - AR_1 ☉ = 2(AR_0 ☉ - AR_1 ☉).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber identisch mit Bogen cc' und die Differenz in der Klammer rechts identisch mit dem kleinen Bogen bb', d. h. es ist $cc' = 2.bb'$ und folgt hieraus, dass wenn wir das Mittel aus dem Bogen $T_0 c + cc'$ und $T_0 a$ nehmen, wir ebenfalls den Bogen $T_0 b + bb' = T_0'$ erhalten, mithin dass auch jetzt

$$T_o' = \frac{T_1' + T_2'}{2} = \mathcal{AR}_c\odot = \dot{\mathcal{AR}}\odot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

das Mittel aus den beobachteten Sternzeiten T_1' und T_2' ist, welche beiden Grössen der Art nach mit denen in (11) identisch sind und numerisch verglichen auch eine Gleichheit der beiden T_1' ergeben, während T_2' in (16) um cc' grösser als T_2' in (11) und demgemäss T_o' in (16) um $\frac{1}{2}.cc' = bb'$ grösser wie T_o' in (11) ist. Hiernach besteht auch die weitere Gleichung

$$\frac{T_1' + T_2'}{2} - \dot{\mathcal{AR}}\odot = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und da T_1' und T_2' gegebene Uhrzeiten sind und $\dot{\mathcal{AR}}\odot$ eine vom Jahrbuch gegebene Grösse ist, so kann s ohne weiteres gefunden werden.

Wäre zuerst mit der Beobachtung (B) begonnen worden und nähmen wir die Sonne zur Zeit T_2' in s_2 zur Zeit T_3' in s_3 an, ferner den Frühlingspunkt zur Zeit T_2' in c, so steht er zur Zeit T_u' nicht wie im ersten Falle im Punkte b, , sondern etwas über b, hinaus etwa in einem Punkte x und zur Zeit T_3' nicht wie im ersten Falle in a', sondern etwas über a hinaus in einem Punkte $a_,'$ (nicht weiter angegeben) und ist Bogen $aa_,'$ die Rectascensionsänderung der $\odot$ innerhalb der Zeit $T_3' - T_2'$, daraus folgt aber, dass $b_,x_, = \frac{1}{2}.aa_,'$ ist und dass Bogen $T_u x_1 = \mathcal{AR}_u\odot = \underset{\cdot}{\mathcal{AR}}\odot$ nach unserer früheren Bezeichnung ist. Da ferner $T_u' = 12^h + \underset{\cdot}{\mathcal{AR}}\odot$ ist, so bestehen der Reihe nach die Gleichungen:

$$T_u' = \frac{T_2' + T_3'}{2} = 12^h + \underset{\cdot}{\mathcal{AR}}\odot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und

$$\frac{T_2' + T_3'}{2} - 12^h - \underset{\cdot}{\mathcal{AR}}\odot = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Hiermit wäre die Aufgabe: den Fehler einer Sternuhr nach dem Laufe der wahren Sonne mit Hilfe von Beobachtung correspondirender Sonnenhöhen und unter Benutzung der betreffenden Sternuhr als Zeitmesser zu bestimmen, gelöst, aber es ist hierbei nicht auf die Declinationsänderung der $\odot$ Rücksicht genommen und werden wir auf diese Aufgabe desshalb noch einmal zurückkommen müssen.

Bei dem dritten Falle denken wir in s_1, s_o und s_2 wiederum einen Fixstern, und zur Zeit T_o'' die mittlere Sonne in einem beliebigen Punkte, z. B. in b den Frühlingspunkt ebenfalls in einem beliebigen Punkte z. B. in d. Dies vorausgesetzt ist für den Moment, wo der Fixstern culminirt, Bogen $T_o b = T_o''$; $T_o d = \mathcal{AR}_*$; $bd =$ der Rectascension der mittleren Sonne im Momente der oberen Culmination der Sterns, wofür wir $\overset{*}{\mathcal{AR}}\bigcirc$ setzen wollen und bestehen die Gleichungen:

$$T_o'' = \frac{T_1'' + T_2''}{2} = AR_* - \overset{*}{AR}\bigcirc \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

und für den Fall, dass die Uhr einen Standfehler besitzt:

$$\frac{T_1'' + T_2''}{2} - AR_* + \overset{*}{AR}\bigcirc = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Für die Bestimmung des Uhrfehlers im Momente der unteren Culmination, wo der Stern in s_u der ♈ genau diametral d entgegengesetzt in d, steht, die ◯ aber noch nicht ganz den Punkt b, sondern erst einen Punkt x erreicht hat, ist:

$$T_u'' = \frac{T_2'' + T_3''}{2} = 12^h + AR_* - \underset{*}{AR}\bigcirc \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

und

$$\frac{T_2'' + T_3''}{2} - 12^h - AR_* + \underset{*}{AR}\bigcirc = s \quad . \; . \; . \quad (23)$$

In diesen Gleichungen (21) und (23) ist die Sternrectascension AR_* eine von einem Jahrbuch gegebene Grösse und kann für die Dauer der Beobachtung als unveränderlich angesehen werden. Die Grössen $\overset{*}{AR}\bigcirc$ und $\underset{*}{AR}\bigcirc$ aber müssen erst berechnet werden, was leicht ist. Denn da uns die Rectascension der mittleren Sonne im mittleren Mittage oder $\overset{+}{AR}\bigcirc$ gegeben ist, bzw. für einen Ort, für welchen ein Jahrbuch nicht direct vorliegt, berechnet werden kann, so erhalten wir, falls wir $\overset{+}{AR}\bigcirc$ von AR_* abziehen, das zwischen dem mittleren Mittage und dem Momente der Sternculmination liegende Sternzeitintervall. Da nun auf $(24^h + 3^m\ 56^s,56)$ Sternzeit ein $\Delta AR\bigcirc = 3^m 56^s,56$ kommt, so ist

$$\text{Corr. } AR\bigcirc = 3^m\ 56^s,56\ \frac{AR_* - \overset{+}{AR}\bigcirc}{24^h + 3^m\ 56^s,56}$$

welche Gleichung identisch ist mit der letzten Gleichung S. 121, was beweist, dass wir für die Auffindung von Corr. $AR\bigcirc$ einfach die Taf. II. (A) mit dem Argument $(AR_* - \overset{*}{AR}\bigcirc)$ benutzen können.

B e i s p i e l. Das „Lehrbuch der Navigation" *) von A l b r e c h t und V i e r o w theilt eine Beobachtung mit, wonach am 15. und 16. Januar 1853 in M e m e l ($1^h\ 24^m\ 35^s$ ö. L. von Greenwich) nach einer mittleren Zeituhr der Stern β Geminorum (P o l l u x) in seiner oberen Culmination beobachtet wurde und zwar in fünf aufeinander folgenden und um 10′ von einander verschiedenen Höhen zu den Zeiten:

---

*) Berlin, Verlag der Königl. Geh. Ober-Hofbuchdruckerei (R. v. Decker). 4. Aufl. S. 441.

Abends d. 15. Jan.	Morgens d. 16. Jan.
$7^h\ 22^m\ 56^s$	$4^h\ 39^m\ 14^s$
24 7	38 4
25 18	36 53
26 28	35 41
27 39	34 31
$T_1'' = 7^h\ 25^m\ 17^s{,}6$	$T_2'' = 4^h\ 36^m\ 52^s{,}6$

$$T_0'' = 12^h\ 1^m\ 5^s{,}1.$$

Berechnung. Gegeben N. A. 15. Jan. 1853

$$\overset{+}{AR}\bigcirc = 19^h\ 39^m\ 23^s{,}39$$

Corr. $AR\bigcirc$ wegen d. Längendiff. gemäss d. Bemerkung S. 145 $\left\{\begin{array}{ll} \text{für } 1^h = & 9{,}86 \\ \text{,, } 24^m = & 3{,}94 \\ \text{,, } 35^s = & 0{,}10 \end{array}\right\} = 13^s{,}90$

Für Memel 15. Jan. 1853 $\overset{+}{AR}\bigcirc = 19^h\ 39^m\ 9^s{,}49$

" " " $AR_* = 7\ 36\ 19{,}31$

$$AR_* - \overset{+}{AR}\bigcirc = 11^h\ 57^m\ 9^s{,}82$$

Corr. $\overset{+}{AR}\bigcirc$ um $\overset{+}{AR}\bigcirc$ in $AR\bigcirc$ zu verwandeln unter Benutzung von Taf. II.(A) $\left\{\begin{array}{ll} \text{für } 11^h = & 1\ 48{,}12 \\ \text{,, } 57^m = & 9{,}33 \\ \text{,, } 9^s = & 0{,}03 \\ \text{,, } 0{,}82 = & 0{,}00 \end{array}\right\} = 1^m\ 57^s{,}48$

mithin n. Gl. (21) $AR_* - \overset{+}{AR}\bigcirc = 11^h\ 55^m\ 12^s{,}34$

$$T_0'' = 12\ \ 1\ \ 5{,}10$$

$$s = +\,0^h\ 5^m\ 52^s{,}76$$

Die Uhr zeigte also im Momente der oberen Culmination des Sterns $5^m\ 52^s{,}76$ zu viel. Da bei den Fixsternen die Aenderung ihrer Declination innerhalb der Beobachtungszeit gleich Null angesehen werden darf, so ist zu diesem dritten Falle nichts mehr zu bemerken und ist hiermit die Aufgabe: mittelst einer mittleren Sonnenzeit-Uhr und der Beobachtung correspondirender Fixsternhöhen den Fehler dieser Uhr zu bestimmen, vollständig gelöst.

Im vierten Falle soll die wahre Sonne beobachtet, aber der Fehler einer bei der Beobachtung benutzten mittleren Sonnenzeit-Uhr bestimmt werden, also der Standfehler s dieser Uhr: im Momente des wahren Mittags oder der wahren Mitternacht. Denken wir demnach in ersterem Momente, wo die $\odot$ in s_0 steht, die $\bigcirc$ ein wenig voraus im Punkte σ_0', so ist

Bogen $\sigma_0\sigma_0' = (ZG)_0 = \dot{Z}G$ (nach einer früheren Bezeichnung); dem entsprechend wird die $\bigcirc$ im Momente, wo die $\odot$ in s_1 erscheint, nicht in T_1 sondern ein wenig über T_1 hinaus und im Mo-

mente, wo die ⊙ in s_2 steht, nicht in T_2 sondern ein wenig über T_2 hinaus stehen. Setzen wir in Gedanken an diese beiden Oerter der ○ ein σ_1' und σ_2', so ist

$$\text{Bogen } T_1\sigma_1' = (ZG)_1 \text{ (Im Moment } T_1'')$$
$$\text{„ } T_2\sigma_2' = (ZG)_2 \text{ („ „ } T_3'')$$

und demgemäss

$$T_1'' = \text{Bogen } T_0T_1 \text{ (überstumpf)} + (ZG)_1$$
$$= 24^h - \text{Bogen } T_0T_1 \text{ (spitz)} + (ZG)_1$$

sowie

$$T_2' = 24^h + \text{Bogen } T_0T_2 \text{ (spitz)} + (ZG)_2$$
$$= 24^h + \text{Bogen } T_0T_1 \text{ (spitz)} + (ZG)_2$$

mithin

$$T_o'' = \frac{T_1'' + T_2''}{2} = 24^h + \frac{(ZG)_1 + (ZG)_2}{2} = \frac{(ZG)_1 + (ZG)_2}{2}.$$

Obwohl nun die Zeitgleichung sich nicht ganz genau proportional der Zeit ändert aus dem einfachen Grunde, weil dies auch für die *Æ*⊙ nicht ganz genau der Fall ist, so kann dies innerhalb der Beobachtungszeit unbedingt angenommen werden und folgt hieraus, dass wir berechtigt sind

$$(ZG)_o = \frac{(ZG)_1 + (ZG)_2}{2}$$

anzunehmen, wonach

$$T_o'' = (ZG)_0 = \dot{ZG}$$

und somit

$$\frac{T_1'' + T_2''}{2} - \dot{ZG} = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

die gesuchte Gleichung für den Uhrfehler ist.

Für die untere Culmination der ⊙, also die Mitternachtsbestimmung, ergiebt sich nach einer analogen Betrachtung

$$\frac{T_2'' + T_3''}{2} - 12^h - \dot{ZG} = s \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Da in Wirklichkeit aber die Decl. ⊙ während der Beobachtungszeit sich merklich ändern kann, so müssen wir diesen vierten Fall später noch einer weiteren Betrachtung unterwerfen.

Der f ü n f t e Fall hat für die Praxis wohl schwerlich Bedeutung, da man mittelst einer Sonnenuhr, auf welcher die ⊙ ihre Schattenanzeigen macht, also bei Tage zugleich den Lauf eines Fixsterns beobachten müsste. Dennoch wollen wir den Fall betrachten und begreift man sofort, dass die Gleichungen, welche für s hier gelten, mit denen für den dritten Fall übereinstimmen, wenn wir nur anstatt T'' ein T''', für ○ ein ⊙ gesetzt denken, demgemäss für die obere Culmination die Gleichung:

$$\frac{T_1''' + T_2'''}{2} - AR_* + \overset{*}{AR}\odot = s \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

und für die untere die Gleichung:

$$\frac{T_2''' + T_3'''}{2} - 12^h - AR_* + \underset{*}{AR}\odot = s \quad . \; . \quad (27)$$

gilt, und wobei $\overset{*}{AR}\odot$ und $\underset{*}{AR}\odot$ ähnlich berechnet werden kann wie bei den Gleichungen (21) und (23).

Für den sechsten Fall sind die Bemerkungen, welche sich an die Fig. 6. S. 26 anknüpften, von directer Bedeutung. Denn wenn wir eine vorhandene Sonnenuhr darauf prüfen wollen, ob der Mittagsstrich richtig liegt, so können wir ganz im Sinne der Fig. 6 verfahren, indem wir um den Fusspunkt eines verticalen schattenwerfenden Stiftes, der sich in geeigneter Weise auf dem Zifferblatte errichten lässt, ein System von Kreisen ziehen hierauf die Punkte a, b,; $a_{,}$, $b_{,}$ etc. markiren und zusehen, ob die auf diese Weise gefundene Mittagslinie mit der auf dem Zifferblatte bereits vorhandenen der Lage nach übereinstimmt.

Da der Lauf des zu beobachtenden Himmelskörpers conform ist mit dem Laufe des Schattens auf dem Zifferblatte der Sonnenuhr, so gelten hier eben solche Formeln wie beim fünften Falle, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt in Gleichung (26) und in (27) bzw. $AR_* = \overset{*}{AR}\odot = \dot{AR}\odot$ und $AR_* = \underset{*}{AR}\odot = \underset{\cdot}{AR}\odot$ zu setzen ist, demgemäss dann für die Mittags- und Mitternachtsbeobachtung die Gleichung

$$\frac{T_1''' + T_2'''}{2} = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

und

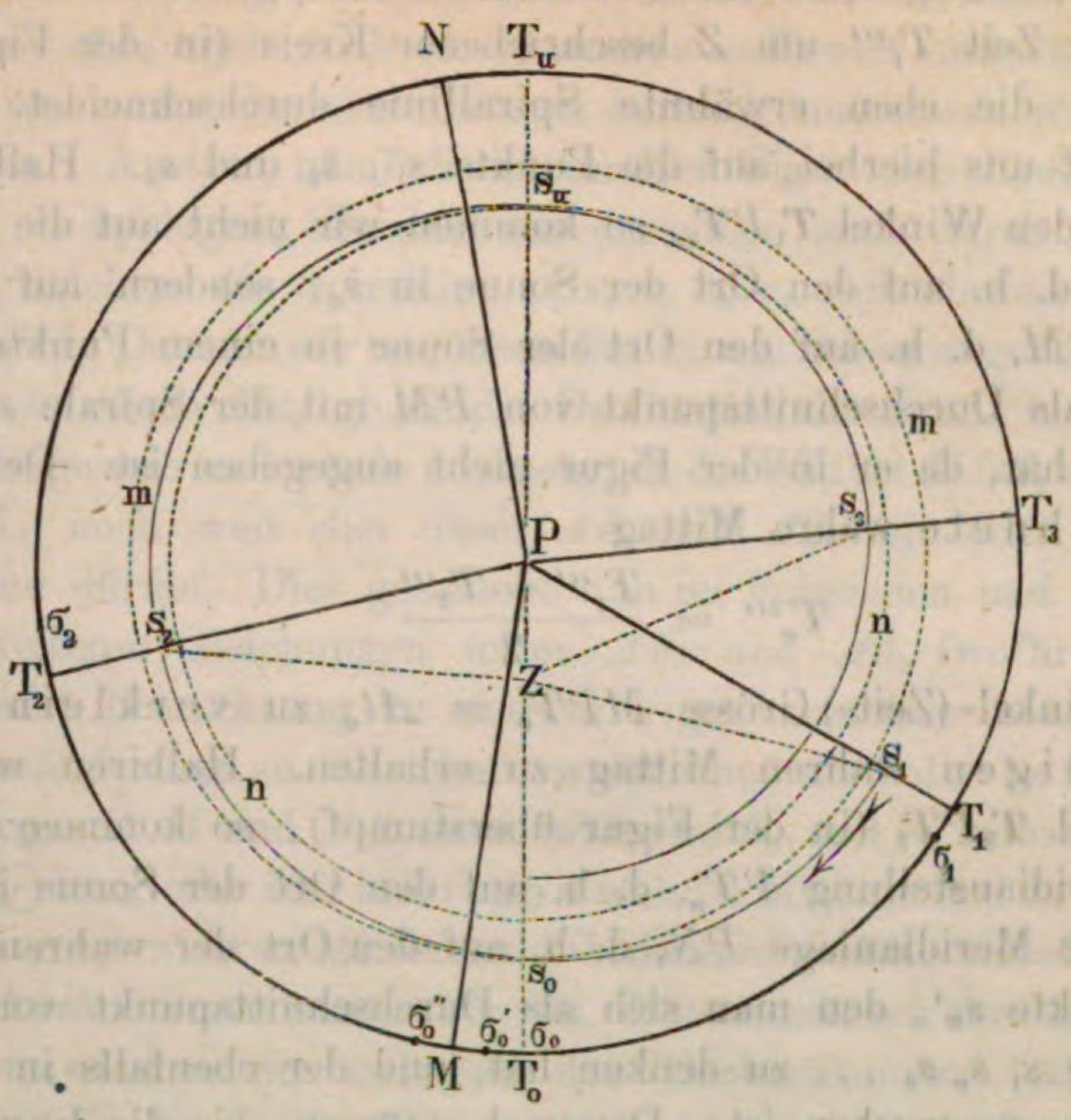
$$\frac{T_2''' + T_3'''}{2} - 12^h = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

gilt und woraus sich erkennen lässt, dass dieser Fall überhaupt der einfachste ist, der bei der Beobachtung von correspondirenden Höhen vorkommen kann.

Weil jedoch, wie schon wiederholt bemerkt, eine Unveränderlichkeit der Decl. $\odot$ nicht angenommen werden darf, so wollen wir nunmehr zunächst für diesen einfachsten Fall unsere Theorie mit Rücksicht auf eine Declinationsänderung der Sonne vervollständigen.

§. 80. Zum Zwecke dieser Vervollständigung knüpfen wir unsere Betrachtungen an die Figur 82 an, die wie die Fig. 81 unter der Voraussetzung entworfen ist: dass wir die Scheinbewegung der Sonne festhalten, ferner die Decl. $\odot$ als im Zunehmen begriffen ansehen und drittens annehmen, es wäre zunächst die Beob-

Fig. 82.



achtung nach einer wahren Sonnenuhr gemacht worden. Unter dieser Voraussetzung stellt die Figur eine Polarprojection auf die Ebene des Aequators vor, der äussere stärker ausgezogene Kreis nämlich den Aequator selbst, P den Pol, Z das Zenith und T_0ZPT_u den Meridian des Beobachters. Hätte nun die ⊙ am betreffenden Beobachtungstage und am folgenden Tage ihre Declination wie zur Zeit des wahren Mittags beibehalten, und stellte $T_0 s_0 = \delta_0$ (identisch mit der früheren Bezeichnung Decl. ⊙) diese Declination vor, so würde die ⊙ scheinbar den durch s_0 laufenden Kreis mm parallel zum Aequator beschreiben; da aber die Declination im Wachsen begriffen ist, so wird die Declination zur Zeit T_1''' Vormittags noch nicht gleich δ_0, sondern gleich $(\delta_0 - \varDelta\delta_0)$ sein, d. h. wenn PT_1 den zu dieser Zeit durch die ⊙ gelegten Meridian vorstellt, wird der scheinbare Ort der Sonne nicht im Durchschnitt des Parallelkreises mm mit PT_1 liegen, sondern sich in einem etwas näher zum Aequator hin gelegenen Punkte s_1 befinden. Bei der oberen Culmination trifft sie dann im Punkte s_0 ein um hiernach über den Kreis mm hinaus mehr und mehr dem Pole näher zu rücken, und so eine Spirallinie zu beschreiben, die in der Figur als die ausgezogene Curve $s_1\ s_0\ s_2\ s_u\ s_3 \ldots$ dargestellt ist. Denken wir daran, dass der Sextant Vormittags, Nachmittags und Vormittags am folgenden Tage auf dieselbe Höhe der ⊙ eingestellt ist, so werden weiter die drei Sonnenörter die den Beobachtungszeiten T'''_1, T'''_2, T'''_3

entsprechen, da liegen, wo ein mit dem Radius Zs_1 gleich der Zenithdistanz der ☉ zur Zeit T_1''' um Z beschriebener Kreis (in der Figur nicht angegeben) die eben erwähnte Spirallinie durchschneidet. Unsere Figur weist uns hierbei auf die Punkte s_1, s_2 und s_3. Halbiren wir aber jetzt den Winkel T_1PT_2, so kommen wir nicht auf die Meridianlage PT_0, d. h. auf den Ort der Sonne in s_0, sondern auf die Meridianlage PM, d. h. auf den Ort der Sonne in einem Punkte s_0', den man sich als Durchschnittspunkt von PM mit der Spirale $s_1\ s_0\ s_2 \ldots$ zu denken hat, da er in der Figur nicht angegeben ist. Demnach ist der berechnete wahre Mittag

$$T_0''' = \frac{T_1''' + T_2'''}{2}$$

um die Winkel-(Zeit-)Grösse $MPT_0 = \varDelta t_0$ zu verkleinern, um den richtigen wahren Mittag zu erhalten. Halbiren wir ebenso den Winkel T_2PT_3 (in der Figur überstumpf), so kommen wir nicht in die Meridianstellung PT_u, d. h. auf den Ort der Sonne in s_u sondern in die Meridianlage PN, d. h. auf den Ort der wahren Sonne in einem Punkte s_u', den man sich als Durchschnittspunkt von PN mit der Spirale $s_1\ s_0\ s_2 \ldots$ zu denken hat, und der ebenfalls in der Figur nicht weiter angegeben ist. Demnach müssen wir die berechnete Mitternacht

$$T_u''' = \frac{T_2''' + T_3'''}{2}$$

um die Winkel-(Zeit-)Grösse $NPT_u = \varDelta t_u$ vergrössern, um zur wahren Mitternacht zu gelangen. Um nun möglichst genau auch diese Grösse $\varDelta t_u$ zu bestimmen, haben wir noch mit dem Radius Ps_u um P einen Kreis gezogen, der von der ☉ beschrieben würde, falls sie immer dieselbe Declination δ_u (identisch mit der früheren Bezeichnung Decl. ☉) wie im Momente der wahren Mitternacht beibehielte und besitzt demnach die Sonne bei der

Beobachtung (A) zur Zeit T_1''' eine Declination gleich $\delta_0 - \varDelta\delta_0$

" (B) " " T_2''' " " " $\delta_0 + \varDelta\delta_0'$

oder

" (B) " " T_2''' " " " $\delta_u - \varDelta\delta_u$

und

" (C) " " T_3''' " " " $\delta_u + \varDelta\delta_u$

Die Grössen $\varDelta\delta_0$ und $\varDelta\delta_0'$ und ebenso $\varDelta\delta_u$ und $\varDelta\delta_u'$ sind einander nicht ganz gleich eben desshalb, weil der Winkel $T_0PT_2 > T_0PT_1$ und somit $\varDelta\delta_0' > \varDelta\delta_0$ und ferner weil der Winkel $T_uPT_2 > T_uPT_3$ und somit $\varDelta\delta_u > \varDelta\delta_u'$ ist; mit Rücksicht darauf aber, dass $\varDelta t_0$ und $\varDelta t_u$ nur kleine Winkelgrössen bzw. Zeitgrössen sind, sehen wir vorläufig von einer Verschiedenheit zwischen $\varDelta\delta_0$ und $\varDelta\delta_0'$ und ebenso

zwischen $\Delta\delta_u$ und $\Delta\delta_u'$ vollständig ab. Thun wir dies aber, so können wir $\Delta\delta_o$ und $\Delta\delta_u$ auch noch etwas anders auffassen und zwar so, wie es nöthig ist, wenn wir diese Grössen hernach numerisch wirklich angeben sollen. Anstatt nämlich in unserer Figur den Kreis m durch den Punkt s_o zu legen, könnten wir denselben auch durch den Punkt ziehen, in welchem die Spirallinie $s_1\ s_o\ s_2\ s_u\ s_3$ vom Meridian PM geschnitten wird. Denken wir an diesen Punkt wie schon angenommen, ein s_o' gesetzt, so würde Ms_o' gleich der Declination der Sonne im berechneten Mittage sein und würde nunmehr, da die Winkel MPT_1 und MPT_2 gleich sind, noch weit eher unser $\Delta\delta_o$ und $\Delta\delta_o'$ einander gleich gesetzt werden dürfen. Dies geschieht nun im Folgenden und haben wir bei den weiteren Gleichungen unter $\Delta\delta_o$ und $\Delta\delta_u$ (wofür wir eine ganz ähnliche Betrachtung an unserer Figur anstellen könnten), die Declinationsänderung zu verstehen, welche auf die halbe berechnete Beobachtungszeit M und N kommt, während δ_o und δ_u selbst die Declination der ⊙ in s_o oder im richtigen wahren Mittage und in s_u oder in der richtigen wahren Mitternacht bedeuten, wie sie aus einem Jahrbuche direct entnommen werden können. Bezeichnen wir nun die halben Zwischenzeiten, die zwischen den Beobachtungen (A) und (B) einerseits, sowie den Beobachtungen (B) und (C) andererseits liegen mit

M und N

so bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{T_2''' - T_1'''}{2} \\ N &= \frac{T_3''' - T_2'''}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Denken wir ferner diese Zeitgrössen M und N durch Multiplication mit 15 in Winkelgrössen verwandelt, so ist

$$\left.\begin{aligned} 15\,M - \Delta t_o &= \sphericalangle\, ZPs_1 \\ 15\,M + \Delta t_o &= \sphericalangle\, ZPs_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

ferner

$$\begin{aligned} 15\,N + \Delta t_u &= \sphericalangle\, T_uPs_2 \\ 15\,N - \Delta t_u &= \sphericalangle\, T_uPs_3 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 180^0 - (15\,N + \Delta t_u) &= \sphericalangle\, ZPs_2 \\ 180^0 - (15\,N - \Delta t_u) &= \sphericalangle\, ZPs_3. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin noch

$$(12^h - N) = N, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

d. h.

$$180^0 - 15\,N = 15\,N,$$

so bestehen die weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 15\,N, - \Delta t_u &= \sphericalangle\, ZPs_2 \\ 15\,N, + \Delta t_u &= \sphericalangle\, ZPs_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Dies vorausgeschickt erhalten wir aber nun für die Beobachtungen (A) und (B) mit Bezug auf die in Wirklichkeit sphärischen Dreiecke ZPs_1 und ZPs_2, sowie unter Berücksichtigung der Gleichungen (31) die weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \,.\, \sin(\delta_o - \Delta\delta_o) + \cos\varphi \,.\, \cos(\delta_o - \Delta\delta_o) \,. \\ &\qquad \cos(15\,M - \Delta t_o) \\ \sin h &= \sin\varphi \,.\, \sin(\delta_o + \Delta\delta_o) + \cos\varphi \,.\, \cos(\delta_o + \Delta\delta_o) \,. \\ &\qquad \cos(15\,M + \Delta t_o) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (34)$$

und in ähnlicher Weise für die Beobachtung (B) und (C) aus den Dreiecken ZPs_2 und ZPs_3 unter Berücksichtigung von Gl. (33) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \,.\, \sin(\delta_u - \Delta\delta_u) + \cos\varphi \,.\, \cos(\delta_u - \Delta\delta_u) \,. \\ &\qquad \cos(15\,N, - \Delta t_u) \\ \sin h &= \sin\varphi \,.\, \sin(\delta_u - \Delta\delta_u) + \cos\varphi \,.\, \cos(\delta_u - \Delta\delta_u) \,. \\ &\qquad \cos(15\,N, + \Delta t_u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (35)$$

Ziehen wir jetzt die unterste von der obersten Gleichung ab, so erhalten wir anstatt der je zwei Gleichungen (34) und (35) je eine neue Gleichung, deren linke Seite gleich Null ist; lösen wir dann in jeder dieser letzteren beiden Gleichungen rechts die Sinus und Cosinus auf, multipliciren die noch in Klammern stehenden Summanden mit einander, setzen für $\cos\Delta\delta$ und $\cos\Delta t$ die Einheit für $\sin\Delta\delta$, um $\sin\Delta t$ ein $\Delta\delta \,.\, \sin 1''$ und $\Delta t \,.\, \sin 1''$, vernachlässigen ausserdem die Summanden mit dem Factor $\Delta\delta \,.\, \Delta t \,.\, (\sin 1'')^2$ und dividiren schliesslich die Gleichungen rechts und links mit $2 \,.\, \sin 1''$, so ergeben sich die beiden neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta\delta_o \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\delta_o + \Delta\delta_o \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\delta_o \,.\, \cos 15\,M \\ &\qquad + \Delta t_o \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta_o \,.\, \sin 15\,M \\ 0 &= -\Delta\delta_u \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\delta_u + \Delta\delta_u \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\delta_u \,.\, \cos 15\,N, \\ &\qquad + \Delta t_u \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta_u \,.\, \sin 15\,N, \end{aligned}$$

d. h. bei der Reduction auf Δt_o und Δt_u

$$\Delta t_o = \Delta\delta_o \frac{\tang\varphi}{\sin 15\,M} - \Delta\delta_o \,.\, \tang\delta_o \,.\, \cotg 15\,M \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\Delta t_u = \Delta\delta_u \frac{\tang\varphi}{\sin 15\,N} - \Delta\delta_u \,.\, \tang\delta_u \,.\, \cotg 15\,N, \quad . \quad . \quad (37)$$

Nach dem Vorgange von Gauss bezeichnet man nun mit μ die 48stündige Declinationsänderung der Sonne und folgt hieraus, dass

$$\left.\begin{aligned} \Delta\delta_o &= \frac{\mu}{48} \,.\, M \\ \Delta\delta_u &= \frac{\mu}{48} \,.\, N \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

ist. Führen wir daher für $\Delta\delta_o$ und $\Delta\delta_u$ die zuletzt erhaltenen Aus-

drücke ein, dividiren rechts mit 15, um die Winkelgrössen Δt_o und Δt_u in Zeitgrössen umzusetzen, machen ausserdem die Voraussetzung, dass Δt_o und Δt_u als Correctionen aufzufassen sind und versehen desshalb die erstere Grösse Δt_o, da sie von der aus der Beobachtung erhaltenen Zeit T_o, um auf den richtigen Mittag zu kommen, abgezogen werden muss, mit einem Minus-Zeichen, und fügen endlich in der Gl. (37) rechts bei beiden Summanden im Zähler und Nenner den Factor $N_,$ hinzu, so verwandeln sich hiernach die Gleichungen (36) und (37) in

$$\Delta t_o = -\mu\left(\frac{M}{720 \, . \, sin\, 15\, M}\right) tang\, \varphi + \mu\left(\frac{M}{720} \, . \, cotg\, 15\, M\right) tang\, \delta_o$$

$$\Delta t_u = \mu\left(\frac{N}{N_,}\right)\left(\frac{N_,}{720 \, . \, sin\, 15\, N_,}\right) tang\, \varphi - \mu\left(\frac{N}{N_,}\right)\left(\frac{N_,}{720} \, . \, cotg\, 15\, N_,\right) tang\, \delta_u .$$

Setzt man ausserdem mit Gauss

$$\frac{M}{720 \, . \, sin\, 15\, M} = A$$

$$\frac{M}{720} \, . \, cotg\, 15 M = B$$

$$\frac{N}{N_,} = f$$

und lässt $\frac{N_,}{720 \, . \, sin\, 15\, N_,}$ einfach auch durch ein A bezeichnet sein, das dann natürlich, wenn M von $N_,$ verschieden ist, numerisch einen andern Werth repräsentirt, wie das für den Ausdruck $\frac{M}{720 \, . \, sin\, 15\, M}$ gesetzte A, so nimmt die Gleichung für Δt_o die Form

$$\Delta t_o = -\mu \, . \, A \, . \, tang\, \varphi + \mu \, . \, B \, . \, tang\, \delta_o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

an, und wird zu benutzen sein, wenn man die sogenannte

„Mittagsverbesserung"

berechnen soll, während

$$\Delta t_u = \mu \, . \, f \, . \, A \, . \, tang\, \varphi - \mu \, . \, f \, . \, B \, . \, tang\, \delta_u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

die Gleichung für die sogenannte

„Mitternachtsverbesserung"

abgiebt.

Hierbei muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass nicht, wie gewöhnlich bei der Mitternachtsverbesserung geschieht, die Declination δ_o der Sonne vom vorausgehenden Mittag, sondern die Declination der Mitternacht selbst, also δ_u, beibehalten worden ist, da hierdurch unter Umständen eine etwas grössere Genauigkeit erzielt wird und die Berechnung von δ_u ohne jede Mühe geschehen kann.

§. 81. Die Grössen μ, A, B und f können leicht berechnet werden und wollen wir eine solche Berechnung vornehmen unter der Voraus-

setzung, dass man am 21. Mai 1870 Vor- und Nachmittags und am 22. Mai Vormittags die drei correspondirenden Sonnenhöhen-Beobachtungen gemacht habe. Da nach dem Nautical Almanac die stündliche Declinationsänderung der Sonne am

21. Mai gleich $+ 30'',40$
22. „ „ $+ 29\ ,54$

ist, so ist am

21. Mai $\mu = 48 . 30'',40 = 1459'',2$; $\log \mu = 3,16412$
22. „ „ $= 48 . 29\ ,54 = 1417\ ,9$; „ „ $= 3,15165$.

Diese $\log \mu$ fanden sich früher im Berliner Jahrbuch auf der Seite I Col. 6 aufgeführt, während sie vom Jahre 1868 an weggelassen wurden. Für den Fall, dass die Declinationsänderung negativ ist, muss selbstverständlich auch $\log \mu$ und μ negativ genommen werden und ist hierauf bei der Berechnung von $\varDelta t_o$ und $\varDelta t_u$ nach Gl. (39) und (40) wohl zu achten. Denn diese Gleichungen wurden zunächst abgeleitet unter der Voraussetzung, es würde die Declination zunehmen, d. h. es sei $\varDelta \delta$ positiv.

Wäre nun am 21. Mai Vormittags und Nachmittags eine Beobachtung und zwar wie unsere Theorie zunächst verlangt, nach einer wahre Sonnenzeit angebenden Uhr gemacht worden, und hätte sich die halbe Zwischenzeit

$$M = 3^h\, 5^m\, 30^s = 3^h,0917$$

ergeben, so wäre der $\log A$ und $\log B$ zu berechnen wie folgt:

$$15\, M = 46^0\ 22'\ 30''$$

$$\begin{aligned} \log M &= 0,49024 \\ \log \frac{1}{720} &= 0,14267 - 3 \\ \hline &\ 0,63291 - 3 \\ \log \sin 15\, M &= 9,85966 \\ \hline \log A &= \mathbf{0,77325 - 3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \frac{M}{720} &= 0,63291 - 3 \\ \log \operatorname{cotg} 15\, M &= 9,97914 \\ \hline \log B &= \mathbf{0,61205 - 3.} \end{aligned}$$

Wäre ebenso am 22. Mai Vormittags eine dritte Beobachtung gelungen und hätte sich die halbe Zwischenzeit

$$N = 7^h\, 20^m\, 14^s = 7^h,337$$

mithin

$$N_, = 4^h\, 39^m\, 46^s = 4^h,663$$

ergeben, so gestaltete sich die Berechnung von $\log A$, $\log B$ und $\log f$ für die Mitternachtsverbesserung wie folgt:

$$15\, N = 69^0\ 56'\ 30''$$

$$\begin{aligned} \log N_, &= 0,66867 \\ \log \frac{1}{720} &= 0,14267 - 3 \\ \hline &\ 0,81134 - 3 \\ \log \sin 15\, N_, &= 9,97282 \\ \hline \log A &= \mathbf{0,83852 - 3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \frac{N_,}{720} &= 0,81134 - 3 \\ \log \operatorname{cotg} 15\, N_, &= 9,56244 \\ \hline \log B &= \mathbf{0,37378} \end{aligned}$$

und hiernach nun

$$\log N = 0{,}86552$$
$$\log \frac{1}{N_\prime} = 0{,}33133 - 1$$
$$\log f = \mathbf{0{,}19685}$$

Man erkennt aber sofort, dass die Form der Gl. (39) und (40) gestattet, Tafeln zu entwerfen, in denen man die $\log A$, $\log B$ und $\log f$ unmittelbar findet. Solche Tafeln wurden schon von v. Zach in der von ihm herausgegebenen Zeitschrift: „Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ Bd. XXIII. S. 45 im Jahre 1811 mitgetheilt und fand sich Gauss hierauf veranlasst, in demselben Bande S. 401 ein Schreiben zu veröffentlichen, in welchem er die Mittagsverbesserung in der Form unserer Gl. (39) empfahl; zugleich schloss sich hieran die Mittheilung einer Tafel für die Mittagsverbesserung berechnet von Gerling, welcher damals als Schüler von Gauss in Göttingen verweilte. Das Argument dieser Tafel ist die halbe Zwischenzeit M und findet sich daneben der $\log A$ und $\log B$ aufgeführt.

In den Schumacherschen astronomischen Hilfstafeln, wie sie Warnstorff im Jahre 1845 neu herausgab, erschien diese Tafel ebenfalls jedoch noch erweitert durch eine zweite Tafel, welche gestattet, den $\log f$ aufzuschlagen, so dass hiermit auch die Mitternachtsverbesserung leicht zu berechnen ist. Denn der $\log A$ und $\log B$ für die letztere Verbesserung kann ja ebenfalls für das Argument $N_\prime$ aus der Tafel für die Mittagsverbesserung genommen werden. Bei der Tafel für $\log f$ muss man sich aber merken, dass nicht $N_\prime$ sondern N, also nicht das Supplement $N_\prime = 12 - N$, sondern die wirkliche halbe Zwischenzeit N selbst das Argument bildet. In unserem Anhange sind diese beiden Tafeln als Tab. IX (A) und (B) zu finden und bedürfen dieselben keiner weiteren Erläuterung. Vergleicht man unsere oben berechneten $\log A$, $\log B$ und $\log f$ mit denen, welche für die betreffenden Argumente von den Tafeln selbst geliefert werden, so wird man sie hiermit in Uebereinstimmung finden.

Es dürfte zunächst nun von Interesse sein, zu erfahren, welche Werthe unser Δt_0 und Δt_u annehmen kann und ist unter der Voraussetzung, dass wir uns auf die Gleichung für die Mittagsverbesserung beschränken, ferner blos positive Declinationen von 0^0 bis $+ 23^0\ 27'$, sowie positive Polhöhen von 0^0 bis $+ 80^0$ berücksichtigen, die folgende Zusammenstellung der Werthe der beiden Summanden

$$S_1 = -\mu . A . \mathrm{tang}\, \varphi; \quad S_2 = \mu . B . \mathrm{tang}\, \delta_0$$

gegeben worden. Zur Berechnung dieser Summanden war es zunächst aber nöthig, zu entscheiden: welche Maximalwerthe kann die halbe

Zwischenzeit M für eine bestimmte Polhöhe und eine bestimmte Declination annehmen? Die Antwort auf diese Frage enthält die erste der Gleichungen (2) S. 368, in welcher wir nur $h = 90^0$ zu setzen haben, um t oder was hiermit nahe gleich gesetzt werden darf, $15\,M$ aus der Gleichung

$$\cos 15\,M = -\tan\varphi \,.\, \tan\delta \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

berechnen zu können. Geschieht dies, so erhält man folgende Zusammenstellung, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Maximalwerthe der halben Zwischenzeit M.

Polhöhe	Declination der Sonne.			
	0^0	10^0	20^0	$23^0\,27'$
0^0	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$
30	6 0	6 23	6 49	6 58
60	6 0	7 11	8 36	9 15
$66^0\,33'$	6 0	7 36	9 48	12^h
70^0	6 0	7 56	12^h	12
80	6 0	12^h	12	12

Hiernach ergiebt sich nun, wenn man sich für die vier Werthe von δ die zugehörigen Werthe von $\log\mu$ berechnet (es wurde hierfür das Berliner Jahrbuch vom Jahre 1850 benutzt und durch einfache Interpolation der $\log\mu$ gefunden) für

$\delta = 0^0$ ein $\log\mu = 3{,}45367$
$\delta = 10$ „ „ „ $= 3{,}40807$
$\delta = 20$ „ „ „ $= 3{,}17599$
$\delta = 23^0\,27'$ „ „ „ $= 1{,}84215$

Benutzen wir diese Werthe und nehmen aus der Taf. IX (A) unsere $\log A$ und $\log B$, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung für S_1 und S_2, wobei noch zu bemerken ist, dass der Maximalwerth von M gleich 11^h, der Minimalwerth gleich 1^h angenommen und von zwei zu zwei Stunden fortgeschritten wurde. Diejenigen Stellen der Tabelle, für welche nach der obigen Zusammenstellung der Maximalwerthe von M Werthe von S_1 und S_2 nicht möglich sind, wurden durch einen Querstrich bezeichnet. Alle Zahlenwerthe für S_1 und S_2 bedeuten selbstverständlich Zeitsecunden.

Werthe der Summanden S_1 und S_2.

	$M =$	1^h		3^h		5^h	
	δ	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2
$\varphi = 0^0$	0⁰	0	0	0	0	0	0
	10	0	+2,34	0	+1,88	0	+0,84
	20	0	+2,83	0	+2,27	0	+1,02
	23⁰ 27′	0	+0,16	0	+0,13	0	+0,06
$\varphi = 30^0$	0⁰	— 8,81	0	— 9,67	30⁰	—11,80	0
	10	— 7,93	+2,34	— 8,70	+1,88	—10,62	+0,84
	20	— 4,65	+2,83	— 5,10	+2,27	— 6,23	+1,02
	23⁰ 27′	— 0,22	+0,16	— 0,24	+0,13	— 0,29	+0,06
$\varphi = 60^0$	0⁰	—26,42	0	—29,01	0	—35,39	0
	10	—23,79	+2,34	—26,12	+1,88	—31,87	+0,84
	20	—13,94	+2,83	—15,31	+2,27	—18,67	+1,02
	23⁰ 27′	— 0,65	+0,16	— 0,71	+0,13	— 0,87	+0,06
$\varphi = 66^0\ 33'$	0⁰	—35,17	0	—38,61	0	—47,11	0
	10	—31,66	+2,34	—34,76	+1,88	—42,42	+0,84
	20	—18,55	+2,83	—20,37	+2,27	—24,86	+1,02
	23⁰ 27′	— 0,86	+0,16	— 0,94	+0,13	— 1,15	+0,06
$\varphi = 70^0$	0⁰	—41,91	0	—46,02	0	—56,14	0
	10	—37,73	+2,34	—41,43	+1,88	—50,55	+0,84
	20	—22,11	+2,83	—24,28	+2,27	—29,62	+1,02
	23⁰ 27′	— 1,02	+0,16	— 1,13	+0,13	— 1,37	+0,06
$\varphi = 80^0$	0⁰	—86,51	0	—94,98	0	—115,90	0
	10	—77,88	+2.34	—85,52	+1,88	—106,77	+0,84
	20	—45,64	+2,83	—50,12	+2,27	—61,14	+1,02
	23⁰ 27′	— 2,12	+0,16	— 2,32	+0,13	— 2,84	+0,06

Werthe der Summanden S_1 und S_2.

	$M =$	7^h		9^h		11^h	
	δ	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2
$\varphi = 0^0$	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—	—	—	—	—	—
	20	—	—	—	—	—	—
	23^0 27′	—	—	—	—	—	—
$\varphi = 30^0$	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—	—	—	—	—	—
	20	—	—	—	—	—	—
	23^0 27′	—	—	—	—	—	—
$\varphi = 60^0$	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—64,61	—1,17	—	—	—	—
	20	—26,14	—1,42	—	—	—	—
	23^0 27′	— 1,21	—0,08	—2,13	—0,38	—	—
$\varphi = 66^0$ 33′	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—59,38	—1,17	—	—	—	—
	20	—34,80	—1,42	—61,11	—6,82	—	—
	23^0 27′	— 1,61	—0,08	— 2,83	—0,38	—9,46	— 1,72
$\varphi = 70^0$	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—70,76	—1,17	—	—	—	—
	20	—41,47	—1,42	—72,83	—6,82	—243,23	—31,12
	23^0 27′	— 1,92	—0,08	— 3,38	—0,38	— 11,28	— 1,72
$\varphi = 80^0$	0^0	—	—	—	—	—	—
	10	—146,07	—1,17	—256,54	—5,64	—856,74	—25,73
	20	—85,60	—1,42	—150,34	—6,82	—502,08	—31,12
	23^0 27′	— 3,97	—0,08	— 6,97	—0,38	— 23,28	— 1,72

Es möge unterlassen bleiben, diejenigen Sätze, welche sich aus den beiden vorstehenden Tabellen ergeben, hier in Worten einzeln auszudrücken; nur auf Eines wollen wir aufmerksam machen. Wir sehen, dass die Mittagsverbesserung für grössere Polhöhen und geringe Werthe von δ sehr bedeutend wächst und der Gleichung (39) gemäss unendlich werden kann, falls man eine Beobachtung am Pole selbst angestellt dächte. Da dieses Anwachsen von Δt nun stattfinden kann, so ist es unter Umständen fraglich, ob wir uns noch erlauben dürfen, die Ableitung der Gleichung (39) der Figur 82 gemäss festzuhalten: wonach für δ_o der Werth der Decl. ⊙ im wahren Mittage eingesetzt wird, während $\Delta\delta_o$ die Declinationsänderung bedeutet, die auf die halbe Zwischenzeit M kommt, ein Umstand, worauf wir schon oben S. 393 hingewiesen haben. Der bessere Weg nun, der in einem solchen Falle betreten werden kann, ist folgender. Man berechnet sich zunächst Δt_o wie es die Gleichung (39) ergiebt; sodann berechnet man sich mit diesem Δt_o ein neues $\delta_o = \delta_m$, welches der Meridianstellung PM entspricht, während das zuerst benutzte der Stellung PT_o angehörte und bestimmt sodann mit diesem neuen δ_m zum zweitenmal das Δt_o.

Beispiel. Gesetzt, es wäre unter einer Polhöhe $\varphi = 80^0$ am 15. April 1870 bei einer halben Zwischenzeit $M = 11^h$ eine correspondirende Sonnenhöhenbeobachtung gemacht worden, so ist n. d. B. J. am 15. April $\delta_o = 9^0\ 46'\ 50'',5$; ferner

14. April Decl. ⊙ $= 9^0\ 25'\ 20'',6$
16. " " " $= 10\ \ 8\ \ 10\ ,6$
15. " " $\mu = 0^0\ 42'\ 50'',0 = 2570'',0$

n. Gl. (29) $log(-\mu) = 3{,}40993_n$ $\quad log\,\mu = 3{,}40993$

$log\,A = 8{,}77110$ $\quad log\,B = 8{,}75600_n$

$log\,tang\,\varphi = 0{,}75368$ $\quad log\,tang\,\delta_o = 9{,}23649$

$log\,S_1 = 2{,}93471_n$ $\quad log\,S_2 = 1{,}40241_n$

$S_2 = -860^s{,}42$ $\quad S_2 = -25^s{,}26$

mithin

$$\Delta t_o = -885^s{,}68.$$

Da nun Δ Decl. ⊙ $= +21'\ 20'',1 = 1280'',1$ ist, so würde innerhalb der Zeit Δt_o die Decl. ⊙ sich ändern um

$$\frac{1280{,}1\,.\,885{,}68}{86400} = 13'',12$$

demgemäss

$$\delta_m = 9^0\ 47'\ 3'',6$$

wird und wonach sich berechnet:

$$log(\mu\,.\,B) = 2{,}16593_n$$
$$log\,tang\,\delta_m = 9{,}23666$$
$$log\,S_2 = 1{,}40259_n$$
$$S_2 = -25^s{,}27$$

Wir schliessen aus dem Ergebnisse dieser Rechnung, dass eine solche zweite Berechnung von Δt nicht vorgenommen zu werden braucht, da selbst für sehr bedeutende Δt es ganz einerlei ist, ob man δ_o oder δ_m in die Gleichung (39) einsetzt.

§. 82. Im Anschluss an das Vorausgehende müssen wir aber weiter fragen: wie hat sich unsere Entwickelung, aus der schliesslich Δt_o und Δt_u sich ergab, zu ändern, wenn wir die ⊙ nicht nach einer wahren Sonnenuhr, sondern nach einer mittlere Sonnenzeit angebenden Uhr oder nach einer Sternuhr beobachten, wenn also zunächst nicht T_1, T_2 und T_3 sondern T_1'', T_2'' und T_3'' oder T_1', T_2' und T_3' die gegebenen Uhrzeiten sind und der Fehler der mittlere Zeit angebenden Uhr bzw. der Sternuhr im Momente des wahren Mittags gefunden werden soll und demgemäss die halben Zwischenzeiten M bzw. N und N, nicht wahre sondern mittlere Zeit- und Sternzeitintervalle vorstellen. Der Weg, der in diesen Fällen betreten werden kann, zeichnet sich sofort vor. Denn man wird ohne weiteres, wenn die halbe Zwischenzeit als ein mittleres Zeitintervall M'' oder ein Sternzeit-Intervall M' gegeben ist, diese Zeiten in ein wahres Zeitintervall M''' (gleich dem bisherigen M) verwandeln, dieses Zeitintervall, wie im vor. §. gezeigt wurde, zur Berechnung von Δt_o bzw. Δt_u benutzen, um demgemäss dann diese letzteren Grössen zunächst auch als wahre Sonnenzeitgrössen zu finden; hiernach wird man umgekehrt diese so erhaltenen wahren Sonnenzeitgrössen Δt_o und Δt_u in eine mittlere Zeitgrösse bzw. in eine Sternzeitgrösse verwandeln, womit die Aufgabe gelöst ist.

Um für den Fall, dass man eine mittlere Zeituhr benutzt, den Zusammenhang auch noch aus der Figur zu erkennen, wollen wir annehmen, die ○ sei der ⊙ etwas voraus und befinde sich zur Zeit T_1'', wo die letztere in s steht nicht in T_1 sondern in σ_1, so dass Bogen $T_1\sigma_1 = (ZG)_1$ ist. Dies zugegeben wird die ○ zur Zeit, wo die ⊙ culminirt, etwa in σ_o' stehen, so dass Bogen $\sigma_o\sigma_o' = (ZG)_o = ZG$ (nach der früheren Bezeichnung) ist und ferner wird zur Zeit, wo die ⊙ in s_2 erscheint, die ○ nicht in T_2 sondern in σ_2 anzunehmen sein, so dass Bogen $T_2\sigma_2 = (ZG)_2$ ist. Wie wir nun im §. 80 durch Halbirung des Bogens T_1T_2 auf den Punkt M kamen, so kommen wir jetzt durch Halbirung des Bogens $\sigma_1\sigma_2$ auf den Punkt σ_o'' und ist nunmehr der kleine Bogen $\sigma_o'\sigma_o''$ die Mittagsverbesserung nach mittlerer Zeit, während der Bogen T_oM sie in wahrer Zeit ausdrückt. Nach der eben bezeichneten Methode ist also der Figur gemäss zunächst gegeben

Bogen $T_o\sigma_1$ (überstumpf) $= T_1''$

„ $T_o\sigma_2$ (spitz) $+ 24^h = T_2''$

„ $\sigma_1\sigma_2$ (stumpf) $= T_2 - T_1'' = 2M''$

$$\text{Bogen } \sigma_1\sigma_0'' = \sigma_0''\sigma_2 = \frac{T_2''-T_1''}{2} = M''$$

und wird verlangt, Bogen $\sigma_1\sigma_0''$ solle in den Bogen T_1M verwandelt werden, um so auf die dem §. 80 entsprechende Figur zu kommen. Ihr gemäss findet man dann den Bogen $T_0M = \varDelta t_0$ und zuletzt wird Bogen T_0M als ein wahrer Zeitbogen in den mittleren Zeitbogen $\sigma_0'\sigma_0''$ übergeführt, womit die Aufgabe gelöst ist.

Die Ueberführung eines mittleren Zeitintervalles M'' in ein wahres M''' gelingt nun sehr einfach. Denn wir wissen, dass ein mittlerer Sonnentag gleich ($24^h + 3^m\ 56^s,56$) und ein wahrer Sonnentag ($24^h + \varDelta\dot{A\!R}\odot$) Sternzeit ist, dass mithin

$$\frac{M'''}{M''} = \frac{24^h + \varDelta\dot{A\!R}\odot}{24^h + 3^m\ 56^s,56}$$

und somit für eine directe Umwandlung

$$M''' = M''\frac{24^h + 3^m\ 56^s,56}{24^h + \varDelta\dot{A\!R}\odot} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

oder da auch

$$M''' = M'' + M''\frac{3^m\ 56^s,56 - \varDelta\dot{A\!R}\odot}{24^h + \varDelta\dot{A\!R}\odot}$$

der Werth

$$\text{Corr.}(M) = M''\frac{3^m\ 56^s,56 - \varDelta\dot{A\!R}\odot}{24^h + \varDelta\dot{A\!R}\odot} \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

die an M'' anzubringende Correction vorstellt, um M'' in M''' überzuführen. Um nun weiter zu erfahren, ob diese Corr. unter Umständen eine beachtenswerthe Aenderung von $\varDelta t_0$ bewirkt, wollen wir für obiges Beispiel (S. 401) annehmen: es wäre nicht mit einer wahren Sonnenuhr sondern mit einer mittleren Zeituhr beobachtet worden und wäre $M'' = 11^h$ gewesen. Am 15. April 1870 ist $\varDelta\dot{A\!R}\odot = 3^m\ 41^s,38$ mithin

$$\text{Corr.}(M) = 11^h\frac{15^s,18}{24^h + 41^s,38} = 39600\,\frac{15^s,18}{86441,38} = 6^s,9 = 0^m,11$$

und somit $M''' = 11^h\ 0^m,11$. Da nun für

$$\begin{array}{rlrl} M = 11^h\ 0^m \text{ der } log\,A = & 8,7711 \text{ und } log\,B = & 8,7560_n \\ \text{,,} = 11\ \ 1 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = & 8,7789 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = & 8,7643_n \\ \text{Differenz} = & 0,0078 \qquad = & 0,0083 \end{array}$$

ist, so betragen die an die obersten Logarithmen anzubringenden Correctionen $0,0078 \,.\, 0,11 = 0,00086$ und $0,0083 \,.\, 0,11 = 0,00091$, wonach in dem obigen Beispiel nunmehr $log\,S_1 = 2,93557_n$ und $log\,S_2 = 1,40332_n$, ferner $S_1 = -862^s,12$ und $S_2 = -25^s,32$ und sonach $\varDelta t_0 = -887^s,44$ wird. Um diese Grösse schliesslich in eine mittlere Zeitgrösse überzuführen, müssten wir sie mit dem umgekehrten Coefficienten, wie der in Gl. (42) an M'' stehende multipliciren, d. h.

$$\Delta t_0 \frac{24^h + 3^m\, 41^s,38}{24^h + 3^m\, 56^s,56} = \Delta t_0 - \Delta t_0 \frac{15,18}{86636,56}$$

berechnen, wobei die an Δt_0 anzubringende Corr. gleich

$$-887,44 \;\frac{15,18}{86636,56} = -0^s,16$$

und hiernach

$$\Delta t_0 = -887^s,28$$

wird, welches vom Werthe Δt_0 der S. 401 um $1^s,6$ abweicht.

Man erkennt aus dem Ergebnisse dieser Rechnung, dass die Angabe verschiedener Lehrbücher: man dürfe sich, wenn die wahre Sonne nach einer mittleren Zeituhr beobachtet worden sei, erlauben für M''' unmittelbar M'' zu nehmen und hernach auch die Ueberführung von Δt_0 als eine wahre Sonnenzeitgrösse in eine mittlere Zeitgrösse unterlassen, nicht correct ist, indem eine Nichtbeachtung einer Zeitgrösse wie die eben gefundene $1^s,6$ unter Umtänden als eine Ungenauigkeit bezeichnet werden kann. Beachten wir jedoch, dass bei unserem Beispiel ein sehr hoher Werth von Δt_0 in Betracht kam, dass dieser meist sehr viel geringer ist, dass die halbe Zwischenzeit ebenfalls meistens viel kleiner ist und im Durchschnitt bei mittleren Breiten meist etwa nur 3 Stunden beträgt, so wird die eben bezeichnete Vereinfachung der Rechnung ohne weiteres eintreten dürfen.

Um in ähnlicher Weise den Zusammenhang zu beurtheilen, im Falle bei der Beobachtung eine Sternuhr benutzt wurde, achten wir darauf, dass für eine directe Umwandlung die Gleichung

$$M''' = M' \frac{24^h}{24^h + \Delta \dot{AR}\odot} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

besteht, oder an M' eine

$$\text{Corr.}\,(M) = -M' \frac{\Delta \dot{AR}\odot}{24^h + \Delta \dot{AR}\odot} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

angebracht werden muss. Wäre demnach am 15. April 1870 die betr. Beobachtung mit einer Sternuhr gemacht worden, so wäre, wenn wir jetzt $M' = 11^h$ annehmen:

$$\text{Corr.}\,(M) = -39600 \frac{3^m\, 41^s,38}{24^h + \Delta \dot{AR}\odot} = -39600 \frac{221,38}{86641,38} = -101^s,30$$

so dass unser $M''' = 11^h - 1^m\, 41^s,3 = 11^h - 1^m,69$ wird, wonach die Correctionen der Logarithmen gleich $-0,0078 \,.\, 1,69 = -0,01318$ und $-0,0083 \,.\, 1,69 = -0,01403$ und in dem obigen Beispiel S. 401 nunmehr $log\, S_1 = 2,92153_n$, $log\, S_2 = 1,38838_n$ d. h. $S_1 = -834^s,70$, $S_2 = -24^s,46$ und $\Delta t_0 = -859^s,16$ wird. Verwandeln wir diesen Werth in eine Sternzeitgrösse, so ist diese gleich

$$859,16 \frac{24^h + 3^m\, 41^s,38}{24^h}$$

oder die an $\varDelta t_0$ anzubringende Correction gleich

$$859,16 \frac{221,38}{86400} = 2^s,20$$

demgemäss nun

$$\varDelta t_0 = -861^s,36$$

wird.

Auch diesen Fall betreffend findet man sonst die Ansicht ausgesprochen: man solle einfach M' nicht in M''' sondern in M'' verwandeln, was mittelst der Taf. II (A) sofort geschehen kann und solle dann, wenn $\varDelta t_0$ mit diesem M'' berechnet ist, dasselbe als eine mittlere Zeitgrösse mittelst der Taf. II (B) in eine Sternzeitgrösse verwandeln. Verfahren wir nach dieser Regel, so ist für $M' = 11^h$ $M'' = 11^h - 1^m\,48^s,12 = 11^h - 1^m,8$, demgemäss die Correctionen der Logarithmen $-0,0088 \,.\, 1,8 = -0,01404$ und $-0,0083 \,.\, 1,8 = -0,01514$ und hiernach $log\, S_1 = 2,92067_n$, $log\, S_2 = 1,38727$, ferner $S_1 = -833^s,00$, $S_2 = -24^s,39$ und somit $\varDelta t_0 = -857^s,39$, welches in eine Sternzeitgrösse verwandelt

$$\varDelta t_0 = -859^s,74$$

giebt, welches von dem zuletzt nach der strengen Manier gefundenen Werthe $861^s,36$ um $1^s,62$ abweicht, woraus sich ergiebt, dass diese Vereinfachung der Rechnung unter Umständen nicht eintreten darf. Mit Rücksicht darauf jedoch, dass meistens kleinere Werthe von $\varDelta t_0$ und M in Betracht kommen, darf man sich die zuletzt besprochene Vereinfachung bei der Berechnung erlauben.

Im Anschlusse an das Vorausgehende beantworten wir eine weitere Frage nämlich: wie ändert sich das Resultat unserer Zeitbestimmung, wenn wir annehmen, dass die Uhr ausser einem Standfehler s, um den es sich bei unserer bisherigen Betrachtung allein handelte, auch noch einen Gangfehler g besitzt? Die Lösung dieser Frage ist eigentlich im Vorausgehenden schon enthalten. Denn wir können eine Sternuhr ansehen wie eine wahre Sonnenzeituhr, die täglich um $\varDelta\,\mathit{Æ}\odot$ vorgeht, oder wie eine mittlere Zeituhr, deren Vorgehen täglich $3^m\,56^s,56$ beträgt. Bezeichnen wir demnach den täglichen Gang der Uhr mit g, so müssten wir anstatt der berechneten halben Zwischenzeit M ein $M -$ Corr. (M) setzen, wobei

$$\text{Corr.}\,(M) = M \,.\, \frac{g}{24} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (46)$$

ist. K e n n e n wir nun den Gang g, so kann das richtige M berechnet werden; aber häufig wird die Sache so liegen, dass man weder s noch g kennt. In diesem Falle wird selbstverständlich eine einmalige Zeitbestimmung nicht zum gewünschten Ziele führen und wird man nach nicht zu langer Zwischenzeit eine zweite Beobachtung an-

zustellen haben. Hätte der gefundene Weg beispielshalber in vier Tagen $+ 15$ Sec. betragen, so wäre $g = + \frac{15}{4} = + 3^s,75$ und würde, wenn man $M = 11^h$ annähme, Corr. $(M) = - 11 \frac{3,75}{24} = - 1^s,74 = - 0^m,03$ sein. Mit Rücksicht auf die obigen Rechnungen z. B. am Schlusse d. S. 403 erkennen wir aber, dass bei einem solchen Gangfehler, der für eine astronomische Uhr schon etwas gross angesehen werden kann, die Summanden S_1 und S_2 nur sehr wenig beeinflusst werden, und dass man erst bei einem sehr bedeutenden Gang eine geringe Aenderung im Werthe $\varDelta t_0$ und $\varDelta t_u$ zu erwarten hat.

Einen bemerkbareren Einfluss kann aber schliesslich noch die astronomische Strahlenbrechung bei unserer Zeitbestimmung ausüben, wenn wir annehmen, dass der Zustand der Atmosphäre zur Zeit T_2 ein anderer wie zur Zeit T_1 bzw. T_3 gewesen sei, und wollen wir diesen Einfluss in einem Falle berechnen. Es sei nämlich: der Barometerstand Vormittags gleich 329,5 par. Lin.; die Temperatur des Barometers und der Luft $= 4^0,8$ R.; der Barometerstand Nachmittags gleich $323''',6$, die beiderseitige Temperatur gleich $11^0,4$ R. Die beobachtete Höhe Vormittags gleich $7^0\ 30'\ 0''$, mithin die Zenithdistanz gleich $82^0\ 30'$.

Dies angenommen ist nach den Lehren des §. 29 für den Vormittag:

$\log B = - 0,00490$	$A \,.\, \log \beta = - 0,00535$
$\log T = - 0,00042$	$\lambda \,.\, \log \gamma = + 0,00543$
$\log \beta = - 0,00532$	$0,00008$
$A = 1,00670$	$\log a = 1,73564$
$\lambda = 1,06710$	$\log tang\, z = 0,88057$
$\log \gamma = + 0,00509$	$\log r_1 = 2,61629$
für den Nachmittag:	$r_1 = 413'',3 = 6'\ 53'',3$
$\log B = - 0,01275$	$A \,.\, \log \beta = - 0,01385$
$\log T = - 0,00101$	$\lambda \,.\, \log \gamma = - 0,00800$
$\log \beta = - 0,01376$	$- 0,02285$
$A = 1,00670$	$\log (a \,.\, tang\, z) = 2,61621$
$\lambda = 1,06710$	$\log r_2 = 2,59336$
$\log \gamma = - 0,00750$	$r_2 = 392'',1 = 6'\ 32'',1$

mithin

$$dh = r_1 - r_2 = + 21'',2$$

Um nun genauer zu erkennen, welchen Einfluss eine Aenderung der Höhe gleich dh auf den Stundenwinkel t ausübt, setzen wir in Gl. (3) S. 370 dt auf die linke Seite und erhalten

$$dt = - \frac{\cos h \,.\, dh}{\cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \sin t} \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

welche Gleichung lehrt, dass mit einem Wachsthum von h also Vor-

mittags eine Abnahme und mit einer Abnahme von h also Nachmittags ein Wachsthum des Stundenwinkels t verbunden ist.

Um weiter zu sehen, wie ein dh, durch den Refractionsunterschied hervorgerufen, auf unsere Zeitbestimmung wirkt, beachten wir Folgendes. Der Sextant ist bestimmt eingestellt und findet die betreffende Berührung der Sonnenränder statt im Momente, wo der betreffende Rand eine der Stellung des Sextanten entsprechende Höhe h erreicht. Ist nun z. B. Vormittags im Vergleich zu Nachmittags desselben oder im Vergleich zu Nachmittags des vorausgehenden Tages (Wir fangen also jetzt mit T_2 an, erhalten am nächsten Vormittag T_3 und an dem hierauf folgenden Nachmittag T_4) das durch die Refractionsunterschiede hervorgerufene dh positiv, so erscheint die ☉ im eben bezeichneten Momente nicht in einer Höhe gleich h, sondern gleich $h + dh$ und beobachten wir die erwähnte Berührung Vormittags um dt zu früh, d. h. wir müssen zu der direct beobachteten Zeit T_3 den Werth dt addiren, um die richtige Zeit T_3 zu erhalten. Das Umgekehrte findet statt, wenn dh negativ ist. Mit Rücksicht hierauf bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} T_o &= \frac{(T_3 \pm dt) + T_4}{2} = \frac{T_3 + T_4}{2} \pm \frac{dt}{2} \\ T_u &= \frac{T_2 + (T_3 \pm dt)}{2} = \frac{T_2 + T_3}{2} \pm \frac{dt}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

und

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{T_4 - (T_3 \pm dt)}{2} = \frac{T_4 - T_3}{2} \mp \frac{dt}{2} \\ N &= \frac{(T_3 \pm dt) - T_2}{2} = \frac{T_3 - T_2}{2} \pm \frac{dt}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Um nun dt nach der Gl. (47) zu berechnen, setzen wir einfach für den Stundenwinkel t die halbe Zwischenzeit M bzw. N, und würde in unserem obigen Beispiele, wo $dh = 21'',2$ war, unter der weiteren Voraussetzung, dass $M = 6^h$ mithin $t = 90^0$ und zugleich unter der Annahme, es sei $\delta = 0^0$

$$dt = \frac{21'',2}{15 \,.\, cos\, \varphi} = 2^s,2$$

werden, so dass:

$$T_o = \frac{T_3 + T_4}{2} + 1^s,1 \text{ und } M = \frac{T_4 - T_3}{2} - 1^s,1$$

wird.

§. 84. Hiernach mag nun eine vollständige Berechnung einer Beobachtung correspondirender Sonnenhöhen folgen, die am 15. und 16. Septb. 1874 vom Verfasser angestellt wurde. Der hierbei benutzte Sextant war ein kleiner Baumann'scher mit einem Radius der Theilung gleich 100^{mm} und gestattete mit Hilfe des Nonius eine Ablesung

auf 20″ genau. Die Zeit wurde nach dem mittlere Zeit anzeigenden Chronometer von Kessels notirt. Als Reflector wurde ein künstlicher Horizont von Breithaupt in Cassel benutzt.

Beobachtung am 15. Septb. Nachmittags.

1. Beobachtung des Unterrandes der Sonne allein bei einer fortlaufenden Verstellung des Sextanten um je 20 Minuten.

Stand des Sextanten.	Beobachtungszeiten T_2''.	Differenzen.
60° 0′	$7^h\ 32^m\ 48^s$	$1^m\ 20^s$
40	34 8	20
20	35 28	19
59 0	36 47	20
40	38 7	19
20	39 26	20
58 0	40 46	12
40	41 58	18
20	43 16	16
57 0	44 32	

2. Beobachtung des Unter- (U) und Oberrandes (O) nach dem Schema auf S. 380.

Stand des Sextanten.	Rand.	Beobachtungszeiten T_2''.	Differenzen.
56° 0′	U	$7^h\ 48^m\ 23^s$	$4^m\ 6^s$
„ „	O	52 29	3 36
54 0	U	56 5	3 57
„ „	O	8 0 2	

Lufttemperatur = 14° R.

Barometer = 332,04 par. Lin.

Beobachtung am 16. Septb. Vormittags.

3. Beobachtung der Ober- und Unterrandes wie unter 2.

Stand des Sextanten.	Rand.	Beobachtungszeiten T_3''.	Differenzen.
54° 0′	O	$1^h\ 25^m\ 50^s$	$4^m\ 1^s$
„ „	U	29 51	3 35
56 0	O	33 26	4 6
„ „	U	37 32	

4. Beobachtung des Unterrandes der Sonne allein bei einer fortlaufenden Verstellung des Sextanten um je 20 Minuten.

Stand des Sextanten.	Beobachtungszeiten T_3''.	Differenzen.
57° 0′	$1^h\ 41^m\ 26^s$	$1^m\ 17^s$
20	42 43	19
40	44 2	17
58 0	45 19	21
20	46 40	19
40	47 59	

Stand des Sextanten.	Beobachtungszeiten T_3''.	Differenzen.
58° 40′	47m 59s	22s
59 0′	49 21	23
20	50 44	21
40	52 5	24
60 0	53 29	

Lufttemperatur = 8°,0.
Barometerstand = 330,46 par. Lin.

Beobachtung am 16. Septb. Nachmittags.

5. Beobachtung des Unterrandes der Sonne allein bei einer fortlaufenden Verstellung des Sextanten um je 20 Minuten.

Stand des Sextanten.	Beobachtungszeiten T_4''.	Differenzen.
60° 0′	7h 29m 35s	1m 21s
40	30 56	24
20	32 20	20
59 0	33 40	21
40	35 1	20
20	36 21	20
58 0	37 41	19
40	39 0	20
20	40 20	
57 0	— —	

6. Beobachtung des Unter- und Oberrandes wie unter 3.

Stand des Sextanten.	Rand.	Beobachtungszeiten.	Differenzen.
56° 0′	*U*	7h 45m 33s	4m 3s
„ „	*O*	49 36	3 38
54 0	*U*	53 14	4 0
„ „	*O*	57 14	

Lufttemperatur = 15°,2 R.
Barometerstand = 329,66 par. Lin.

Es war demnach eine doppelte Beobachtungsweise angewandt worden, indem die eine dem Schema der S. 382, die andere, wobei beide Sonnenränder beobachtet wurden, dem Schema der S. 380 u. f. entsprach, und legen wir der Berechnung blos die Zeitwerthe der ersteren Beobachtung zu Grunde. Verbinden wir nun zunächst die correspondirenden Zahlen T_2'' und T_3'' der Beobachtungen 1 und 4, so erhalten wir die berechneten Einzelwerthe der sogenannten „unverbesserten Mitternacht“ (vom $\frac{15}{16}$. September); verbinden wir ebenso die correspondirenden Zahlen T_3'' und T_4'' der Beobachtungen 4 und 5, so erhalten wir die berechneten Einzelwerthe des „unverbesserten Mittags“ (am 16. Septb.); bilden wir dann aus den Einzelwerthen das Gesammtmittel, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung.

Stand des Sextanten.	Unverbesserte Mitternacht.	Unverbesserter Mittag.
60° 0′	$4^h\ 43^m\ 8^s,5$	$4^h\ 41^m\ 32^s,0$
40	6 ,5	30 ,5
20	6 ,0	32 ,0
59 0	4 ,0	30 ,5
40	3 ,0	30 ,0
20	3 ,0	30 ,5
58 0	2 ,5	30 ,0
40	0 ,0	31 ,0
20	42 59 ,5	31 ,5
57 0	59 ,0	—
	$T_u'' = 4^h\ 43^m\ 3^s,20$	$T_o'' = 4^h\ 41^m\ 30^s,88$

Da nun, wie die Gl. (48) und (49) beweisen, die Refraction einen Einfluss auf die Werthe T_u, T_o sowie auf M, N und N_1 ausübt, und diese drei letzteren Grössen bei der Berechnung der Mittags- und Mitternachtsverbesserung als Argumente in Betracht kommen, so müssen wir die Frage stellen: wie würden diese Argumente ausgefallen sein, wenn die Refractionsunterschiede bei den betreffenden Beobachtungen nicht mitgewirkt hätten? Bezeichnen wir diese Argumente in der Weise, dass wir die obigen Werthe in eine eckige Klammer schliessen, so würden $[M]$, $[N]$ und $[N_1]$, die vom Einflusse der Refraction befreiten Werthe seien, die wir zunächst zu berechnen haben. Gemäss der Gl. (47) müssen wir aber hierzu vor allem ausser φ die Declination und den Stundenwinkel t haben, und da diese selbst wiederum vom Einfluss der Refraction abhängig sind, so würde es gar nicht möglich sein, den letzteren zu berechnen. Jedoch ist es in diesem Falle ohne weiteres erlaubt, zunächst t näherungsweise anzunehmen, hiernach einen Näherungswerth von δ zu berechnen und diese Werthe bei der Berechnung von dt nach Gl. (47) zu verwenden.

In unserem Falle lagen die Mitten der drei Beobachtungszeiten etwa um drei Stunden vom Mittag des 15. Septb. bzw. dem Mittag des 16. Septb. ab, und da wir bei der vorausgehenden Betrachtung über den Einfluss der Refraction die Sache so ansahen, dass wir fragten, wie musste die Beobachtung 4 ausfallen, wenn die Refraction bei ihr gerade so gewesen wäre, wie zur Zeit der Beobachtung 1 bzw. 5, so brauchen wir für die Berechnung von dt nach Gl. (47) die Declination δ_* für Marburg und zwar für den 16. Septb. Vormittags um 9^h d. h. drei Stunden vom Mittag des 16. Septb. rückwärts gerechnet. Es ist aber für Greenwich am 16. Septb. $\delta_o = 2^0\ 36'\ 52''$ mit der stündlichen Aenderung gleich $-57'',97$ und somit Corr. (δ) für Marburg gleich $+57'',97\ (3^h - 35^m) = 57'',97 \,.\, 2,42 = 140'' = 2'20''$

und hiernach

$$\delta_* = 2^0\ 39'\ 12''.$$

Mit Hilfe unserer Refractionstabellen ergiebt sich nun für die Beobachtung 1:

$$\begin{array}{rlrl}
\log B & = -0{,}00157 & A\,.\log\beta & = -0{,}00279 \\
\log T & = \underline{-0{,}00122} & \lambda\,.\,\gamma & = \underline{-0{,}01242} \\
\log\beta & = -0{,}00279 & & -0{,}01521 \\
A & = 1{,}00000 & \log a & = 1{,}75991 \\
\lambda & = 1{,}00480 & \log tang\, z & = \underline{0{,}25179} \\
\log\gamma & = -0{,}01236 & & 2{,}01170 \\
 & & & \underline{-0{,}01521} \\
 & & \log r_2 & = 1{,}99649 \quad r_2 = 99'',2.
\end{array}$$

Beobachtung 4:

$$\begin{array}{rlrl}
\log B & = -0{,}00364 & A\,.\log\beta & = -0{,}00434 \\
\log T & = \underline{-0{,}00076} & \lambda\,.\log\gamma & = \underline{-0{,}00106} \\
\log\beta & = -0{,}00434 & & -0{,}00540 \\
\log\gamma & = -0{,}00106 & \log(a\,.\,tang\, z) & = -\underline{2{,}01170} \\
 & & \log r_3 & = 2{,}00630 \quad r_3 = 101'',5.
\end{array}$$

Beobachtung 5:

$$\begin{array}{rlrl}
\log B & = -0{,}00469 & A\,.\log\beta & = -0{,}00602 \\
\log T & = \underline{-0{,}00133} & \lambda\,.\log\gamma & = \underline{-0{,}01467} \\
\log\beta & = -0{,}00602 & & -0{,}02069 \\
\log\gamma & = -0{,}01459 & \log(a\,.\,tang\, z) & = \underline{2{,}01170} \\
 & & \log r_4 & = 1{,}99101 \quad r_4 = 98'',0.
\end{array}$$

Hiernach gestaltet sich die Berechnung der Gl. (47) unter Annahme des Werthes δ_* und $t = 3^h = 45^0$ wie folgt:

$$dh' = 101'',5 - 99'',2 = 2'',3\,;\ 2h = \frac{60^0\ 0' + 57^0\ 0'}{2} = 58^0\ 30'\,;\ h = 29^0\ 15'$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log\cos\varphi & = 9{,}80062 & \log\cos h & = 9{,}94076 \\
\log\cos\delta_* & = 9{,}99954 & \log 2{,}3 & = \underline{0{,}36173} \\
\log\sin t & = \underline{9{,}84949} & & 0{,}30249 \\
 & 9{,}64965 & & \underline{9{,}64965} \\
 & & \log dt' & = 0{,}65284.
\end{array}$$

$$dt' = 4'',49 = 0^s,30\,;\ \frac{dt'}{2} = 0^s,15$$

$$dh'' = 101'',5 - 98'',0 = 3'',5\,;\ 2h = \frac{60^0\ 0' + 57^0\ 20'}{2} = 58^0\ 40'\,;\ h = 29^0\ 20'$$

$$\begin{array}{rl}
\log\cos h & = 9{,}94041 \\
\log 3{,}5 & = \underline{0{,}54407} \\
 & 0{,}48448 \\
 & \underline{9{,}64965} \\
\log dt'' & = 0{,}83483
\end{array}$$

$$dt'' = 6'',84 = 0^s,46\,;\ \frac{dt''}{2} = 0^s,23.$$

Um nun zunächst N'' und $N_,''$ zu erhalten, nehmen wir das Mittel aus den beiden Endwerthen der Beobachtung 4 und ebenso das Mittel aus den beiden Endwerthen der Beobachtung 1 und ziehen das letztere von ersterem ab, wobei sich ergiebt:

$$\begin{array}{rl} & 25^h\ 47^m\ 27^s,5 \\ & 7\ \ 38\ \ 40,0 \\ \hline 2N'' = & 18^h\ \ 8^m\ 47^s,5 \end{array}$$

$$N'' = 9^h\ 4^m\ 23^s,75 = N_,'' = 2^h\ 55^m\ 36^s,25;$$

dessgleichen ergiebt sich aus der Beobachtung 5 und 4, wenn wir bei der letzteren den Zeitwerth für den Stand des Sextanten gleich 57° 0′ weglassen, da der correspondirende Zeitwerth bei der Beobachtung 5 nicht erlangt werden konnte

$$\begin{array}{rl} & 7^h\ 34^m\ 57^s,5 \\ & 1\ \ 48\ \ \ 6,0 \\ \hline 2M'' = & 5^h\ 46^m\ 51^s,5 \\ M'' = & 2^h\ 53^m\ 25^s,75 \end{array}$$

und sind die wegen der Refraction verbesserten Werthe gemäss der Gleichungen (48) und (49)

$$T_u'' = 4^h\ 43^m\ \ 3^s,35;\ T_o'' = 4^h\ 41^m\ 31^s,12$$

$$N'' = 9^h\ \ 4^m\ 23^s,90;\ N_,'' = 2^h\ 55^m\ 36^s,10;\ M'' = 2^h\ 53^m\ 25^s,51.$$

Da wir ferner nach einer mittleren Zeituhr beobachtet haben, so müssen wir jetzt unserer Betrachtung im §. 82 zu Folge die letzteren drei Werthe erst in wahre Sonnenzeitintervalle N''', $N_,'''$ und M''' verwandeln. Es ist aber $\Delta \dot{R}\odot = 3^m\ 35^s,4$ und somit entsprechend der Gl. (43)

$$\text{Corr.}\,(N) = 9^h\ \ 4^m\ 24^s\ \frac{21,1}{86615} = 7^s,96,$$

$$\text{Corr.}\,(N_,) = 2^h\ 55^m\ 36^s\ \frac{21,1}{86615} = 2^s,57,$$

$$\text{Corr.}\,(M) = 2^h\ 53^m\ 26^s\ \frac{21,1}{86615} = 2^s,54$$

und demgemäss:

$$\begin{array}{rl} N''' & = 9^h\ \ 4^m\ 31^s,86 = 9^h\ \ 4^m,53 \\ N_,''' & = 2\ \ 55\ \ 38^s,67 = 2\ \ 55\ ,64 \\ M''' & = 2\ \ 53\ \ 28^s,05 = 2\ \ 53\ ,47 \end{array}$$

wonach wir nun im Stande sind, die Mitternachts- und Mittagsverbesserung zu berechnen, vorausgesetzt, dass wir erst für Marburg die genaueren Werthe von δ_o und δ_u, die in den Gl. (39) und (40) vorkommen, finden. Es ist aber für Greenwich 15. Septb. δ_o = 2° 48′ 26″,6 mit der stündlichen Aenderung gleich — 57,9, mithin für Marburg die Corr. $(\delta) = +\ 57{,}9 \cdot \frac{2105,6}{3600} = +\ 33'',9$ und so-

nach

$$\delta_u = 2^0\ 49'\ 0'';$$

ferner ist für Greenwich 16. Septb. $\delta_o = 2^0\ 36'\ 52''$ und sonach für Marburg

$$\delta_o = 2^0\ 37'\ 26''.$$

Somit gestaltet sich die Berechnung der Mitternachtsverbesserung nach Gl. (40) wie folgt.

$$\mu = -48\,.\,57'',9 = -2779'',2$$

$log\,\mu = 3{,}44392_n$	$log\,(-\mu . f) = 3{,}93577$
$log\,f = 0{,}49185$	$log\,B = 7{,}62564$
$log\,A = 7{,}76812$	$log\,tang\,\delta_u = 8{,}69196$
$log\,tang\,\varphi = 0{,}08873$	$log\,S_2 = 0{,}25337$
$log\,S_1 = 1{,}79262_n$	
$S_1 = -62^s{,}03$	$S_2 = +1^s{,}79$

und demgemäss $\Delta t_u = -60^s{,}24$, welcher Werth in Folge unserer Betrachtung auf S. 402 wieder rückwärts in mittlere Zeit zu verwandeln ist, wobei er die

$$\text{Corr.} = -60^s \frac{21{,}1}{86636} = -0^s{,}01$$

erhält und somit

$$\Delta t_u = 60^s{,}23$$

die gesuchte Mitternachtsverbesserung ist. Bezüglich der Mittagsverbesserung ist gemäss der Gl. (38)

$$log\,\mu = -48\,.\,48\,.\,57'',97 = -2782'',6$$

$log\,(-\mu) = 3{,}44446$	$log\,\mu = 3{,}44446_n$
$log\,A = 7{,}76750$	$log\,B = 7{,}62850$
$log\,tang\,\varphi = 0{,}08873$	$log\,tang\,\delta_o = 8{,}66112$
$log\,S_1 = 1{,}30069$	$log S_2 = 9{,}73408_n$
$S_1 = +19^s{,}98$	$S_2 = -0^s{,}54.$

Da die Summe dieser Grössen bei der Umwandlung in eine mittlere Zeitgrösse keine bemerkenswerthe Correction erhält, so ist die gesuchte Mittagsverbesserung gleich

$$\Delta t_o = +19^s{,}44.$$

Hiernach ist aber die Zeit, welche das Chronometer in dem Momente der wahren Mitternacht vom $\frac{15}{16}$. Septb. und des wahren Mittags am 16. Septb. angezeigt hätte, gleich

$$T_u'' = 4^h\ 43^m\ 3^s{,}35 - 60^s{,}23 = \mathbf{4^h\ 42^m\ 3^s{,}12}$$
$$T_o'' = 4\ \ 41\ \ 31{,}12 + 19{,}44 = \mathbf{4\ \ 41\ \ 50{,}56}$$

und haben wir nun noch den Standfehler des Chronometers nach der Gl. (25) und (24) zu berechnen. Es ist aber für Greenwich

$\frac{15}{16}$. Septb. $ZG = -5^m\ 1^s{,}78$ mit der stündl. Aendr. $= 0^s{,}879$

16. „ $\dot{Z}G = -5^m\ 12^s{,}33$ „ „ „ „ $= 0^s{,}880$

mithin die Corr. (ZG) für Marburg:

$$+0{,}879\,\frac{2105{,}6}{3600} = +\,0^s{,}51 \quad\text{und}\quad +0{,}880\,\frac{2105{,}6}{3600} = +\,0^s{,}51$$

d. h. für Marburg

$$\tfrac{15}{16}.\ \text{Septb.}\ ZG = -5^m\ 1^s{,}27$$

$$16.\ \ ,,\ \ \dot{Z}G = -5\ \ 11{,}82$$

und demgemäss nach Gl. (25) und (24) der Uhrfehler

$$s_u = 4^h\,42^m\ 3^s{,}12 + 5^m\ 1^s{,}27 - 12^h = -\mathbf{7^h\,12^m\,55^s{,}61}$$

$$s_o = 4\ 41\ 50{,}56 + 5\ 11{,}82 - 12 = -\mathbf{7\ 12\ 57{,}62}.$$

Hiernach wären wir nun sofort auch im Stande, den Gang des Chronometers zu bestimmen und würde dieser gleich

$$g = 2.(s_o - s_u) = -2.2^s{,}01 = -4^s{,}02$$

sein, womit gesagt wäre, dass das Chronometer, welches den, mit Hilfe des Passageinstrumentes im August gemachten, Zeitbestimmungen gemäss um $1^s{,}87$ vorgieng, einen Monat später dieses Vorlaufen verloren habe und sogar um $4^s{,}02$ nachgieng, d. h. im Ganzen innerhalb der kurzen Frist eines Monats seinen Gang um etwa 6 Secunden geändert habe, welches der erprobten Güte des Chronometers widersprach und muss dieser Widerspruch seine Erklärung finden. Betrachten wir zu dem Ende zunächst die Beobachtungszeiten und die hieraus abgeleiteten einzelnen Zeiten der unverbesserten Mitternacht und des unverbesserten Mittags auf S. 410 genauer, so werden wir sofort erkennen, wie die ersteren Zeiten fortwährend im Abnehmen begriffen sind und zwischen $4^h\,43^m\,8^s{,}5$ und $4^h\,42^m\,59^s$ liegend im Maximum um $9^s{,}5$ differiren, während sich diese continuirliche Abnahme bei den Mittagswerthen nicht zeigt und ausserdem bei den letzteren nur eine Maximaldifferenz von $2^s{,}0$ vorkommt. Dieser Umstand beweist, dass die Beobachtung am Mittage des 15. September eine nicht ganz tadellose war und lag der Grund wohl darin, dass bei ihr die Nivellirung des künstlichen Horizonts nicht vor jeder einzelnen Höhenmessung wiederholt vorgenommen wurde (was ausserdem nachher geschah), und die Sonne so durch ihre Wärme eine andauernde kleine Veränderung im Stande des Horizonts veranlasste. Man wird daher auf die Zahlen des unverbesserten Mittags oder der unverbesserten Mitternacht zu achten haben, um aus ihnen schon zu erkennen, ob die Beobachtungen insbesondere für eine genaue Bestimmung des Gangs einer Uhr brauchbar sind, und um in dieser Beziehung den Einfluss kleiner Abweichungen kennen zu lernen, empfehlen wir die Berechnung des Standes und Gangs aus den Beobachtungen 2, 3 und 6. Diese drei Beobachtungen liefern für die unverbesserte Zeit

der Mitternacht	des Mittags
$4^h\ 42^m\ 57^s,5$	$4^h\ 41^m\ 32^s,5$
57 ,5	31 ,0
58 ,0	32 ,5
56 ,0	32 ,0

und sind diese Werthe beide hinreichend genau. Führt man nun die Rechnung in allen Stücken ebenso durch wie im Vorausgehenden nach den Beobachtungen 1, 2 und 5 geschah, so erhält man

$$s_u = -7^h\ 12^m\ 56^s,17$$
$$s_o = -7\ \ 12\ \ 56\ ,09$$

woraus ein

$$g = +0^s,08$$

folgt, welches wenigstens schon das Voreilen des Chronometers anzeigt, wenn auch der genauere Werth des Ganges hiermit noch nicht bezeichnet ist. Man erkennt hieraus aber jedenfalls, dass die Bestimmung des Gangs einer Uhr, die wenig veränderlich ist, nach einer Mitternachtsbestimmung und der hierauf folgenden Mittagsbestimmung oder umgekehrt überhaupt unstatthaft ist, weil eben ganz geringe Fehler in der Bestimmung von s den Werth des Gangs wesentlich modificiren, welche Fehler aber um so weniger von Einfluss sind, je weiter die zweite Beobachtung von der ersten entfernt liegt. Denn nehmen wir z. B. an, dieser Fehler der Zeitbestimmung für s betrage $\pm 1^s$, so würde bei einer Uhr, die täglich 3 Sec. vorgeht, wenn man s_u und das darauf folgende s_o bestimmt, das richtige $s_u' = s_u \pm 1^s$ und das richtige $s_o' = (s_u \pm 1^s) + \frac{3}{2}^s$ d. h.

$$g = \tfrac{3}{2}^s \pm 1^s \mp 1^s$$

sein können, wobei, wenn wir die + Zeichen combiniren, $g = +3^s,5$, wenn wir die Minuszeichen combiniren, $g = +0^s,5$, und wenn wir ein + mit einem — combiniren, $g = 1^s,5$ resultirte. Wären aber z. B. zwischen der ersten und zweiten Beobachtung 10 Tage gelegen, so wäre der Anfangsstand mit s_a, der zweite mit s_e bezeichnet $s_a' = s_a \pm 1^s$, $s_e' = s_a' \pm 1^s + 10 . 3^s$ und würde, wenn wir die + Zeichen verbänden

$$g = \frac{3 . 10 + 2}{10} = 3^s,2$$

wenn wir die — Zeichen nehmen

$$g = \frac{30 - 2}{10} = 2,8$$

zum Vorschein kommen, so dass die Unterschiede schon weit geringer sind. Noch geringer würde der Einfluss dieser Beobachtungsfehler sein, wenn zwischen der ersten und zweiten Beobachtung 20 Tage lägen, denn in den zuletzt betrachteten Fällen würde g einmal gleich $g = \frac{60 + 2}{20} = 3,1$ das anderemal $g = 2,9$ sein.

Kapitel X.

Die Zeitbestimmung durch Messen einer absoluten Höhe; die Eble'sche Zeitbestimmungsmethode.

§. 85. Unser Dreieck Zenith, Pol, Stern gestattet, den Stundenwinkel t in verschiedener Weise zu berechnen, falls andere Grössen aus den Ephemeriden gefunden werden können oder aus Beobachtungen genau bekannt sind; insbesondere zeigt die erste der Gleichungen (2) S. 368, dass t sich berechnen lässt, wenn φ und δ uns bekannt sind, und h durch Beobachtung gefunden werden kann. Hierzu bedient man sich entweder eines Theodolithen, dessen Höhenkreis und ganze Einrichtung gestattet, genaue Winkel zu messen, oder des schon so vortheilhaft bekannten Sextanten, bei dessen Anwendung wir uns aber jetzt einer näheren Betrachtung seiner Einrichtung und seiner Fehler nicht entschlagen dürfen, denn es handelt sich jetzt um eine

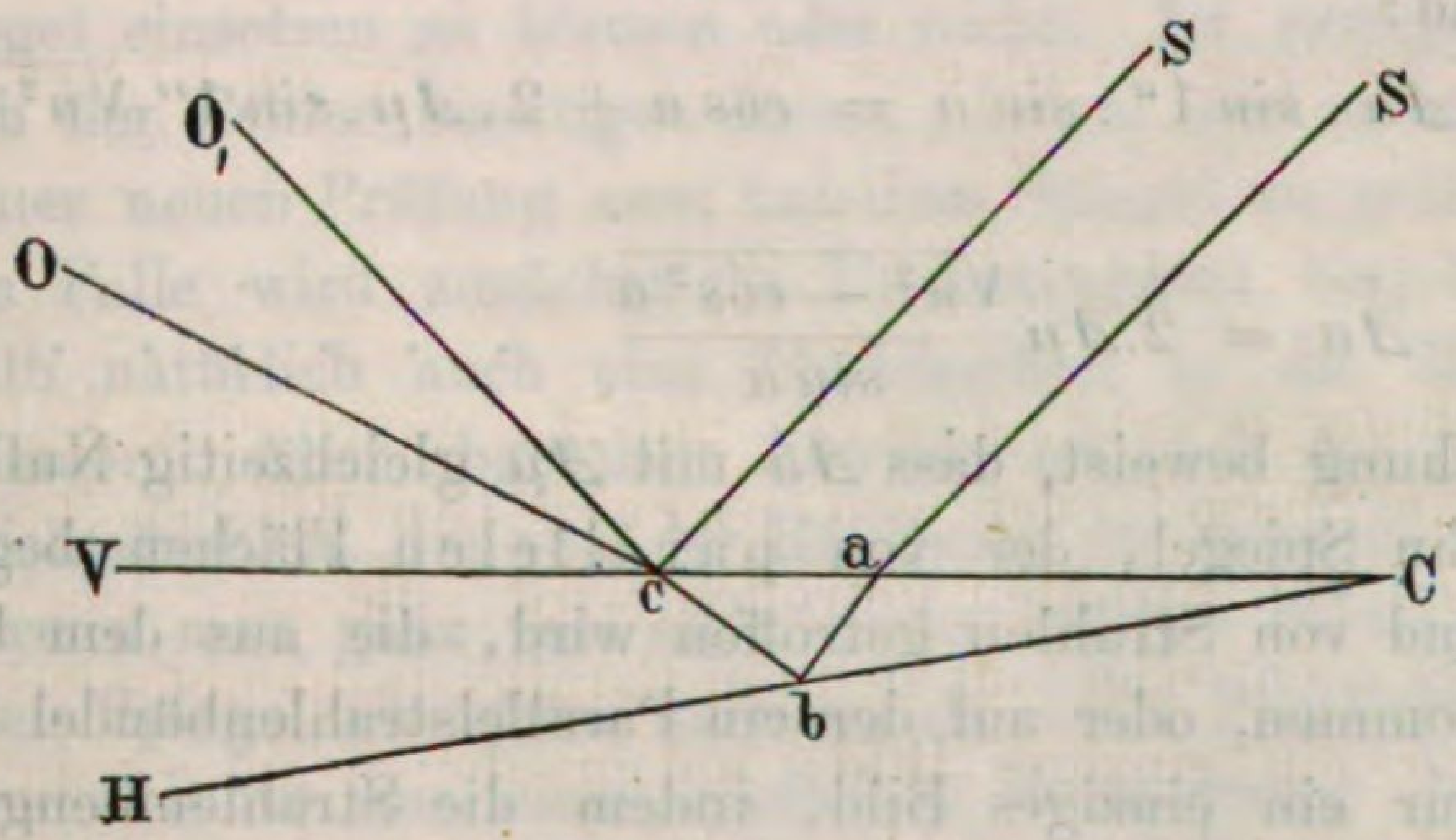
genaue Messung einer absoluten Höhe.

Der Sextant wird sowohl zu terrestrischen Messungen wie zur Beobachtung von Himmelskörpern insbesondere der Sonne, des Monds und der Fixsterne benutzt, und da unser jetziger Gebrauch auf diese letzteren Beobachtungen beschränkt bleibt, so können wir bei der näheren Betrachtung dieses Instrumentes alles das bei Seite setzen, was eine terrestrische Beobachtung besonders zu untersuchen noch nöthig macht. Dem entsprechend sehen wir die Gegenstände, welche ihr Licht auf den Körper des Sextanten werfen, als unendlich weit an, welchen Entfernungen gegenüber, die Dimensionen des Instruments und ebenso die Entfernung unseres Auges vom Centrum des Instruments gleich Null zu setzen sind. Wir haben es daher nur mit Richtungen von lauter Parallelstrahlenbündeln zu thun, dürfen unser Auge in einen beliebigen Punkt des Instruments versetzen und ebenso auch einzelne Theile des letzteren parallel mit sich selbst innerhalb seiner Grenzen transponiren, wohin wir wollen. Bevor wir aber eine solche Transponirung vor-

nehmen, stellen wir eine etwas genauere Betrachtung über die Bilder ebener Spiegel an.

Werden zu dem Sextanten Metallspiegel verwandt, die nur eine spiegelnde Fläche besitzen, so hat man es von vornherein bei jedem der beiden Spiegel nur mit einem einzigen Bilde zu thun; so aber wohl meistens Glasspiegel benutzt werden und diese auf der Vorder- und Hinterfläche spiegeln, so fragt es sich, ob und unter welchen Umständen mehrfache Bilder entstehen, die dann jedenfalls eine scharfe Beobachtung beeinträchtigen können. Wenn wir die Spiegel nur von ebenen Flächen begrenzt zulassen, können entweder Parallel- oder prismatische Spiegel in Betracht kommen; insofern aber der prismatische Spiegel, falls der Winkel, unter welchem die Vorder- und Hinterfläche gegen einander geneigt sind, gleich Null wird, in einen Parallelspiegel übergeht, so brauchen wir nur den ersteren einer Betrachtung zu unterwerfen und bedeuten in Fig. 83 VC und HC die

Fig. 83.



beiden Grenzflächen, oder vielmehr die Durchschnitte der Reflexions- und Brechungsebene des Papiers mit den hierzu senkrechten Spiegelflächen. Ein Strahl Sa wird im Glase nach b hin gebrochen, von hier in der Richtung nach c reflectirt und geht schliesslich etwa in der Richtung cO weiter. Da aber in c von demselben Punkte S ein zweiter Strahl $Sc \parallel Sa$ auf VC fallend angenommen werden kann, so wird von diesem ein Theil in der Richtung cO, reflectirt und leuchtet ein, dass

> „bei einem prismatischen Spiegel ein auffallendes Parallel-
> „bündel von den beiden Grenzflächen in zwei verschieden ge-
> „richtete Strahlenbündel verwandelt wird, demgemäss von
> „jedem Gegenstande zwei Bilder entstehen.“

Die Winkelentfernung dieser Bilder ist gleich $\measuredangle\, OcO, = \Delta a$ und lässt sich diese leicht in ihrer Abhängigkeit vom Winkel $SaC = ScC = O,cV = a$ und dem Winkel $VCH = \Delta\mu$ berechnen. Es ist nämlich (wenn wir, um die Einfallslothe nicht zeichnen zu müssen, den

Brechungsindex als den Quotienten aus den *Cosinus* der Winkel, den der Lichtstrahl mit der Spiegel fläche bildet, auffassen)

$$\frac{\cos(OcV)}{\cos(bcC)} = n;$$

ferner

$$\sphericalangle bcC = \sphericalangle cbH - \Delta\mu$$
$$\sphericalangle cbH = \sphericalangle abC = \sphericalangle Vab - \Delta\mu$$

mithin

$$\sphericalangle \mathrm{bc}C = \sphericalangle Vab - 2.\Delta\mu$$

mithin da auch

$$\frac{\cos a}{\cos(Vab)} = n;\ \cos(Vab) = \frac{\cos a}{n};\ \sin(Vab) = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 a}{n^2}}$$

$$\cos(OcV) = n\left[\frac{\cos a}{n}.\cos 2.\Delta\mu + \left(\sqrt{1 - \frac{\cos^2 a}{n^2}}\right)\sin 2.\Delta\mu\right]$$

oder da $OcV = a - \Delta a$ ist und Δa wie μ jedenfalls nur ganz kleine Winkel sind:

$$\cos a + \Delta a.\sin 1''.\sin a = \cos a + 2.\Delta\mu.\sin 1''\sqrt{n^2 - \cos^2 a}$$

d. h.

$$\Delta a = 2.\Delta\mu\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 a}}{\sin a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung beweist, dass Δa mit $\Delta\mu$ gleichzeitig Null wird, d. h.

„Ein Spiegel, der von parallelen Flächen begrenzt wird „und von Strahlen getroffen wird, die aus dem Unendlichen „kommen, oder auf den ein Parallelstrahlenbündel fällt, liefert „nur ein einziges Bild, indem die Strahlenmengen cO, mit „cO coincidiren, und ist es bei einem solchen Spiegel einerlei, „ob man einen Metallspiegel oder einen Glas-„spiegel benutzt."

Da $n > 1$ ist, so kann, wenn $\Delta\mu$ nicht gleich Null ist, der Zähler des Bruchs in (1) niemals Null werden und ergiebt sich hieraus, dass

„ein prismatischer Spiegel, selbst unter der Voraus-„setzung: die Strahlen kämen aus dem Unendlichen, stets „doppelte Bilder erzeugt, die um so weiter auseinander liegen, „je schiefer die Strahlen einfallen und je grösser die Neigung „der beiden Grenzflächen gegen einander ist."

Es ist daher selbstverständlich, dass bei einem Sextanten prismatische Spiegel zu verwerfen sind und giebt das Vorausgehende zugleich einen Fingerzeig, wie man eine

Prüfung

auf den Parallelismus der Spiegel-Grenzflächen

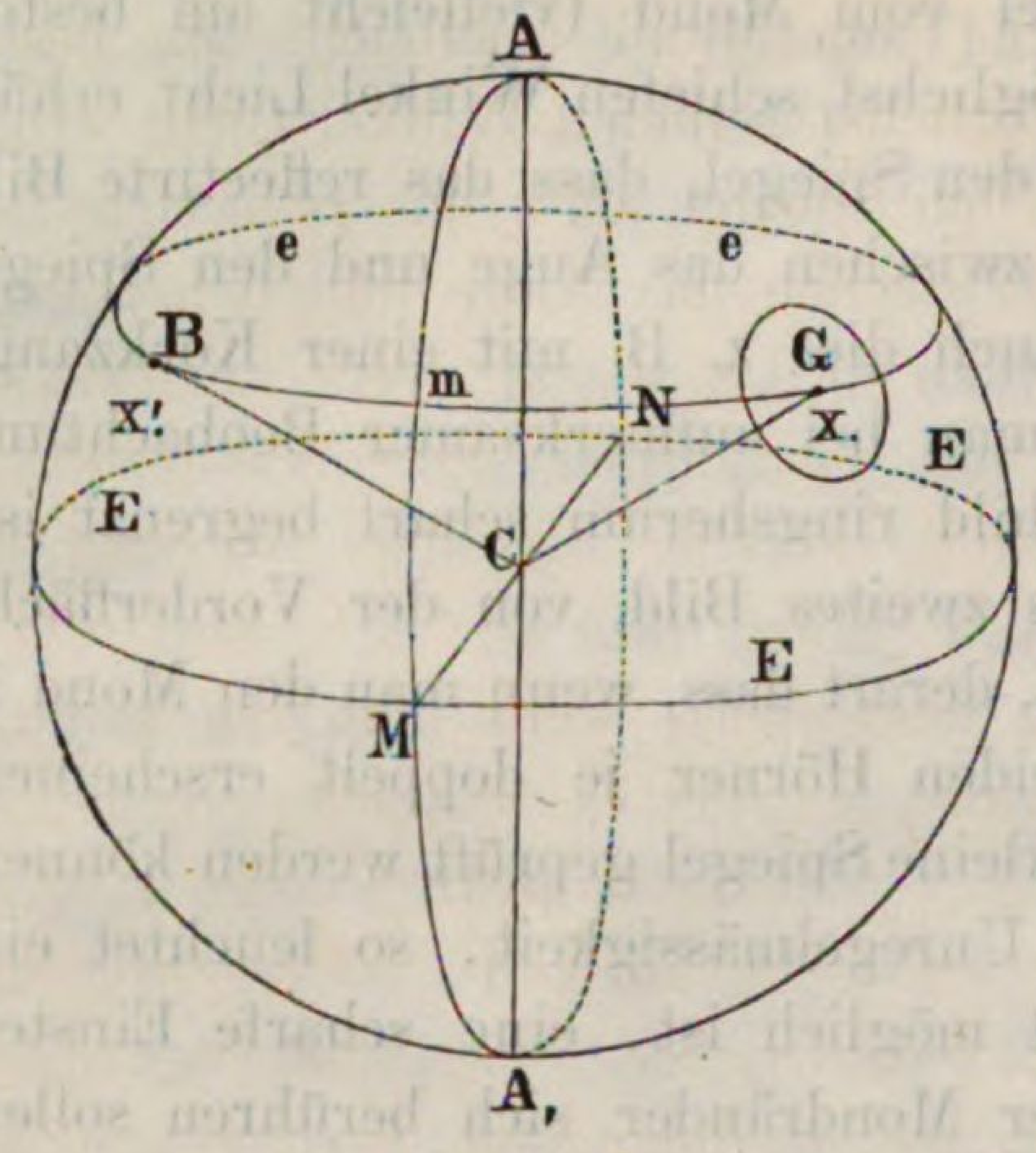
vornehmen kann. Zu dem Ende schraube man nämlich das Fernrohr

ab, befestige den Sextanten an einem Stative in verticaler Lage so, dass zunächst der grosse Spiegel vom Mond (vielleicht am besten in der Sichelform) unter einem möglichst schiefen Winkel Licht erhält und richte das Auge dann so auf den Spiegel, dass das reflectirte Bild sichtbar wird. Bringt man nun zwischen das Auge und den Spiegel wieder das Fernrohr, und stellt auch dies z. B. mit einer Korkzange in gehöriger Lage fest, so wird man bei aufmerksamer Beobachtung entscheiden können, ob das Mondbild ringsherum scharf begrenzt ist, oder ob sich noch ein schwächeres zweites Bild, von der Vorderfläche des Spiegels erzeugt, darüber lagert, derart dass, wenn man den Mond in der Sichelform beobachtet, die beiden Hörner je doppelt erscheinen. In derselben Weise wird auch der kleine Spiegel geprüft werden können. Zeigte sich nun eine entschiedene Unregelmässigkeit, so leuchtet ein, dass mit solchen Spiegeln es nicht möglich ist, eine scharfe Einstellung, wobei z. B. die Sonnen- oder Mondränder sich berühren sollen, herbeizuführen und fragt es sich alsdann, ob man in der Lage ist, andere Spiegel einsetzen zu können oder nicht. Ist ersteres der Fall, so wird sich der Fehler beseitigen lassen, indem man eben nach vorausgegangener neuen Prüfung zwei tadellose Spiegel zu erlangen sucht. Im anderen Falle wird zunächst die Undeutlichkeit bestehen bleiben und desshalb natürlich auch eine Unsicherheit in die Messung der Winkel kommen. Aber abgesehen hiervon ist auch der geometrische Lauf der Lichtstrahlen, die von der Rückseite des Spiegels allein kommen, also wenn man ganz vom schwächeren zweiten Bild absieht, beim prismatischen Spiegel ein etwas anderer, als beim Parallelspiegel, wie man ja ohne weiteres aus einer einfachen Betrachtung des optischen Zusammenhangs erkennen kann.

§. 86. Die Richtigkeit der beiden Spiegel soweit zugegeben, nehmen wir zur Vereinfachung des ganzen Apparates an, dass e r s t e n s der kleinere Spiegel parallel mit sich selbst bis zur Drehungsaxe *AA*, des grossen Spiegels verlegt worden sei; z w e i t e n s dass das Auge in einem Punkte *C* dieser Drehungsaxe *AA*, sich befinde, um zunächst in einer beliebigen Richtung durch die obere unbelegte Hälfte des kleinen Spiegels hindurch einen entfernten Gegenstand *G* sehen zu können; d r i t t e n s dass die Ebene *EE* des Limbus, also die Sextantenebene auch durch *C* laufe und senkrecht auf beiden Spiegelflächen stehe. Beschreiben wir dann um *C* eine Kugel, die zugleich durch *G* lauft, so wird diese von der Spiegelfläche des grossen und kleinen Spiegels, sowie von der Ebene *EE* in drei grössten Kreisen *S*, *s* und *E* durchschnitten, von denen, wenn die Spiegel des Sextanten in Wirklichkeit parallel stehen, *S* mit *s* zusammenfällt.

Nehmen wir zunächst in Fig. 84 eine solche P a r a l l e l s t e l-

Fig. 84.



lung an, so repräsentirt die Ebene *A,MAN* gleich der Ebene *S* oder *s* die beiden Spiegelflächen und denken wir, dass das Auge in der Richtung *CG* sähe, so würde der Gegenstand *G* sein „e r s t e s" Bild im grossen Spiegel, der in der Figur von *A,MAN* nach rechts hin reflectiren soll, in einem Punkte *B* erhalten, dessen Ort auf verschiedene Art gefunden werden kann, z. B. so, dass man um *A* einen Parallelkreis *ee* zur Limbusebene *E* beschreibt, der zugleich durch *G* lauft und auf diesem den Bogen *Bm* = *Gm* macht. Betrachtet man nun das Bild *B* wiederum als einen neuen Gegenstand, der nach einer zweiten Reflexion ein zweites Bild im kleinen Spiegel liefern soll, so müsste dieselbe Construction mittelst des Parallelkreises *ee* ausgeführt werden, und überzeugt man sich sofort, dass dieses „z w e i t e" Bild von *G* mit *G* selbst wieder zusammenfällt, wonach sich ergiebt der

1. Satz: „dass bei p a r a l l e l e n Spiegeln, das Auge mag allein oder „mit dem Fernrohr bewaffnet e i n e n b e l i e b i g e n P u n k t „fixiren, das „zweite" Bild stets mit diesem Punkte wieder „zusammen fällt, und dass wenn umgekehrt diese Coincidenz „von einem Punkte und seinem zweiten Bilde stattfindet, „auch die Coincidenz (Parallelismus) der Spiegelebenen besteht."

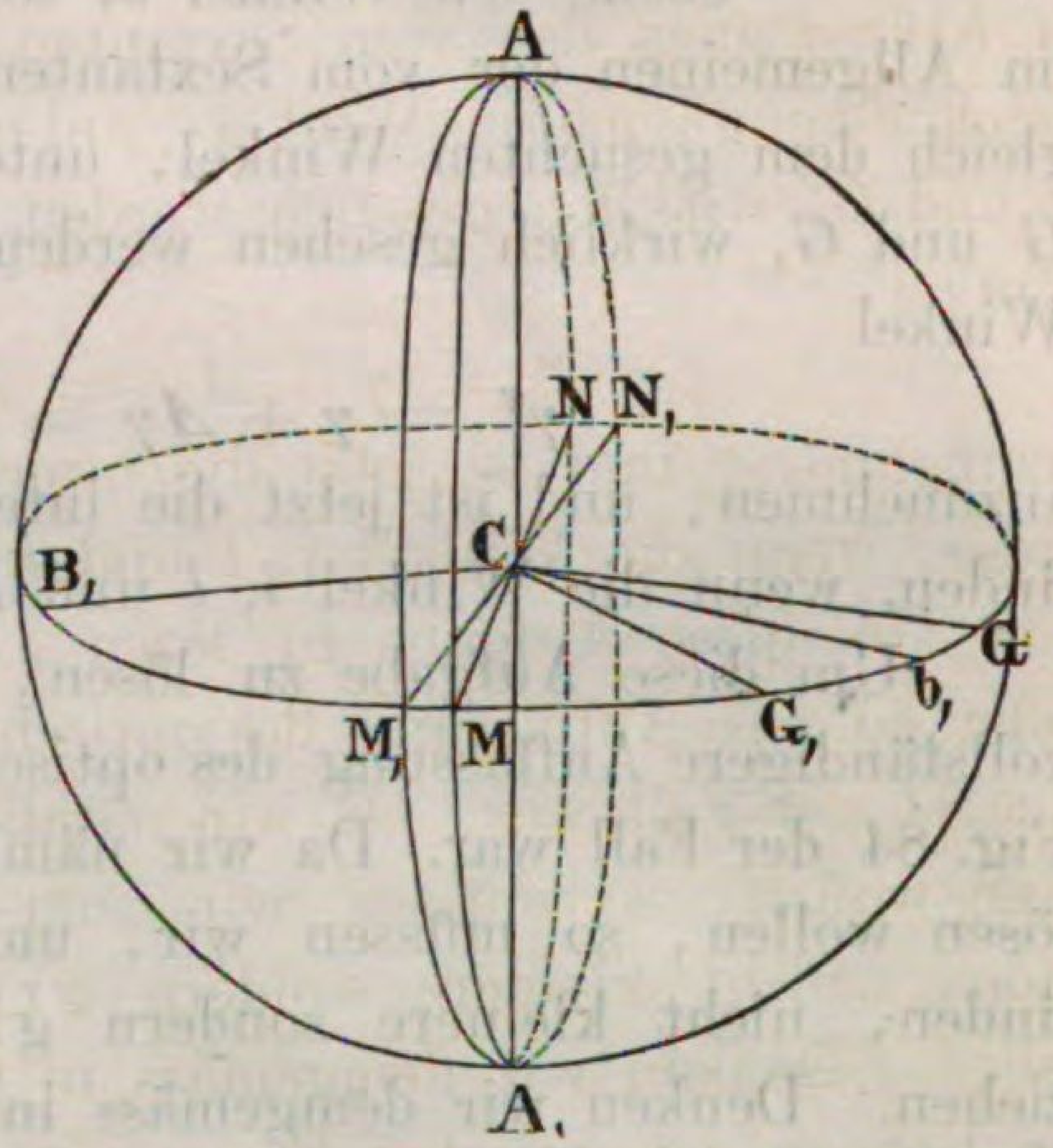
In der Figur ist um *G* ein kleiner Kreis gezogen, der das Feld bezeichnen möge, welches vom Auge, insbesondere wenn es mit einem Fernrohr bewaffnet ist, überschaut werden kann. Nehmen wir dann in diesem Gesichtsfelde einen beliebigen Punkt x an, so können wir durch eine ganz analoge Construction wie vorhin bei *G* das Bild x' von x finden und überzeugen uns sofort, dass das zweite Bild von x wiederum mit x zusammenfällt. Hieraus ergiebt sich aber der wichtige

2. Satz: „dass wenn die Spiegelebenen p a r a l l e l liegen (coincidiren), „das g e s a m m t e G e s i c h t s f e l d und sein zweites Bild „Punkt für Punkt coincidiren und umgekehrt: dass wenn wir „die Grenzen eines ausgedehnten Gegenstandes (Thurm, „Sonnen-Mondscheibe) zur allseitigen Coincidenz mit seinem „zweiten Bilde gebracht haben, auch der Parallelismus der „Spiegel erreicht ist."

Diese beiden oder auch der erste Satz schon allein involviren aber auch die Richtigkeit eines

3. Satzes: „dass wenn bei parallelen Spiegeln durch die obere „Hälfte des kleinen Spiegels ein Punkt oder Gegenstand G „fixirt wird, kein zweiter Punkt oder Gegenstand $G,$ „neben G existirt, dessen zweites Bild $b,$ mit G in Coin- „cidenz erblickt werden könnte.“

Fig. 85.



Letzteres wird aber möglich, wenn wir den grossen Spiegel um seine Axe $AA,$ drehen und möge der Zusammenhang unter der Voraussetzung, dass die Sehrichtung oder Collimationslinie CG in die Ebene E falle und die Spiegel senkrecht auf E stehen, erläutert werden. Lassen wir demgemäss Fig. 85 eine Drehung des grossen Spiegels um den Winkel

$$MCM, = \alpha$$

eintreten, so wird für einen Gegenstand $G,$, der sein erstes Bild in $B,$ und sein zweites in $b,$ hat, für den beweglichen Spiegel die Gleichung

$$\sphericalangle B,CM, = \alpha + \sphericalangle MCG,$$

für den festen die Gleichung

$$\sphericalangle B,CM, + \alpha = \sphericalangle MCG, + \sphericalangle G,Cb,$$

bestehen, woraus

$$2\alpha = \sphericalangle G,Cb, = \sphericalangle G,CG - \sphericalangle b,CG$$

sich ergiebt und woraus ferner, wenn die Bedingung, dass $b,$ mit G in Coincidenz erblickt werde, erfüllt sein soll, die Bedingungsgleichung

$$b,cG = 0$$

oder

$$2\alpha = \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

resultirt, falls wir den Winkel, unter dem $G,$ gegen G erscheint, durch γ bezeichnen, ein Satz, der als Fundamentalsatz in der ganzen Theorie und Praxis einer Winkelmessung mit dem Sextanten auch in jedem Lehrbuche der Physik vorgetragen wird.

§. 87. Dieser einfache Zusammenhang zwischen α und γ besteht aber nur so lange, als die angegebenen Vorbedingungen bezüglich der Lage der Collimationslinie und der Stellung der Spiegel erfüllt sind. Fällt dagegen

Erstens die Collimationslinie nicht in die Ebene E des Sextanten (oder lauft sie damit nicht parallel), ist sie vielmehr gegen dieselbe um den Winkel i geneigt, steht

Zweitens der grosse (bewegliche) Spiegel nicht senkrecht auf der Limbusebene (identisch mit unserer Ebene E), d. h. bildet seine Normale mit der Limbusebene den Winkel l, ebenso

Drittens die Normale des kleinen festen Spiegels mit der Limbusebene den Winkel k, so ist

im Allgemeinen der vom Sextanten angezeigte Winkel $2\alpha = \gamma$ nicht gleich dem gesuchten Winkel, unter welchem die beiden Gegenstände G und $G_{,}$ wirklich gesehen werden, sondern anstatt 2α oder γ ist ein Winkel

$$\gamma^* = \gamma + \Delta\gamma = 2\alpha + \Delta\gamma \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

anzunehmen, und ist jetzt die interessante Aufgabe zu lösen, $\Delta\gamma$ zu finden, wenn die Winkel i, l und k gegeben sind.

Um diese Aufgabe zu lösen, empfiehlt sich vorher eine etwas vollständigere Auffassung des optischen Zusammenhangs, als es mit der Fig. 84 der Fall war. Da wir nämlich unsere Aufgabe trigonometrisch lösen wollen, so müssen wir, um den Ort der Bilder $B_{,}$ und $b_{,}$ zu finden, nicht kleinere sondern grösste Kreise auf unserer Kugel ziehen. Denken wir demgemäss in C die zwei Normalen N und n auf den Ebenen der grössten Kreise S und s, welche die Spiegelebenen repräsentiren, errichtet, so schneidet jede dieser Normalen die um C beschriebene Kugel in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten P und P', p und p' durch, welche Punkte als die „Pole" der grössten Kreise S und s zu betrachten sind. Stellen hierbei P und p die nach der spiegelnden Seite von S und s gelegenen Pole vor, so mögen sie die „reellen Pole" heissen im Gegensatze zu den Polen P' und p', die auf der Rückseite der Spiegelflächen zu denken sind und die „imaginären Pole" heissen mögen.

Um die Lage des „ersten" Bildes $B_{,}$ des zweiten Gegenstandes $G_{,}$ zu finden, legen wir nun weiter durch N einen grössten Kreis R, der zugleich durch den Punkt $G_{,}$ geht; dieser grösste Kreis durchschneidet den Kreis S in zwei diametral gegenüber liegenden Punkten und nennen wir einen hiervon D, so ist der Ort $B_{,}$ gefunden, wenn wir den Bogen $G_{,}D$ über D hinaus auf dem Kreise R abtragen. Da nun $B_{,}$ für den kleinen Spiegel den neuen Gegenstand abgiebt, so legen wir weiter auch durch $B_{,}$ und die Normale n einen grössten Kreis, der den grössten Kreis s in zwei Punkten d durchschneidet, und ist auch der Ort des Bildes $b_{,}$ gefunden, wenn wir auf r den Bogen $B_{,}d$ über d hinaus abtragen. Für den Fall, dass im Gesichtsfelde eine Coinci-

denz des direct gesehenen Gegenstandes G und des zweiten Bildes b, vom zweiten Gegenstande $G,$ stattfinden soll, muss dann in der Figur der auf die angegebene Weise bestimmte Punkt $b,$ mit G zusammenfallen. Diese Betrachtung stützt sich auf die Richtigkeit des Satzes, wonach das von einem ebenen Spiegel gelieferte imaginäre Bild ebenso weit hinter dem Spiegel wie der leuchtende Gegenstand davor zu liegen scheint. Man kann aber auch das Reflexionsgesetz, wonach der ankommende und der reflectirte Strahl mit der Spiegel-Normale gleichen Winkel bilden muss, direct beachten, und gelangt dann zu folgenden Schlüssen und Constructionen. Angenommen, es solle $b,$ mit G in Coincidenz erblickt werden, so muss

Fig. 86.

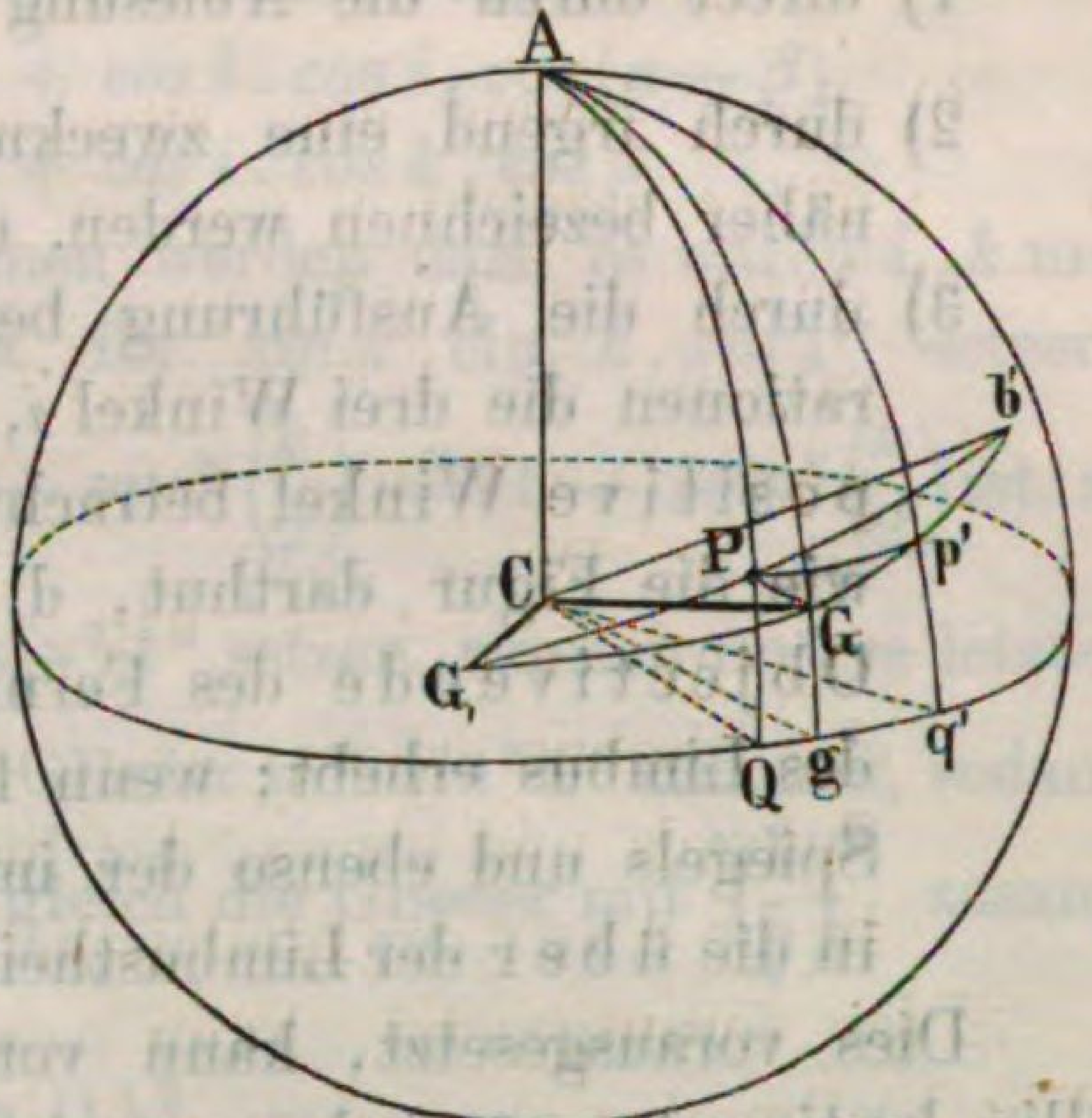


Fig. 86 dem in der Richtung CG direct durch die obere Hälfte des kleinen Spiegels sehenden Beobachter in der umgekehrten Richtung von G nach C hin Licht von $b,$ entgegen kommen; soll aber in dieser Richtung G nach C hin Licht von der unteren Hälfte des kleinen Spiegels reflectirt werden, so muss das auf diese untere Hälfte auffallende Licht nach einem Punkte b' gerichtet sein, der mit G auf dem grössten Kreise r und zwar so liegt, dass der Bogen Gp' dieses Kreises r gleich $p'b'$ wird und wobei p' der imaginäre Pol von s ist; soll aber endlich in der Richtung C nach b' hin bei der Reflexion vom grossen Spiegel Licht ausgehen, so muss dies von einem Punkte $G,$ kommen, der in einer Richtung G,C direct auf diesen Spiegel Licht so entsendet, dass dieser Punkt $G,$ mit b' auf dem grössten Kreise R liegt und der Bogen G,P dieses Kreises R gleich $b'P$ ist, wobei P im Gegensatze zu dem eben bezeichneten Pole p' der reelle Pol von S ist.

Legen wir ausserdem noch durch die Drehungsaxe CA des grossen Spiegels drei grösste Kreise, die einzeln durch P, G und p' laufen, so stehen diese auf der Limbusebene senkrecht und ist

Bogen $(PQ) = l =$ der Neigung der reellen Hälfte der Normale N gegen die Limbusebene E oder auch gleich der Abweichung der Spiegelfläche S von der verticalen Lage;

Bogen $(p'q') = k =$ der Neigung der imaginären Hälfte der Normale n gegen E;

„ $(Gg) = i =$ der Neigung der Collimationslinie gegen E;

Winkel $(GCG_,) = \gamma^* =$ dem Winkel unter dem $G_,$ gegen G wirklich erscheint;

„ $(QAq') = (QCq') = \alpha =$ dem Drehungswinkel der Spiegel, wie er unmittelbar vom Nonius angegeben wird.

„ $(gAq') = (gCq') = \beta =$ dem Winkel, unter dem sehr nahe die Collimationslinie CG von der Normale n des kleinen Spiegels abweicht.

Zur Lösung unserer Aufgabe ist uns demnach gegeben

1) direct durch die Ablesung der Winkel α oder $\frac{\gamma}{2}$;

2) durch irgend eine zweckmässige Messung, die wir hernach näher bezeichnen werden, direct auch der Winkel β;

3) durch die Ausführung bestimmter noch anzugebender Operationen die drei Winkel i, l und k, und wollen wir diese als positive Winkel betrachten, wenn G, P und p' so liegen, wie die Figur darthut, d. h. wenn die Collimationslinie am Objectivende des Fernrohrs sich über die getheilte Seite des Limbus erhebt; wenn ferner der reelle Pol P des grossen Spiegels und ebenso der imaginäre Pol p' des kleinen Spiegels in die über der Limbustheilung gelegene Hälfte der Kugel fällt.

Dies vorausgesetzt, kann vor allem das Dreieck PGp' als ein völlig bestimmtes angesehen werden. Bezeichnen wir ferner die Seite

$$(PG_,) = (Pb') \text{ mit } x$$

$$\sphericalangle (Gb'G_,) \quad \text{„} \quad Z$$

so ist im Dreieck $Gb'G_,$, da die Seite $(Gb') = 2(p'G)$

$$\cos (GG_,) = \cos \gamma^* = \cos 2(p'G) . \cos 2x + \sin 2(p'G) . \sin 2x . \cos Z;$$

ferner im Dreieck $Gb'P$

$$\cos (PG) = \cos 2 (p'G) . \cos x + \sin 2(p'G) . \sin x . \cos Z$$

und im Dreieck $Pb'p'$ worin $p'b' = p'G$

$$\cos (Pp') = \cos (p'G) . \cos x + \sin (p'G) . \sin x . \cos Z$$

mithin

$$\frac{\cos \gamma^* \quad - \cos 2(p'G) . \cos 2x}{\cos (PG) - \cos 2(p'G) . \cos x} = 2 \cos x$$

und

$$\frac{\cos (PG) - \cos 2(p'G) . \cos x}{\cos (Pp') - \cos (p'G) . \cos x} = 2 \cos (p'G)$$

d. h. nach gehöriger Reduction und unter der Voraussetzung, dass nur die Cosinus der einfachen Winkel x und $(p'G)$ schliesslich vorkommen sollen, statt der letzten beiden Gleichungen nunmehr:

$$\cos \gamma^* = 2 \cos (PG) . \cos x - 2 \cos^2 (p'G) + 1$$

$$\cos (PG) = 2 \cos (Pp') \cos (p'G) - \cos x$$

oder nach Wegschaffung von $\cos x$

$$\cos \gamma^* = 4\cos(Pp').\cos(PG).\cos(p'G) - 2\cos^2(PG) - 2\cos^2(p'G) + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

womit die Aufgabe eigentlich gelöst ist. Denn da das Dreieck PGp' als bestimmt vorausgesetzt wird, mithin auch die Seiten (Pp'), (PG), $(p'G)$ dieses Dreiecks bekannt sind, so steht rechts in der Gl. (4) keine Unbekannte mehr. Wir suchen jedoch eine weitere Entwickelung vorzunehmen.

Da nämlich in den Dreiecken: PAp', PAG, $p'AG$ entsprechend:

$$\cos(Pp') = \sin l.\sin k + \cos l.\cos k.\cos\alpha$$
$$\cos(PG) = \sin l.\sin i + \cos l.\cos i.\cos(\alpha-\beta)$$
$$\cos(p'G) = \sin i.\sin k + \cos i.\cos k.\cos\beta$$

ist, so können wir, wenn angenommen werden darf, es wären i, k und l überhaupt kleine Winkel, z. B. für $\sin k$ ein $k.\sin 1''$ setzen; da ferner z. B. $\cos k = \cos^2\left(\frac{k}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)$ ist, so dürfen wir für $\cos k$ auch $1 - \frac{k^2}{2}.\sin^2 1''$ setzen, wonach unsere letzten drei Gleichungen, falls wir blos noch Glieder mit $\sin^2 1''$ zulassen, sodann einfach für $\sin 1''$ ein $\frac{1}{\varrho}$ setzen und gleich die Glieder mit $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ zusammenfassen, nunmehr zu

$$\left.\begin{aligned}
\cos(Pp') &= \left[l.k - \frac{l^2+k^2}{2}\cos\alpha\right]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos\alpha \\
&= A.\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos\alpha \\
\cos(PG) &= \left[l.i - \frac{l^2+i^2}{2}\cos(\alpha-\beta)\right]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos(\alpha-\beta) \\
&= B.\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos(\alpha-\beta) \\
\cos(p'G) &= \left[i.k - \frac{i^2+k^2}{2}\cos\beta\right]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos\beta \\
&= C.\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \cos\beta
\end{aligned}\right\} \quad . \; (5)$$

werden, wobei für die Ausdrücke in den eckigen Klammern nach dem zweiten Gleichheitszeichen einfach die Buchstaben A, B und C gesetzt wurden.

Bildet man jetzt mit Rücksicht auf die Zulässigkeit unserer Vereinfachungen die von der Gleichung (4) geforderten Summanden, so werden diese der Reihe nach gleich

$$\cos(Pp').\cos(PG).\cos(p'G) =$$
$$[A.\cos\beta.\cos(\alpha-\beta) + B.\cos\alpha.\cos\beta + C.\cos\alpha.\cos(\alpha-\beta)].\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$$
$$+ \cos\alpha.\cos\beta.\cos(\alpha-\beta)$$

$$cos^2(PG) = 2B \,.\, cos(\alpha - \beta) \,.\, \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + cos^2(\alpha - \beta)$$

$$cos^2(p'G) = 2C \,.\, cos\beta \,.\, \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + cos^2\beta$$

und demgemäss nach entsprechender Zusammenfassung unsere Gl. (4) zu

$$\begin{aligned} cos\,\gamma^* = 4\,\Big[A \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) + B\big(cos\alpha \,.\, cos\beta - cos(\alpha - \beta)\big) \\ + C\big(cos\alpha \,.\, cos(\alpha - \beta) - cos\beta\big)\Big]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 \\ + 2\,[2 \,.\, cos\alpha \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) - cos^2(\alpha - \beta) - cos^2\beta] + 1. \end{aligned}$$

Lassen wir i, k und l gleich Null werden, so verschwindet A, B und C und ist demgemäss, da dann auch $\gamma^* = \gamma = 2\alpha$ wird,

$$cos\,\gamma = cos\,2\alpha = 2[2 \,.\, cos\alpha \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) - cos^2(\alpha - \beta) - cos^2\beta] + 1,$$

woraus bei der Subtraction der beiden letzten Gleichungen sich

$$\begin{aligned} cos\,\gamma^* - cos\,\gamma = 4\Big[A \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) + B \,.\, \big(cos\alpha \,.\, cos\beta - cos(\alpha - \beta)\big) \\ + C\big(cos\alpha \,.\, cos(\alpha - \beta) - cos\beta\big)\Big]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} cos\,\gamma^* - cos\,\gamma = 4\big[A \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) - B \,.\, sin\alpha \,.\, sin\beta \\ - C \,.\, sin\alpha \,.\, sin(a - \beta)\big]\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (6) \end{aligned}$$

ergiebt. Da ferner nach Gl. (3) $cos\,\gamma^* = cos(\gamma + \varDelta\gamma) = cos(2\alpha + \varDelta\gamma)$ so erhält man statt der linken Seite der Gl. (6)

$$cos\,2\alpha \,.\, cos\,\varDelta\gamma - sin\,2\alpha \,.\, sin\,\varDelta\gamma - cos\,2\alpha$$

oder mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\varDelta\gamma$, falls $cos\,\varDelta\gamma = 1$ und $sin\,\varDelta\gamma = \varDelta\gamma \,.\, \left(\frac{1}{\varrho}\right)$ gesetzt wird, auch

$$-\varDelta\gamma\left(\frac{1}{\varrho}\right) sin\,2\alpha$$

so dass jetzt:

$$\begin{aligned} \varDelta\gamma = -\frac{4}{\varrho \,.\, sin\,2\alpha}\big[A \,.\, cos\beta \,.\, cos(\alpha - \beta) - B \,.\, sin\alpha \,.\, sin\beta \\ - C \,.\, sin\alpha \,.\, sin(\alpha - \beta)\big] \quad \ldots\ldots \quad (7) \end{aligned}$$

die gesuchte Gleichung ist, aus der die speciellen Werthe für $\varDelta\gamma$, je nachdem i, k und l bestimmte Werthe annehmen, abgeleitet werden können. Es kann aber

Erstens das Fernrohr allein eine fehlerhafte Lage haben, d. h.

$$k = l = 0$$

$$A = 0$$

$$B = -\frac{i^2}{2} cos(\alpha - \beta)$$

$$C = -\frac{i^2}{2} \,.\, cos\beta$$

sein. Führen wir diese Werthe in (7) ein, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$\Delta\gamma = -\frac{i^2}{\varrho}.\,tang\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

woraus man erkennt, dass in diesem Falle die Grösse β keinen Einfluss ausübt und dass ebenso das Vorzeichen von i ohne Einfluss ist.

Zweitens kann blos der grosse bewegliche Spiegel eine Neigung haben, demgemäss

$$i = k = 0$$

$$A = -\frac{l^2}{2}.\cos\alpha$$

$$B = -\frac{l^2}{2}.\cos(\alpha-\beta)$$

$$C = 0$$

ist und nach Einführung dieser Werthe sich ergiebt

$$\Delta\gamma = \frac{2l^2}{\varrho}.\frac{\cos(\alpha-\beta).\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Drittens könnte blos der kleine Spiegel geneigt sein. In diesem Falle erhält man

$$\Delta\gamma = \frac{2\,k^2.\cos\beta}{\varrho\,.\sin 2\alpha}\left[\cos(2\alpha-\beta)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Viertens könnte der Fall eintreten, dass die Spiegel zwar beide geneigt, aber doch mit einander parallel wären, dass mithin $k = l$ gesetzt werden müsste. Ist daneben noch ein i vorhanden, so wird

$$A = l^2\,(1-\cos\alpha)$$

$$B = i\,.\,l - \frac{i^2+l^2}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$C = i\,.\,l - \frac{i^2+l^2}{2}.\cos\beta$$

und schliesslich nach gehöriger Reduction:

$$\Delta\gamma = -2\,tang\frac{\alpha}{2}\left[l^2 + \frac{1}{\cos\alpha}\left(l\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right) - i\,.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\right]\frac{1}{\varrho} \;.\; (11)$$

Fünftens kann hierbei i auch gleich Null angenommen werden und wird dann

$$\Delta\gamma = -2l^2\,tg\frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\cos\alpha}\right]\frac{1}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

§. 88. Es entsteht aber nun die Frage: wie erfährt man, ob einer dieser Fehler i, k oder l vorhanden ist und auf welche Weise bestimmt man dessen numerischen Werth? Denn nur so erst

kann von den Formeln (7) bis (12) zur Berechnung von Δy Gebrauch gemacht werden. Was zunächst die

Neigung des Fernrohrs gegen die Ebene des Limbus betrifft, so ist es hierbei vor allem nöthig, die Fädendistanz des Fernrohrs zu bestimmen und kann dieses mittelst eines Winkelmessers ebenso geschehen, wie wir in §. 72 für die genaue Bestimmung der Fadenabstände beim Passageinstrument angaben. In unserem jetzigen Falle aber dürfen wir auch einfacher verfahren, indem wir in gehöriger Entfernung eine deutliche Marke herrichten, sodann durch Drehung des Oculars mit dem Fadenkreuze die beiden Fäden, deren Distanz bestimmt werden soll, möglichst senkrecht zur Ebene des Limbus stellen und nun zunächst die Alhidade so drehen, dass der direct gesehene Gegenstand G mit dem einen Verticalfaden, das zweite Bild $b_{,}$ desselben Gegenstandes aber mit dem anderen Faden sich in Coincidenz befindet. Liest man jetzt den Nonius ab, so ergiebt diese Ablesung a; verstellt man dann die Alhidade so, dass die Coincidenz von $b_{,}$ mit G und zwar an demselben Faden, mit dem G coincidirt, stattfindet, so liest man jetzt am Nonius a_0 ab, und ist der Sextant wie wohl immer derart eingetheilt, dass auf dem Limbus halbe Grade etc. als ganze notirt sind, so ist

$$f = a - a_0$$

die gesuchte Fädendistanz. Der eigentliche Grund hierfür ergiebt sich aus einer Betrachtung der Fig. 85. Denn nehmen wir bei ihr an, es sei $G_{,}$ ein direct durch die obere Hälfte des festen Spiegels gesehener Gegenstand, so wird, wenn $G_{,}M_{,} = M_{,}B_{,}$ ist, $B_{,}$ das Bild dieses direct gesehenen Gegenstands, vom beweglichen Spiegel $M_{,}AN_{,}$ erzeugt, vorstellen, das seinerseits durch Spiegelung in der unteren Hälfte des festen Spiegels MAN ein Bild $b_{,}$ liefert so, dass auch Bogen $B_{,}M = Mb_{,}$ ist. Dies vorausgesetzt bestehen die Gleichungen:

$$G_{,}M + MM_{,} = M_{,}B_{,}$$

$$G_{,}M + G_{,}b_{,} = M_{,}B_{,} + MM_{,}$$

d. h. nach geschehener Subtraction:

$$MM_{,} - G_{,}b_{,} = - MM_{,}$$

oder

$$MM_{,} = \tfrac{1}{2} \cdot G_{,}b_{,},$$

woraus sich ergiebt der

Satz: dass wenn man einen Gegenstand direct visirt und durch Drehen des beweglichen Spiegels aus der Nullstellung ein zweites Bild desselben Gegenstandes erzeugt, der direct gesehene Gegenstand und sein zweites Bild unter einem Winkel erscheinen, gleich dem doppelten Drehungswinkel der Spiegel. Ist demnach dieser letztere Winkel nicht zu gross, so wird der

Gegenstand und sein zweites Bild zu gleicher Zeit im Gesichtsfeld erscheinen; coincidiren dann ausserdem beide mit je einem Faden des Fernrohrs, so ist die betreffende Fädendistanz gleich dem Winkel, unter dem der Gegenstand und sein zweites Bild erscheinen, d. h. gleich dem doppelten Drehungswinkel der Spiegel.

Zwei solche Ablesungen a und a_0 an einem kleinen Baumannschen Sextanten, in welchen ein Fadenkreuz von vier sich rechtwinklig durchschneidenden Fäden eingezogen war und mit welchem man eine Blitzableiterstange der Elisabethkirche beobachtete, ergaben für das eine Paar dieser Fäden, die hernach in Betracht kommen werden, die Ablesungen $a = 1^0\,24'\,0''$ und $a_0 = -0^0\,7'\,20''$, so dass

$$f = 1^0\,31'\,20'' = 5480''$$

ist. Hat der Sextant eine hinreichend grosse „Uebertheilung", d. h. geht die Theilung des Limbus entsprechend über Null der Haupttheilung entgegen noch hinaus, so kann die Bestimmung der Fädendistanz noch etwas genauer gemacht werden. Zu dem Ende erhält man z. B. den direct gesehenen Gegenstand mit dem linken Faden in Coincidenz, dreht den beweglichen Spiegel so, dass das zweite Bild des Gegenstands mit dem rechten Faden des Fadenkreuzes in Coincidenz erscheint und liest die Stellung des Nonius ab; hierauf hält man den Sextanten so, dass der direct gesehene Gegenstand mit dem rechten Faden coincidirt, dreht in umgekehrter Richtung wie vorhin den beweglichen Spiegel, bis das zweite Bild mit dem linken Faden in Coincidenz erscheint und liest wieder ab: Sind jetzt $a_,$ und $a_{,,}$ die beiden Ablesungen dann ist $a_, - a_{,,} = 2f$ d. h. $f = \frac{1}{2}(a_, - a_{,,})$. In unserem genannten Falle z. B. wurde auch so verfahren und ergab sich aus der ersten Einstellung $a_, = -1^0\,39'\,0''$, aus der zweiten $a_{,,} = 1^0\,24'\,0''$, wonach

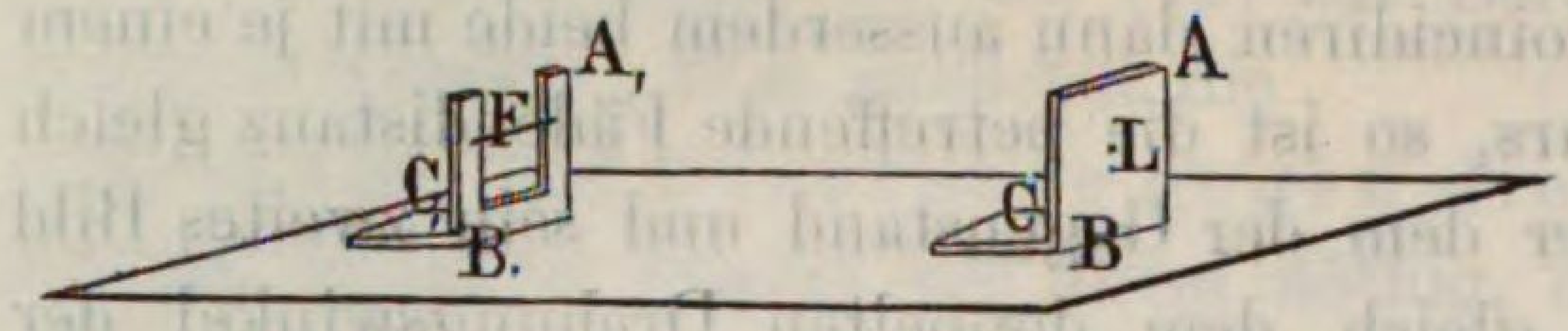
$$2f = 3^0\,3'\,0''; \; f = \mathbf{1^0\,31'\,30'' = 5490''}$$

für die Folge anzunehmen ist.

Hat das Sextantenfernrohr etwa kein Fadenkreuz, so kann man sich auf eine andere Weise helfen, indem man die äussersten Grenzen des Gesichtsfeldes als Fädenabstand betrachtet und die betreffende erste Einstellung in der Weise zu erreichen sucht, dass G möglichst am einen Rande, $b_,$ möglichst am anderen erscheint und dann die zweite Einstellung der Coincidenz von $b_,$ mit G möglichst am ersten Ende, wo vorhin G festgehalten wurde, zu Stande bringt.

Für die weitere Operation bedürfen wir einen einfachen Hilfsapparat, den man ein „D i o p t e r" zu nennen pflegt. Derselbe besteht Fig. 87 aus zwei Messingplatten, von denen jede rechtwinklig umgebogen ist und so ein Winkelstück entsteht. Denken wir diese Winkel-

Fig. 87.



stücke in einiger Entfernung hinter einander aufgestellt, so können wir das zunächst am Auge liegende Stück ABC auf der Hälfte AB mit einem feinen Löchelchen L durchbohrt denken, während das andere $A_{,}B_{,}C_{,}$ in die Seite $A_{,}B_{,}$ einen weiteren Ausschnitt bekommen hat, über welchen hin ein feines Silber- oder Platindrähtchen F gespannt ist. Tritt das Auge O nahe genug an das Löchelchen L heran, um durch dasselbe hindurch den Faden F deutlich zu sehen, so wird L als eine kleine Kreisfläche erscheinen, und stellt sich das Auge genauer ein, damit F diese kleine Kreisfläche in zwei genaue Hälften theilt, so wird durch die Punkte O, L und F eine Linie (Ebene) im Raume angegeben, welche die „Visirlinie" (Visirebene) genannt wird. Ein richtiges Diopter muss nun so construirt sein, dass diese Visirlinie genau parallel der Ebene E verlauft, worauf die Winkelstücke aufgesetzt sind, d. h. mit anderen Worten, es muss der verticale Abstand des Fadens F von der Ebene E genau gleich dem Abstande des Löchelchens L von E sein.

Indem wir nun ein solches richtiges Diopter auf die Limbusebene des Sextanten setzen, können wir letzteren zugleich so auf einen markirten Punkt richten, dass dieser im Fernrohr erscheint und zu gleicher Zeit auch die Visirlinie des Diopters LF durch diesen Punkt lauft. Liegt nun auch die Collimationslinie mit Lf parallel, so muss im Fernrohr des Sextanten das Bild des visirten Gegenstandes in der Mitte zwischen den beiden Horizontalfäden erscheinen. Thut es dies nicht und theilt es vielmehr den Zwischenraum zwischen diesen Fäden im Verhältniss von $\frac{m}{n}$ oder fällt es gar um eine Strecke über beide Fäden hinaus, so weicht die Collimationslinie von der richtigen Lage ab und lässt sich dann, wie wir sehen werden, der Winkel i sofort finden. Um ihn nämlich bei unserem Sextanten zu bestimmen, wurde derselbe, was sich überhaupt vielleicht zweckmässig erweisen dürfte, auf ein durchbrochenes Dreifussgestell gesetzt, so dass man durch die Stellschrauben dieses letzteren sehr leicht dem Sextanten innerhalb gewisser Grenzen eine bestimmte und unveränderliche Neigung geben kann derart, dass eben ein bestimmter Gegenstand im Gesichtsfeld erscheint. Es erschien in ihm einer der Thurmknöpfe der Elisabethkirche und als die Diopter aufgesetzt waren und mittelst der Fussschrauben des Dreifusses bewirkt war, dass die Dioptervisirlinie den Thurmknopf genau halbirte, zeigte sich, dass im Fernrohr die Mittellinie des Thurmknopfes die Strecke zwischen den beiden Horizontalfäden annähernd im

Verhältniss $\frac{8}{7}$ von oben nach unten gerechnet theilte, dass mithin ein **negativer** Neigungsfehler gleich

$$i = -\frac{1}{2\,.\,15}\,.\,5480'' = -\mathbf{183''}$$

vorhanden war.

Nunmehr erst können wir von unserer Formel (8) Gebrauch machen und ist z. B. für ein $\gamma = 60^0$ d. h. ein $\alpha = 30^0$ unser Fehler in der Winkelmessung gleich

$$\varDelta\gamma = -\frac{(183)^2}{\varrho}\,.\,tang\,30^0 = \mathbf{0'',09}.$$

Es bleibt uns aber noch übrig, die beiden Diopterstücke ABC und $A,B,C,$ auf ihre oben bezeichnete Richtigkeit zu prüfen. Zu dem Ende schneidet man aus einem Bretchen von einer Cigarrenkiste drei kleine an einem Stile sitzende Kreisscheiben K_1, K_2 und K_3 aus, von denen K_1 einen Durchmesser von 50, K_2 einen von 25 und K_3 wiederum einen solchen von 50 Millimeter erhält. Ist dies geschehen, so streicht man mit Kienrussfarbe alle drei Scheiben schwarz an und durchbohrt K_3 ausserdem noch mit einem Löchelchen von etwa 2 Millim. Durchmesser. Hierauf sucht man sich im Freien einen Platz aus, wo gute Beleuchtung herrscht und der gestattet, auf einer lineären Strecke von etwa 40 Schritt die nun folgende Aufstellung machen zu können. In der Mitte der Strecke werden auf einer Glasplatte die beiden Diopterstücke ABC und $A,B,C,$ in etwa 1 Fuss Entfernung hinter einander aufgestellt; in der Entfernung von 20 Schritten bringt man den Kreis K_1 so an, dass die Visirlinie LF genau durch seine Mittellinie K geht; in der Entfernung von 10 Schritten richtet man und zwar ein wenig seitwärts von der eben erlangten Mittellinie LFK_1 den Kreis K_2 so auf, dass auch die Mitte von K_2 in die Visirlinie (Visirebene) LF fällt.

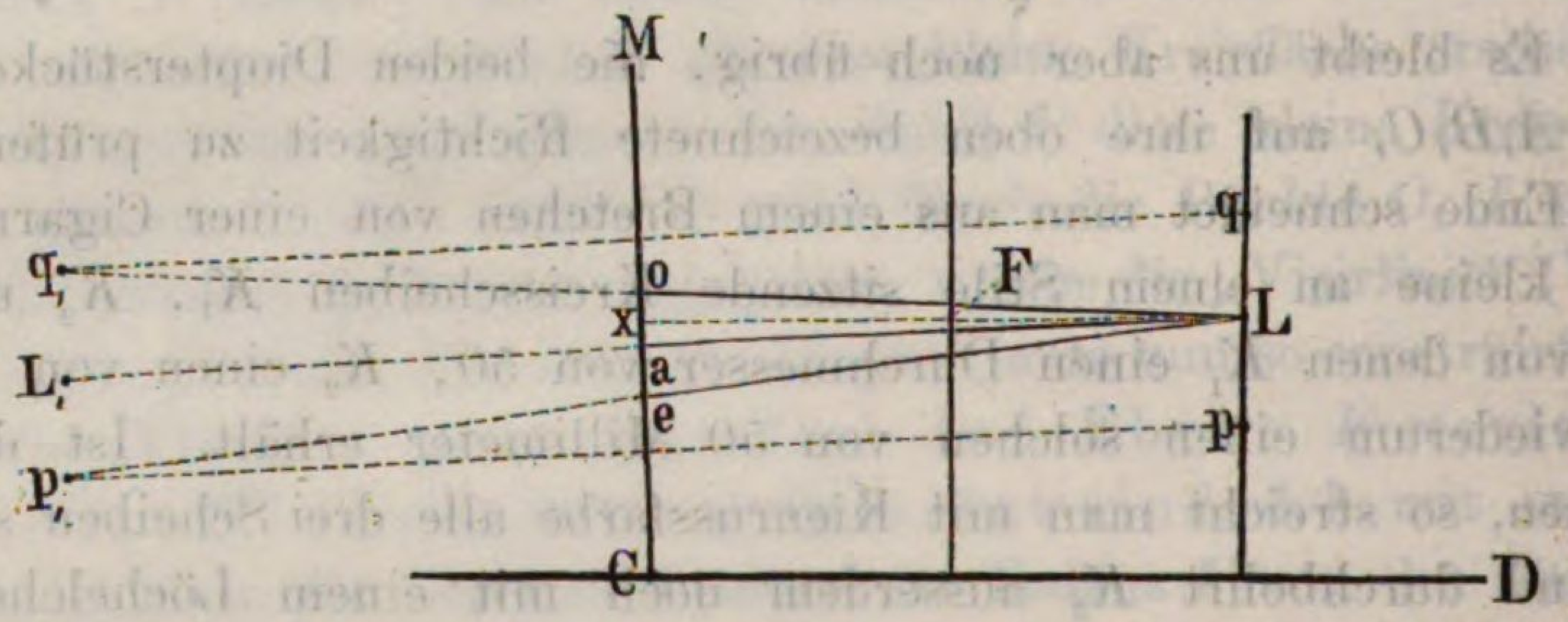
Hierauf setzt man ABC genau an die Stelle von $A,B,C,$ und umgekehrt, so dass die Visirlinie LF entgegengesetzt wie bis jetzt gerichtet ist, und stellt in etwa 20 Schritt Entfernung den Kreis K_3 mit seiner Mittellinie genau in diese neue Visirlinie (Visirebene) ein. Ist dies geschehen, so kommt die letzte Visirung an die Reihe, bei der man durchs Visirlöchelchen in K_3 nach der Mittellinie von K_2 visirt: Zeigt sich nun, dass diese Visirlinie oder vielmehr Visirebene auch durch die Mittellinie von K_1 lauft, so sind die beiden Dioptertheile richtig, wo nicht, so müssen sie in einer bestimmten Weise, die sich von selbst ergiebt, corrigirt werden, z. B. so, dass man AB, wenn L zu hoch liegen sollte, ein wenig mehr nach BC herunterböge. Es wird hierbei gerathen sein, zum näheren Verständniss dieser Prüfungsmethode sich eine Zeichnung zu entwerfen, die

sich der eben gegebenen Auseinandersetzung anschliesst. Hinter die schwarzen Kreise stellt man ausserdem beim Visiren einen weissen Papierschirm. Um zweitens eine

Neigung des grossen beweglichen Spiegels gegen die Limbusebene

nachzuweisen, numerisch zu bestimmen und etwa auch wegzuschaffen, bedienen wir uns ebenfalls mit Vortheil des Diopters, indem wir auf die Rückseite von AB Fig. 87 ein helles weisses Papierblättchen

Fig. 88.



kleben, das an der Stelle, wo das Sehlöchelchen L liegt, mit einer Nadel durchstochen wird und ausserdem in einem Abstand von 2 Millimeter vertical über und 2 Millimeter unter L zwei regelmässige kleine schwarze Punkte p und q in der Grösse des Löchelchens L erhält. Hierauf wird auf die Metalltheile des Limbus, nachdem der Sextant an seinem Griffe festgeklemmt ist, ABC möglichst weit vom beweglichen Spiegel und mit der bezeichneten Papierfläche nach letzterem hin und ebenso $A_{,}B_{,}C_{,}$ mit dem Faden F auf den Limbus und zwar mitten zwischen den Spiegel und ABC so gesetzt, dass man durch L über F auf die Fläche des Spiegels sehend, nachdem die Alhidade mit dem Spiegel gehörig gedreht ist, das Spiegelbild $L_{,}$ von L, ferner die beiden Spiegelbilder $p_{,}$ und $q_{,}$ der schwarzen Punkte p und q erblickt und zugleich der hinter L stehende Faden F direct durch L gesehen auf die Spiegelfläche projicirt erscheint. Steht nun der Spiegel senkrecht auf der Limbusebene, so muss, wie eine einfache Ueberlegung ergiebt, F mit $L_{,}$ coincidiren, wo nicht, so wird, wenn die Neigung nicht etwa zu gross ist, F zwischen $L_{,}$ und dem Spiegelbilde eines der beiden Punkte p oder q erscheinen, je nachdem eben die Neigung des Spiegels im einen oder anderen Sinne stattfindet. Einen solchen speciellen Fall erläutert die Fig. 88 schematisch und bedeutet in ihr CD die Limbusebene, CM den etwas in positiver Richtung von seiner verticalen Lage abweichenden Spiegel, L das Loch des vordern, F den Faden des hinteren Diopterplättchens, p und q die je um 2 Millim. von L

entfernt liegenden Punkte auf der weissen Papierfläche bedeuten. Dies angenommen liegt das Bild $L_,$ von L auf einem von L auf CM gefällten Perpendikel $LaL_,$ und das Bild $p_,$ und $q_,$ auf je einem solchen Perpendikel $pp_,$ und $qq_,$ derart, dass das auch in L zu denkende Auge des Beobachters diese Bilder $p_,$ und $q_,$ in der Richtung $Lep_,$ und $Loq_,$ sieht. Da ausserdem der Faden F in der Richtung LFx (parallel CD) direct gesehen wird, so ist der gesuchte Neigungswinkel l des grossen beweglichen Spiegels gleich

$$l = 206265'' \frac{xa}{xL}.$$

Aus der Beobachtung lässt sich nun aber erkennen, der wie vielte Theil xa von oa ist und da oa selbst gleich der Hälfte von $L_,q_, = Lq$ mithin gleich 1 Millimeter, so kann l, falls noch die Entfernung $xL = 2 . FL$ bekannt ist, sofort berechnet werden, indem, wenn wir diese Entfernung d nennen und das Verhältniss $\frac{xa}{1}$ einfach mit π bezeichnen

$$l = 206265'' \frac{\pi}{d}$$

ist. Unserer Figur gemäss ist π sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ und setzen wir z. B. die Strecke $d = 100$ Millim., so ergiebt sich

$$l = \frac{206265''}{200} = 1031'',3 = 17'\,11'',3$$

Bei einer wirklichen Prüfung muss der Sextant so befestigt werden, dass insbesondere das auf ABC geklebte Papierblättchen gute Beleuchtung erhält und ergab nun eine solche Prüfung unseres Baumannschen Sextanten, dass der Faden F oder was hiermit einerlei ist, der Punkt x unterhalb des Punktes a, also zwischen a und e erschien und zwar in $\frac{1}{6}$ der Strecke ae von a nach e gerechnet, wonach der Neigungswinkel

$$l = -206265'' \frac{1}{6.100} = -344'' = -5'\,44''$$

anzunehmen ist, da in Wirklichkeit die Strecke d auch 100 Millimeter betrug.

Der Einfluss dieses Neigungswinkels auf den Winkel γ berechnet sich nun weiter nach der Formel (9), deren Anwendung aber vor allem eine Kenntniss des Winkels β, d. h. des Winkels, den die Richtung der Fernrohraxe mit der Normale des kleinen Spiegels bzw. auch des grossen in seiner Nullstellung bildet. Dieser Winkel beträgt bei unserem Instrumente 16^0 und wäre demnach für $\gamma = 60^0$; $\alpha = 30^0$ $(\alpha - \beta) = 14^0$; $(\alpha + \beta) = 46^0$, mithin

$$\varDelta\gamma = \frac{2\,.\,(344)^2\,.\,\cos 14^0\,.\,\cos 46^0}{\varrho\,.\,\sin 60^0} = 0'',89.$$

Es ist einleuchtend, dass die angegebene Methode auch ohne weiteres benutzt werden könnte, um drittens die

Neigung des kleinen feststehenden Spiegels gegen die Limbusebene

zu erkennen und numerisch zu bestimmen. Aber die Sextanten werden wohl niemals ein gleiches Aufsetzen des Diopters dem kleinen Spiegel gegenüber so gestatten, wie es dem grossen gegenüber möglich ist, da entweder der grosse Spiegel im Wege ist, oder betreffende Theile der Limbusebene es nicht erlauben. Man hilft sich daher in anderer Weise nämlich so, dass man dem kleinen Spiegel dieselbe Neigung gegen die Limbusebene giebt wie dem grossen, oder mit andern Worten, dass man den ersteren parallel dem letzteren stellt. Um dies zu ermöglichen, wählt man einen hellen Fixstern aus und sucht dessen zweites Bild mit dem direct durch den kleinen Spiegel hindurch gesehenen Sterne in Coincidenz zu bringen. Ist diese Coincidenz durch Drehen der Alhidade völlig erreichbar, so findet der gewünschte Parallelismus der Spiegel statt, lauft dagegen beim Drehen des grossen Spiegels das zweite Bild z. B. über den direct gesehenen Gegenstand weg, so steht, falls das Fernrohr ein astronomisches ist, der kleine Spiegel in seinen oberen Theilen zu weit vom grossen ab und umgekehrt. Mittelst der am kleinen Spiegel angebrachten Correctionsvorrichtung kann man diese Abweichung beseitigen und wird sodann auch der kleine Spiegel mit seiner Axe um den Winkel $k = l$ von der Limbusebene abweichen. In unserem obigen Beispiele wäre demnach auch $k = l = -344''$ und somit nach Formel (12), wenn wir annehmen es sei $i = 0$

$$\varDelta\gamma = -\frac{2}{\varrho}\,.\,(344)^2\,.\,\tang 15^0\left(1 + \frac{\cos^2(-1^0)}{\cos 30^0}\right) = -0'',66.$$

Zur Berechnung des Gesammteinflusses der Fehler i, l und $k = l$ bedienen wir uns aber der Formel (11) und erhalten:

$$\varDelta\gamma = -\frac{2}{\varrho}\,.\,\tang 15^0\left[(344)^2 + \frac{1}{\cos 30^0}(344\,.\cos 1^0 + 183\,.\cos 15^0)^2\right]$$

oder nach Ausführung dieser Rechnung:

$$\varDelta\gamma = -1'',12$$

wonach unser gesuchter Werth $\gamma^* = \gamma + \varDelta\gamma$ gleich $30^0 - 1'',12$ gleich $29^0\,59'\,58'',9$ ist.

§. 89. Ausser den Fehlern, welche wir bis jetzt betrachtet haben, können noch andere Fehler vorkommen, insbesondere einer, der häufig wegen seiner Grösse einen erheblichen Einfluss auf die Messungen ausübt. Dieser Fehler ist der sogenannte „Indexfehler“ und hat er die-

selbe Bedeutung, wie z. B. der Indexfehler des Höhenkreises beim Passageinstrument. Denken wir uns nämlich alle Fehler bis auf diesen weg, so besteht er darin, dass wenn man mit einem Gegenstande G das zweite Bild b_1 desselben Gegenstandes genau in Coincidenz bringt und sonach die beiden Spiegel in Wirklichkeit genau parallel stehen, diese Stellung des grossen Spiegels vom Nonius nicht als die Nullstellung, sondern um $\varDelta\alpha$ von 0^0 verschieden angezeigt wird, ein Fehler, welcher bei der Winkelmessung durchgängig von gleichem Einfluss ist und mit dessen Kenntniss man erst den wahren Winkel $\alpha^* = \alpha - \varDelta\alpha$ findet, falls α der direct abgelesene fehlerhafte Winkel bedeutet.

Es ist nun leicht das Vorhandensein des Fehlers $\varDelta\alpha$ zu constatiren und ihn selbst numerisch zu bestimmen. Zu dem Ende richtet man den Sextanten auf einen entfernten markirten Gegenstand, z. B. eine Blitzableiterstange und bewegt die Alhidade, die schon nahe auf Null einsteht, mittelst der Micrometerschraube so, dass b_1 genau mit G zusammenfällt und liest hierauf den Nonius ab. Zeigt er anstatt 0^0 ein $\pm\varDelta\alpha$, so ist der Fehler nachgewiesen und zugleich numerisch bestimmt. Bei unserem Sextanten, bei welchem zunächst mittelst der angebrachten Correctionsvorrichtung der kleine Spiegel parallel dem grossen gerichtet worden war, ergab sich z. B. nach einer Messung am 16. Juni 1875 der Indexfehler gleich $-8'\,0''$.

Anstatt in der angegebenen Manier lässt sich auch in folgender Weise verfahren. Hat nämlich der Gegenstand G eine entsprechende z. B. linke und rechte oder obere und untere Begrenzung, so kann man einmal den linken Rand von G mit dem rechten von b_1 und zweitens den rechten Rand von G mit dem linken von b_1 in Coincidenz bringen; bezeichnet man dann den scheinbaren Durchmesser des Gegenstandes mit d, so würde die Winkelmessung im ersten Falle der Einstellung entsprechen, welche man gewöhnlich trifft, falls überhaupt ein Gegenstand G (hier identisch mit dem linken Rande von G) und das zweite Bild eines zweiten Gegenstandes G_1 (hier identisch mit dem rechten Rande von G) in Coincidenz gebracht werden soll, und wird man den Winkel zwischen G und G_1 einen positiven Winkel nennen im Gegensatze zu dem, der bei der zweiten Art der Coincidenz gefunden wird, wobei der direct gesehene rechte Rand mit dem zweiten Bilde des linken Randes coincidiren soll. Hat demnach der Sextant einen positiven Indexfehler, d. h. ist der Nullpunkt des Nonius, wenn die Spiegel parallel stehen, im Sinne der Theilung verschoben, so ist, beide Ablesung mit a_1 und a_2 bezeichnet,

$$(a_1 - \varDelta\alpha) = +d$$
$$(a_2 - \varDelta\alpha) = -d$$

mithin

$$\varDelta\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und erhält man nebenbei aus den beiden Gleichungen zugleich auch d selbst gleich

$$d = \frac{a_1 - a_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Für diese letztere Art der Bestimmung des Indexfehlers empfiehlt sich nun sehr die Sonne und wurde am genannten Tage auch eine Beobachtung angestellt, wobei einmal die Unter- und einmal die Oberränder in Berührung kamen. Die Beobachtung ergab nach zweimaliger Wiederholung

$$a_1 = +\,0^0\ 25'\ 20''$$
$$a_2 = -\,0\ \ 39\ \ 20$$

und ist mithin nach Gl. (13)

$$\varDelta\alpha = -\frac{14'\ 0''}{2} = -\,7'\ 0''.$$

Da nun unmittelbar hierauf auch die Indexfehlerbestimmung nach der ersten auf der vor. Seite angegebenen Methode vorgenommen und hierbei $\varDelta\alpha = -8'\ 0''$ gefunden wurde, so fragt sich, woher kommt dieser Unterschied von $1'\ 0''$? Diese Frage führt uns noch auf einen weiteren Fehler des Sextanten, der darin besteht, dass die Blendgläser, welche bei der Sonnenbeobachtung vor den grossen und kleinen Spiegel vorgelegt werden, eine fehlerhafte Ablenkung des Lichtes herbeiführen können, so dass wenn wir uns einmal einen Sextanten ohne jeden Indexfehler vorstellen, die Spiegel parallel richten und die Coincidenz vom Gegenstande G mit seinem eigenen zweiten Bilde genau wahrnehmen, diese wieder verschwinden kann, sobald wir ein oder mehrere Blendgläser in die Wege des Lichtes einschalten. Es leuchtet aber sofort ein, dass dieser Fehler, durch die Blendgläser hervorgerufen, als ein Indexfehler angesehen und in Rechnung gebracht werden darf, und können wir bei einer bestimmten Anordnung der Blendgläser (in unserem Falle stand das Glas I und II vor dem grossen und das Glas IV vor dem kleinen Spiegel) unseren Indexfehler

$$\varDelta\alpha = \varDelta\alpha' + \varDelta\alpha''$$

setzen, wobei $\varDelta\alpha'$ durch die Stellung des Nonius und $\varDelta\alpha''$ durch die Blendgläser verursacht wird, so dass bei unserem Sextanten $\varDelta\alpha' = -8'\ 0''$ und $\varDelta\alpha'' = +\,1'\ 0''$ anzunehmen ist.

Es mögen hier noch einige Literaturangaben folgen, welche dazu dienen können, die Kenntniss von der Einrichtung, dem Gebrauche und der Theorie des Sextanten zu vervollständigen. Im Wesentlichen kommt unsere Ableitung der Hauptgleichung (7) S. 426 überein mit der Entwickelung, welche Enke im Berliner astronomischen Jahr-

buche für 1830 in einem Aufsatze unter dem Titel „Ueber den Spiegelsextanten" S. 285—304 gab. Ferner nennen wir die Abschnitte des vortrefflichen Werkes von Bohnenberger: „Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich mittelst des Spiegelsextanten" neu bearbeitet von G. A. Jahn, Göttingen, Vandenhöck und Ruprecht 1852. Man findet hier von S. 9 bis 58 eine Abhandlung über dieses bedeutungsvolle Instrument, deren genaues Studium sehr zu empfehlen ist. Ferner findet man auch eine Darstellung dieser Lehren in dem schon öfters citirten Werke von Sawitsch, Bd. II. S. 299—344; ferner in Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde" 2. Aufl., München, Cotta'sche Buchhandlung, S. 222—243; ebenso in Brünnow's schon wiederholt genanntem Werke auf S. 510—521 und insbesondere noch in dem bei einer anderen Gelegenheit (s. S. 387) angeführten Werke von Albrecht und Vierow, in welchem von S. 253 bis 314 eine vollständige und insbesondere auch für die Praxis berechnete Abhandlung über den Sextanten zu finden ist.

§. 90. Wir sind nunmehr in den Stand gesetzt, eine genaue Höhenmessung mit Hilfe des Sextanten und unter Benutzung eines künstlichen oder natürlichen Horizonts, wie solcher auch zur Beobachtung von correspondirenden Sonnen- oder Sternhöhen verwandt wird, anzustellen. Nach dieser Beobachtung der Uhrzeiten U und der Höhen müssen für die weitere Berechnung, falls man die $\odot$ beobachtet hat, folgende Correctionen an die Höhe angebracht werden:

1) eine Corr. (α) wegen des Indexfehlers des Sextanten;
2) eine Corr. (i, l) wegen der Fehler i und l des Sextanten; zu berechnen nach Gl. (11);
3) eine Corr. $(r) = r$ wegen des Einflusses der Refraction;
4) eine Corr. $(R) = R$, die desshalb nöthig ist, weil man zunächst nur den oberen oder unteren Rand der Sonne beobachtet hat und z. B. die Coordinate δ, welche in der zur Berechnung herangezogenen Gleichung vorkommt, nur die Declination des Sonnenmittelpunkts bezeichnet;
5) eine Corr. $(p) = p$ wegen der Parallaxe der Sonne nach Gl. (25) S. 194 zu berechnen; desshalb nöthig, weil ebenfalls die Coordinate δ z. B. als eine geocentrische in Betracht kommt.

Bezeichnen wir demnach die wirklich beobachtete Höhe mit h' und die gemäss der fünf Correctionen verbesserte Höhe des Sonnenmittelpunkts mit h, so besteht die Gleichung

$$h = h' + \text{Corr.}\,(\alpha) + \text{Corr.}\,(i, l) - r \pm R + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

oder falls man anstatt der Höhen die Zenithdistanzen z' und z einführt

$$z = z' - \text{Corr.}\,(\alpha) - \text{Corr.}\,(i, l) + r \mp R - p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und wobei in der letzten Gleichung am R das obere Zeichen in Be-

tracht kommt, falls der Unterrand und das untere falls der Oberrand beobachtet wurde.

Für den Fall, dass man einen Fixstern beobachtet hat, fallen die Corr. (R) und Corr. (p) weg.

Dies vorausgesetzt kommt für die Berechnung des Stundenwinkels die Gleichung

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \, . \sin \delta}{\cos \varphi \, . \cos \delta} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

in Betracht und wird in dieser Gleichung t von Süden gegen Westen von 0^0 bis 360^0 fortgezählt; es ist also t bei der Sonne der Stundenwinkel der wahren Sonne in Zeit verwandelt auch gleich der aus der Berechnung sich ergebenden wahren Sonnenzeit, d. h. es ist letztere mit T bezeichnet:

$$T = \frac{t}{15} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Da die Beobachtung selbst aber nur nach einer Sternuhr oder mittlere Sonnenzeit anzeigenden Uhr geschieht, so muss die nach der Gl. (17) berechnete Zeit T erst in die Zeit umgesetzt werden, welche der, bei der Beobachtung benutzten, Uhr entspricht. Nennen wir dann diese nach der Umwandlung von T erhaltene Zeit $T_{,}$ und die von der Uhr wirklich gelieferte Uhrzeit U, so ist

$$s = U - T_{,} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

der gesuchte Standfehler der Uhr.

Für den Fall, dass statt der Sonne ein Fixstern beobachtet wird, ist klar, dass t zwar den Stundenwinkel des Sterns, aber nicht direct die Sternzeit bedeutet, sondern dass diese, wenn sie mit T_* bezeichnet wird, gleich

$$T_* = Æ_* + \frac{t}{15} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

zu setzen ist.

Es ist ferner einleuchtend, dass wenn es sich um eine genauere Bestimmung des Standfehlers einer Uhr handelt, man anstatt einer Höhenbeobachtung zwei, drei und mehr möglichst rasch hintereinander her machen kann, um aus den einzelnen Werthen $s_{,}$, $s_{,,}$, $s_{,,,}$ ... ein besseres Gesammtmittel s ableiten zu können. Hierbei sind die Producte $\sin \varphi \, . \sin \delta$ und $\cos \varphi \, . \cos \delta$ in Gl. (17) constant, und berechnet sich t nach dieser Gleichung unmittelbar. Hätte man aber blos eine Beobachtung gemacht, so ist es vielleicht bequemer, anstatt der Gl. (17) eine solche zu gebrauchen, welche eine logarithmische Berechnung durchweg gestattet. Um diese Gleichung zu erhalten, setzt man einfach

$$\varphi - \delta = q$$

und nimmt eine ähnliche Umformung wie auf S. 318 vor, um schliesslich

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z+q) \cdot \sin \frac{1}{2}(z-q)}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

zu erhalten. Hiernach geben wir ein vollständiges

Beispiel der Beobachtung und Berechnung. Am 16. Juni 1875 Nachmittags beobachtete der Verfasser mit dem schon erwähnten kleinen Baumann'schen Sextanten und dem Breithaupt'schen künstlichen Horizont drei Höhen des Unterrandes der Sonne nach der Schmidt'schen Sternuhr.

A. Beobachtung.

Uhrzeit U.	Stand des Sextanten.	Höhe h' der Sonne.
$9^h\ 24^m\ 22^s$	$75^0\ 25'\ 30''$	$37^0\ 42'\ 45''$
31 14	73 17 0	36 38 30
33 21	72 37 30	37 18 45.

Barometerstand = 27″ 4‴,4.

Luft- und Quecksilbertemperatur = 22°,0 C.

B. Berechnung.

1) Da bei der Beobachtung dieselben Blendgläser vorlagen wie die, welche wir S. 436 bei der Indexfehlerbestimmung im Auge hatten, und jene Bestimmung gerade unmittelbar nach unserer jetzigen Sonnenhöhenbeobachtung vorgenommen wurde, so ist

$$\text{Corr.}\ (\alpha) = +\ 7'\ 0''.$$

2) Da ferner die Prüfung der Stellung des grossen Spiegels ein $i = -183''$ und $l = -344''$ ergeben hatte und der kleine Spiegel dem grossen parallel gerichtet war, so wäre die Berechnung von $\varDelta\gamma$ nach Gl. (11) und zwar dreimal vorzunehmen. Weil aber $\varDelta\gamma$ jedenfalls nicht bedeutend ist, so erlauben wir uns anstatt der drei verschiedenen Höhen eine mittlere gleich $37^0\ 0'$ zu nehmen und für diese nach Gl. (11) das $\varDelta\gamma$ zu berechnen. Den Bezeichnungen dieser Gleichung entsprechend ist demnach

$$\alpha = h = 37^0\ 0'; \quad \frac{\alpha}{2} = 18^0\ 30'$$

$$\beta = 16^0 \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} - \beta = 2^0\ 30'$$

und wird mit Rücksicht auf die Werthe i und l die zu berechnende Gl. (11) jetzt

$$\varDelta\gamma = -\frac{2}{\varrho}\, tang\,(18^0\ 30') \left[(344)^2 + \frac{1}{\cos(39^0\ 30')} \Big(344 \cdot \cos(2^0\ 30') + 183 \cdot \cos(18^0\ 30')\Big)^2 \right]$$

oder

$$\varDelta\gamma = \text{Corr.}\ (i, l) = -\ 1'',5.$$

Fasst man diese beiden Correctionen zusammen, so erhält man + 6′ 58″,5 und wird die in Rücksicht auf diese beiden Correctionen verbesserte Höhe und Zenithdistanz mit $h_{\prime}$ bzw. $z_{\prime}$ bezeichnet

$h_{\prime}$	$z_{\prime}$
37° 49′ 43″,5	52° 10′ 16″,5
36 45 28 ,5	53 14 31 ,5
36 25 43 ,5	53 34 16 ,5.

3) Berechnen wir für die einzelnen Zenithdistanzen nach §. 29 die genauen Werthe der Refraction r, so erhalten wir 1′ 9″,8; 1′ 12″,5; 1′ 13″,3.

4) Nach unserer Beobachtung auf S. 436 ist gemäss Gl. (14) der scheinbare Halbmesser $R = \frac{d}{2} = 16' \, 10''$.

5) Da ferner nach dem Naut. Alm. die Aequatorialhorizontalparallaxe $\pi_0 = 8'',8$ ist, so wird die Corr. $(p) = 8'',8 \, . \, cos \, (37^0 \, 30')$ $= 7''0$.

Somit beträgt der Gesammtwerth der drei letzten Correctionen — 15′ 7″,2; — 15′ 4″,5; — 15′ 3″,7 und ist nunmehr unser gesuchtes

z = 51° 55′ 9″,3
52 59 27 ,0
53 19 12 ,8

Ferner ist Greenwich 16. Juni das $\delta_0 = 23^0 \, 21' \, 30'',9$; stündl. Aendr. = + 5,53; mithin die Corr. δ für Marburg, wenn wir die Zeit der Beobachtung annähernd gleich 3 Uhr Nachmittags setzen $5'',53 \, \frac{3^h - 35^m}{3600} = 13'',4$, wonach für Marburg

$$\delta = 23^0 \, 21' \, 44'',3$$

folgt. Die weitere Rechnung gestaltet sich nun mittelst 5stelliger Logarithmen, wenn wir $sin \, \delta \, . \, sin \, \varphi = m$, $cos \, \delta \, . \, cos \, \varphi = n$ setzen, wie folgt:

$log \, sin \, \delta = 9{,}59829$	$log \, cos \, \delta = 9{,}96285$
$log \, sin \, \varphi = 9{,}88935$	$log \, cos \, \varphi = 9{,}80062$
$log \, m = 9{,}48764$	$log \, n = 9{,}76347$
$m = 0{,}30735$	

$log \, cos \, z$	$cos \, z$	$cos \, z - m$
9,79012	0,61677	0,30942
9,77956	0,60195	0,29460
9,77622	0,59734	0,28999

$log \, (cos \, z - m)$	$log \, cos \, t$	t
9,49056	9,72709	57° 45′ 42″
9,46923	9,70576	59 28 38
9,46239	9,69892	60 0 13

$$\frac{t}{15} = T = 3^h\ 51^m\ 2^s{,}8 = 13862^s{,}8$$
$$57\ \ 54{,}5 = 14274{,}5$$
$$4\ \ 0\ \ 9{,}9 = 14400{,}9.$$

Ferner ist Greenwich $\dot{A\!R}\odot = 5^h\ 37^m\ 41^s{,}75$; stündl. Aenderung gleich $10^s{,}387$; demgemäss Corr. $A\!R\odot = 10^s{,}387 \frac{2105{,}6}{3600} = 6^s{,}07$ und für Marburg

$$\dot{A\!R}\odot = 5^h\ 37^m\ 35^s{,}68.$$

Weil in unserem jetzigen Falle die Uhr eine Sternuhr war, müssen wir die obigen gefundenen Zeiten T erst in Sternzeiten $T_,$ verwandeln. Es geschieht dies nach Gl. (27) S. 133 und ist, da die tägliche Rectascensionsdifferenz $4^m\ 9^s{,}35$ beträgt, $\Delta A\!R\odot$ in runder Zahl $= 249^s$ anzunehmen. Für den ersten Werth des Stundenwinkels gleich 13863 ist also die Corr. $A\!R\odot = +\ 13863 \frac{249}{86400} = +40^s{,}0$, für die beiden anderen Stundenwinkel gleich $41^s{,}1$ und $41^s{,}5$, so dass nunmehr gemäss Gl. (27) S. 133 unsere drei berechneten Sternzeiten $T_,$ gleich

$$9^h\ 29^m\ 18^s{,}48$$
$$36\ \ 11{,}28$$
$$38\ \ 18{,}08$$

werden und sonach, wenn wir diese Zeiten von den beobachteten Zeiten U abziehen sich

$$s = -4^m\ 56^s{,}48$$
$$-4\ \ 57{,}28$$
$$-4\ \ 57{,}08$$

also im Mittel $\quad s = -4^m 56^s{,}88$

ergiebt.

§. 91. Unter den einfachsten Hilfsmitteln die Zeit zu bestimmen steht ein von Herrn Reallehrer M. Eble construirter Apparat oben an. Seine Beschreibung geschah durch eine im Jahre 1853 bei Riecker in Tübingen erschienene Schrift, der zugleich der ganze Apparat beigegeben war und welche Schrift den Titel führt: „Neues Zeitbestimmungswerk von M. Eble, Lehrer an der Real-Anstalt in Ellwangen; bestehend aus dem neuen Sextanten und dem astronomischen Netz. Patentirt am 7. April 1852.“ Dieses Werk ist sehr verbreitet und befindet sich sowohl in Händen von Fachmännern, wie namentlich auch in denen von Laien auf dem Gebiete der Astronomie. Im Laufe der letzten Decennien hat sein Erfinder sich bemüht, manche Verbesserungen des Apparates und der ganzen Methode zu gewinnen; dennoch

glauben wir, dass man bei der einfachen billigen ursprünglichen Einrichtung stehen bleiben kann, da gerade hierin und in der bequemen Handhabung gegenüber anderen Hilfsmitteln der Vortheil beruht.

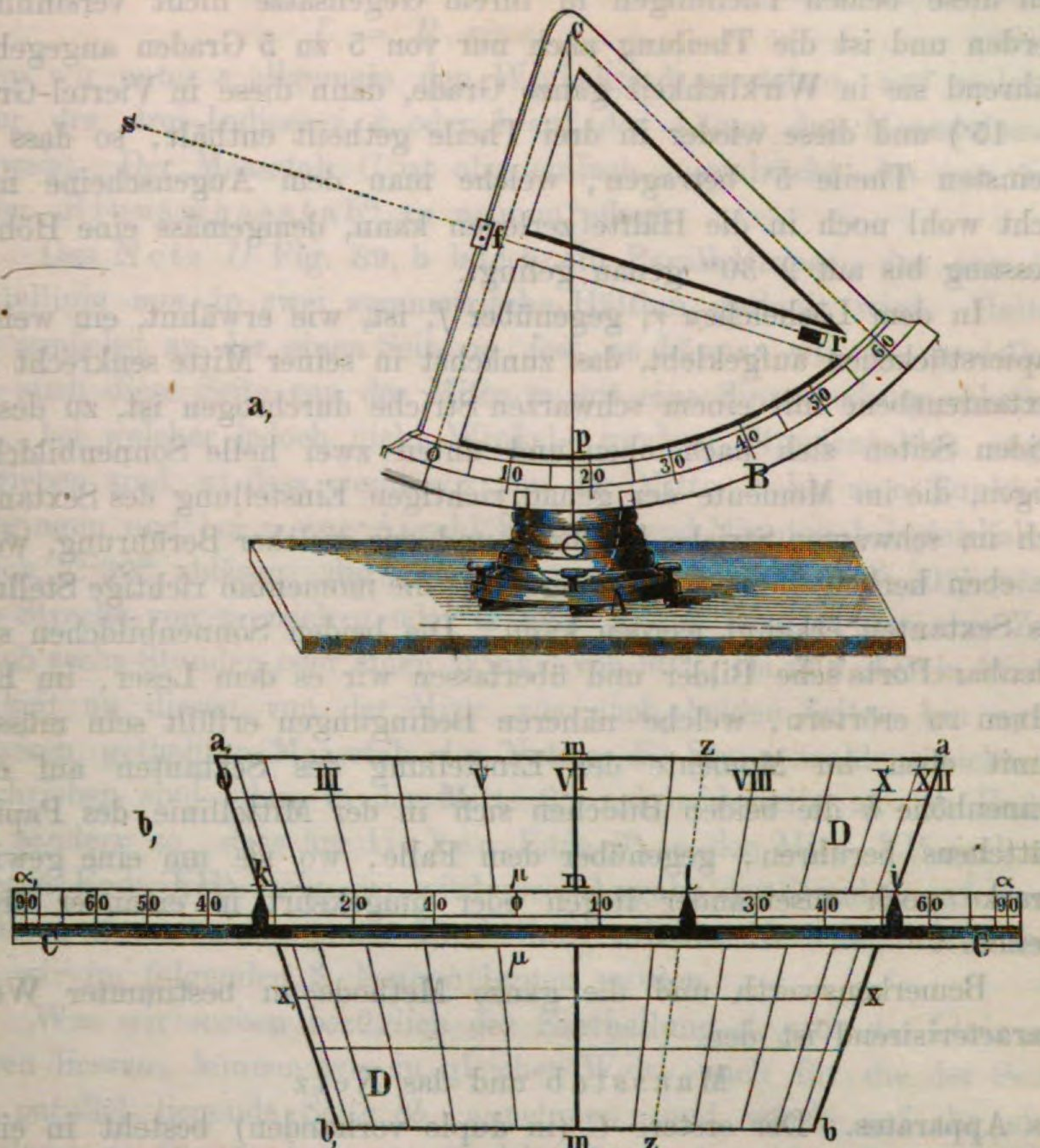
Herr Eble hat in der genannten Schrift die Theorie der Methode nicht entwickelt, augenscheinlich von dem Gedanken durchdrungen, dass ein Laie, dem jede mathematische Vorkenntniss abgeht, doch nicht im Stande sein würde, ein wahres Verständniss des mathematischen Zusammenhanges zu erlangen, und sich mit einer rein mechanischen Anwendung, wofür die beigegebene Schrift die nöthigen Regeln enthält, begnügen könne: dass andererseits der hinreichend mathematisch Gebildete wohl im Stande sein müsse, diese Theorie nach eigenem Nachdenken zu geben. Dass Letzteres jedoch nicht übermässig leicht fällt, wird Jeder erfahren haben, der die Methode Anderen auseinandersetzen wollte, und möge dies im Folgenden, soweit es unser Zweck erheischt, geschehen. Beginnen wir mit der Beschreibung der einzelnen Theile.

Das Holzgefäss und der Sextant.

Das Holzgefäss *A* Fig. 89, *a* ist 93 Millim. hoch, enthält im Innern eine cylindrische Aushöhlung, deren Durchmesser 65 Millim. beträgt und ist durch eine eiserne Schraube so auf einer hölzernen Fussplatte befestigt, dass diese Schraube die Verticalaxe bildet, um welche das Holzgefäss gedreht werden kann. In die Fussplatte selbst sind drei Holzschrauben eingeschraubt, mittelst derer das Gefäss und der auf ihm stehende Sextant bestimmte Verstellungen erhalten kann. Oben trägt das Gefäss diametral entgegengesetzt auf seinem Rande zwei Messinggabeln, zwischen welchen der Sextant mit seinem Kreisbogen festgehalten, aber auch mit Reibung verschoben werden kann.

Der Sextant *B* ist ebenfalls ganz aus Holz gearbeitet und besitzt eine Radiuslänge — von *c* aus bis zum äusseren Rande der Theilung gemessen — gleich 365 Millim., die beiden äusseren unter einem Winkel von 60° zusammengefügten Arme sind noch durch einen Querarm *fr* verbunden, der mit seiner Mittellinie genau senkrecht auf *co* gerichtet ist und ausserdem im Inneren von einem Canale durchsetzt wird, welcher bei *r* endet und hier nach vorn eine Oeffnung erhalten hat, um durch dieselbe auf ein weisses Papierblättchen sehen zu können. Diesem Blättchen nämlich gegenüber befindet sich ein Messingplättchen *f*, welches den von *r* senkrecht nach *co* verlaufenden Canal sonst schliesst, aber doch gestattet, dass das Sonnenlicht durch zwei kleine Löchelchen hindurchgehen kann, um jenseits am anderen Ende des Canals auf dem Papierblättchen bei *r* zwei Sonnenbildchen zu erzeugen, deren Beschaffenheit und Lage wir sogleich näher andeuten werden. Ausserdem hängt vom Centrum *c* des Sextanten ein Loth herab, bestehend in einem Pferdehaar, an welches unten ein Bleige-

Fig. 89.



wicht befestigt ist, das seinerseits in das Wasser eintaucht, mit welchem vor der Beobachtung der Holztrog *A* gefüllt wird, und wodurch die pendelartigen Bewegungen des Lothes *cp* möglichst rasch zum Aufhören gebracht werden.

Die Theilung des Sextanten, auf Papier angegeben, ist eine doppelte, nämlich einmal eine solche ohne Rücksicht auf Refraction und darunter eine solche mit Rücksicht auf die mittlere Refraction. Diese letztere Theilung heisst die „Haupttheilung", erstere dagegen die „Nebentheilung". Der Grösse des Maasstabes entsprechend liegt die Sache nun so, dass diese beiden Theilungen, von 60^0 an bis nach 50^0 hin von rechts nach links verfolgt, als von einander verschieden nicht erkannt werden können, während von 50^0 an bis zu 0^0 diese Verschiedenheit sich mehr und mehr bemerklich macht und endlich der Nullpunkt der Haupttheilung etwa um 3 Millim. vor dem der

Nebentheilung angegeben ist. In unserer Figur konnten selbstverständlich diese beiden Theilungen in ihrem Gegensatze nicht versinnlicht werden und ist die Theilung auch nur von 5 zu 5 Graden angegeben, während sie in Wirklichkeit ganze Grade, dann diese in Viertel-Grade (= 15′) und diese wieder in drei Theile getheilt enthält, so dass die kleinsten Theile 5′ betragen, welche man dem Augenscheine nach recht wohl noch in die Hälfte zerlegen kann, demgemäss eine Höhenmessung bis auf 2′ 30″ genau gelingt.

In dem Löchelchen *r*, gegenüber *f*, ist, wie erwähnt, ein weisses Papierstückchen aufgeklebt, das zunächst in seiner Mitte senkrecht zur Sextantenebene mit einem schwarzen Striche durchzogen ist, zu dessen beiden Seiten sich nach oben und unten zwei helle Sonnenbildchen zeigen, die im Momente der genau richtigen Einstellung des Sextanten sich im schwarzen Striche berühren und aus welcher Berührung, wenn sie eben herbeigeführt wird, umgekehrt die momentan richtige Stellung des Sextanten erkannt werden kann. Die beiden Sonnenbildchen sind offenbar Porta'sche Bilder und überlassen wir es dem Leser, im Einzelnen zu erörtern, welche näheren Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eben im Momente der Einstellung des Sextanten auf eine Sonnenhöhe *h* die beiden Bildchen sich in der Mittellinie des Papierblättchens berühren, gegenüber dem Falle, wo sie um eine gewisse Strecke noch auseinander liegen oder umgekehrt in einander übergreifen.

Bemerkenswerth und die ganze Methode in bestimmter Weise characterisirend ist der

Maasstab und das Netz

des Apparates. Der erstere *C* (in duplo vorhanden) besteht in einer 586 Millim. langen Holzleiste, die nach vorn abgeschrägt ist und der Länge nach von der Mitte aus symmetrisch verlaufend auf Papier eine eigenthümliche Theilung trägt. Ausserdem ist die Leiste mit einer Rinne durchsetzt, in welcher sich drei kleine Schieber mit je einem Index von Messing verschieben lassen, deren Spitzen in der Figur 89, b, mit *i*, *k* und *l* bezeichnet sind und welche Buchstaben wir auch zur Bezeichnung der Schieber überhaupt gelten lassen wollen. Die Theilung selbst zeigt nämlich zwar Gradzahlen, und ist jeder Grad in der oben angegebenen Weise abgetheilt, aber die lineären Strecken, die einer bestimmten Winkelangabe z. B. 10° 40′ von der Mitte μ als dem Nullpunkte der Theilung an gerechnet entsprechen, repräsentiren nicht etwa Gradbogenlängen, sondern vielmehr die wirkliche Länge der Sinus in unserem Beispiele die Länge des *sin* (10° 40′), wobei die Strecke $\mu\alpha' = \mu\alpha$, als Radius anzusehen ist, mit welchem ein die absoluten Längen der Sinus bestimmender Kreis beschrieben gedacht

werden muss. Bezeichnen wir daher diesen Radius mit R und eine bestimmte von μ aus gerechnete Strecke mit L, so besteht die Gleichung

$$L = R . \sin \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wenn wir unter ε allgemein den Winkelgrad verstehen, auf welchen einer der drei Indices i, k oder l auf der Länge des Maasstabes C hinweist. Der Maasstab C ist also einfach ausgedrückt, das was man einen „Sinusmaassstab" zu nennen pflegt.

Das Netz D Fig. 89, b bildet ein Paralleltrapez, das von der Mittellinie mm in zwei symmetrische Hälften getheilt wird. Halten wir zunächst an der einen Seite aa_1 fest, so können wir uns vorstellen, wie auch diese Seite von der Mitte m aus eine Sinustheilung erhalten hat, bei welcher jedoch nicht Winkel- sondern Stundenzahlen angeschrieben sind, so dass wenn wir von der Mitte m bis zum Punkte z fortgingen und bei z eine Anzahl Stunden und Minuten beispielshalber gleich $2^h\,30^m$ abläsen, die Strecke $mz = (ma) . \sin (15 . 2^h\,30^m)$ wäre. Die Strecke von m nach a oder m nach a_1 repräsentirt also eine Zeit gleich sechs Stunden oder einen Winkel von 90^0. Da nun aber in Wirklichkeit an diesen von der Mitte aus nach beiden Seiten hin symmetrisch getheilten Maasstab des Netzes die Stundenzahlen nicht so geschrieben sind, dass in der Mitte 0^h und beiderseits an den Enden VI^h sondern so, dass am linken Ende 0^h in der Mitte VI^h und am rechten Ende XII^h steht, so wird diese Angabe der Stunden auf einen weiteren Zusammenhang der Eintheilung mit der Notirung hinweisen, den wir im folgenden §. kennen lernen werden.

Was wir soeben bezüglich der Eintheilung etc. für die Linie aa_1 gelten liessen, können wir in gleicher Weise auch für die der Seite aa_1 parallel liegende Seite bb_1 annehmen, und würde auf ihr eine Theilung zu Stande kommen, welche der auf aa_1 in allen Stücken ähnlich wäre. Ziehen wir dann durch die entsprechenden Theilpunkte auf aa_1 und bb_1 Linien, wie solche in der Figur in beschränkter Zahl zu sehen sind, und durchkreuzen diese Schaar von Geraden durch eine weitere Schaar von Linien parallel aa_1 gelegen, so leuchtet ein, wie erstere auf letzteren Theilungen hervorrufen, die alle der Theilung auf aa_1 ähnlich sind und einem um so kleineren Maasstabe entsprechen, je mehr eine solche Horizontale Gerade xx_1 näher nach bb_1 hin liegt. Solcher Einzelnetze, wie wir soeben eins beschrieben haben, sind dem Apparate drei beigegeben der Art, dass die Seite bb_1 vom grössten so lang ist, wie die Seite aa_1 vom mittleren und wiederum die Seite bb_1 dieses mittleren an Grösse gleich der Seite aa_1 des kleinsten Netzes ist und man, wenn das überstehende Papier des mittleren und kleinsten Netzes oberhalb aa_1 abgeschnitten und die drei Stücke gehörig zusammengesetzt würden, ein einziges Netz erhielte, dessen längste

Seite *aa*, 566 und kürzeste 131 Millimeter mässe, während die Gesammthöhe dieses Paralleltrapezes 668 Millim. betrüge.

Bezeichnen wir die halbe Länge einer Horizontalen xx, mit r, so wäre, wenn wir von der Mitte m aus, wie erwähnt, ganz in derselben Weise wie auf C eine Sinustheilung dächten, und den durch den Index l auf einer Horizontalen des Netzes angegebenen Winkelgrad mit e, die Strecke von der Mitte m bis nach l gerechnet mit λ bezeichnen

$$\lambda = r \,.\, sin\, e \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

worin aber r jetzt eine variabele von der betreffenden Horizontalen abhängige Strecke bedeutet, während R beim Maasstabe C constant ist.

§. 92. Hiernach müssen wir die weitere Aufstellung des Sextanten, die Höhenmessung und die Verwendung des Maasstabes C in Verbindung mit dem Netze genauer betrachten. Der Sextant dient nur zur Bestimmung der Höhen und muss zu dem Ende das Gefäss A zunächst so um seine Verticalaxe gedreht werden, dass bei der Sonne die Ebene des Sextanten möglichst in den Höhenkreis derselben gelangt, was sich leicht aus der Beobachtung des von dem Arme *co* und *fr* erzeugten Schatten erkennen lässt. Ist dies annähernd erreicht, so muss ferner an den Fusschrauben des Sextanten so operirt werden, dass das Loth *cp* ziemlich nach der Mitte des Wassertrogs herabhängt und ausserdem der Faden so vor dem die Theilung enthaltenden Bogen des Sextanten hängt, dass er diese Theilung eben gerade nur berührt und nicht etwa zu weit davor herlauft oder fest an derselben anliegt und desshalb unten am Bogen einen Knick erleidet. Man wird leicht im Stande sein, diese regelrechte Einstellung zu erreichen. Ist sie erlangt, so wird der Sextant derart zwischen seinen gabelförmigen Haltern verschoben, dass die beiden Sonnenbildchen bei r erscheinen. Wird hierauf, während man jetzt anfängt, die Secundenschläge der Uhr zu zählen, durch eine feinere Verstellung des Sextanten allein oder auch in Verbindung mit einer feineren Drehung des Holzgefässes bzw. auch einer feineren Verstellung der Fusschrauben bewirkt, dass die beiden Bildchen sich in dem oben bezeichneten schwarzen Striche des weissen Papierblättchens berühren, so kann dieser Moment nach der Uhr notirt werden. Die Figur 89, a stellt eine diesem Momente allgemein entsprechende Stellung dar und leuchtet ein, dass der Winkel, den das Loth unten auf dem Kreisbogen, wenn wir die Theilung ohne Rücksicht auf Refraction aufgetragen denken, anzeigt, gleich h', gleich der scheinbaren Höhe der Sonne ist, während wenn die Theilung auch mit Rücksicht auf den Abzug der mittleren Refraction ϱ aufgetragen ist, d. h. wenn der Nullpunkt der Haupttheilung gegen den

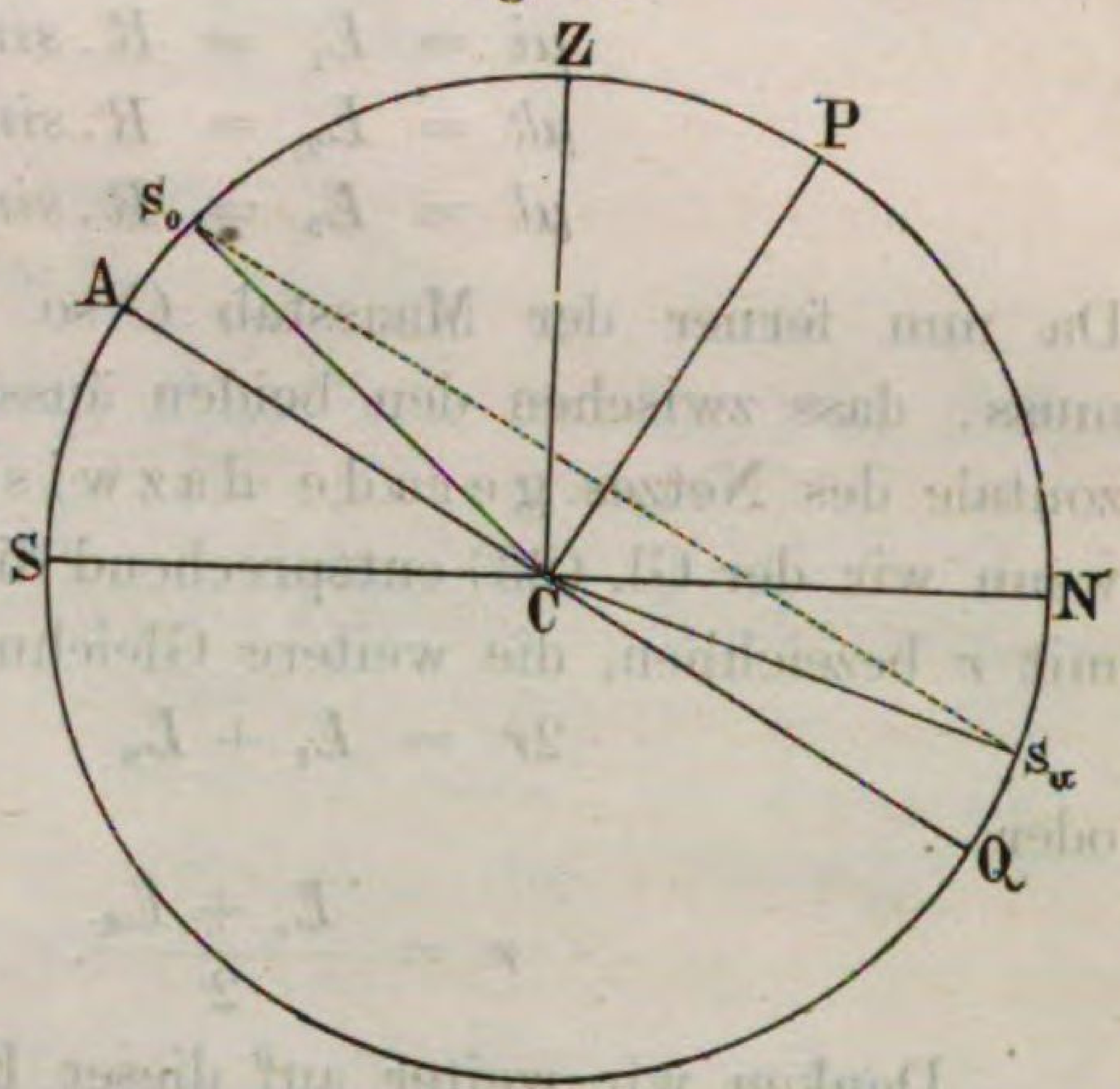
Nullpunkt der Nebentheilung im Sinne der Theilungen um den Werth der Refraction für $h' = 0$ d. h. um 34′ verschoben ist, man anstatt h' ein $h = h' - \varrho$ als wahre Höhe der Sonne direct abliest.

Anstatt der bis jetzt wiederholt vorgekommenen Gl. (17) für den $\cos t$ hat Eble nun eine andere abgeleitet, worin anstatt φ und δ die sogenannte „Mittagshöhe" und „Mitternachtstiefe" der Sonne vorkommt und deren Ableitung uns sofort gelingt, wenn wir zunächst darauf achten dass

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi \, . \sin\delta &= \tfrac{1}{2}\cos(\varphi - \delta) - \tfrac{1}{2}\cos(\varphi + \delta) \\ \cos\varphi \, . \cos\delta &= \tfrac{1}{2}\cos(\varphi - \delta) + \tfrac{1}{2}\cos(\varphi + \delta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ist. Da nun Fig. 90, wenn s_o den Ort der Sonne zur Zeit der oberen, s_u zur Zeit der unteren Culmination, ferner AQ den Aequator, SN den Horizont vorstellt, Winkel

Fig. 90.



$$ACS = 90^0 - \varphi,$$

$$\measuredangle s_oCA = \measuredangle s_uCQ = \delta$$

und Winkel

$$s_oCS = H_o$$

die „Mittagshöhe", Winkel

$$s_uCN = H_u$$

die „Mitternachtstiefe" der Sonne vorstellt, so ist

$$\left.\begin{aligned} H_o &= 90^0 - \varphi + \delta = 90^0 - (\varphi - \delta) \\ H_u &= 90^0 - \varphi - \delta = 90^0 - (\varphi + \delta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

mithin auch

$$\left.\begin{aligned} \varphi - \delta &= 90^0 - H_o \\ \varphi + \delta &= 90^0 - H_u \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und wird demgemäss Gl. (17) mit Rücksicht auf (24) und (26) jetzt zu

$$\cos t = \frac{\sin h - \frac{1}{2}\sin H_o + \frac{1}{2}\sin H_u}{\frac{1}{2}\sin H_o + \frac{1}{2}\sin H_u}$$

oder zu

$$\cos t = \frac{\sin h - \dfrac{\sin H_o - \sin H_u}{2}}{\dfrac{\sin H_o + \sin H_u}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Der Schwerpunkt der Eble'schen Methode besteht nun weiter darin, dass die Auffindung des Werthes von t schliesslich nicht durch Rechnung, sondern mit Hilfe des Maasstabes C und des Netzes D, also durch eine rein mechanische Abmessung an einer Zeichnung bewerkstelligt

wird. Zu dem Ende halten wir uns einmal an die von Eble gegebene praktische Regel und sehen zu, wie diese mit unseren Entwickelungen im vor. §. im Einklang steht. Vorausgesetzt eine Vormittagsbeobachtung und eine positive Declination der ⨀, wie es der Figur 90 entspricht, wird nach dieser Regel der rechte Zeiger i auf die Mittagshöhe H_o, der linke Zeiger k auf die Mitternachtstiefe H_u und der mittlere Zeiger l rechts von μ auf die vom Sextanten gelieferte Höhe h der Sonne eingestellt. Mit Bezug auf die Gl. (22) ist demnach, wenn wir für ε der Reihe nach die Winkel H_o, H_u und h gesetzt denken und an L diesen drei Winkeln entsprechend Indices anbringen, auf dem Maasstab C gemessen, die Strecke

$$\left.\begin{aligned} \mu i &= L_1 = R \,.\, \sin H_o \\ \mu k &= L_2 = R \,.\, \sin H_u \\ \mu l &= L_3 \mp R \,.\, \sin h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Da nun ferner der Maasstab C so auf das Netz D gelegt werden muss, dass zwischen den beiden äusseren Zeigern i und k eine Horizontale des Netzes gerade dazwischen gefasst wird, so besteht, wenn wir der Gl. (23) entsprechend die halbe Länge dieser Horizontalen mit r bezeichnen, die weitere Gleichung

$$2r = L_1 + L_2$$

oder

$$r = \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

Denken wir weiter auf dieser Horizontalen von der Mitte m aus unsere Sinustheilung, an diese die entsprechenden Winkelgrade gesetzt und den Grad, worauf der mittlere Zeiger l hinweist, mit e bezeichnet, so ist, auf dem Maasstab dieser Horizontalen gemessen, die Strecke

$$ml = r \,.\, \sin e;$$

da aber die Strecke ml auch gleich

$$ml = \mu l - \mu m$$

und

$$\mu i - \mu m = r$$
$$\mu k + \mu m = r$$

mithin

$$\mu m = \frac{\mu i - \mu k}{2}$$

ist, so ergiebt sich zunächst auch

$$ml = \mu l - \frac{\mu i - \mu k}{2}$$

oder

$$ml = L_3 - \frac{L_1 - L_2}{2}$$

oder

$$r \,.\, sin\, e = L_3 - \frac{L_1 - L_2}{2}$$

oder wenn man für r den oben gefundenen Werth einsetzt

$$\frac{L_1 + L_2}{2} \,.\, sin\, e = L_3 - \frac{L_1 - L_2}{2}$$

woraus dann

$$sin e = \frac{L_3 - \frac{L_1 - L_2}{2}}{\frac{L_1 + L_2}{2}}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (28)

$$sin\, e = \frac{sin\, h - \frac{sin\, H_o - sin\, H_u}{2}}{\frac{sin\, H_o + sin\, H_u}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

folgt. Diese Gleichung mit der Gl. (27) verglichen, beweist aber dass

$$sin\, e = cos\, t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

ist, d. h. dass wir an den Index l, der den Winkel e auf dem Netze D bis jetzt bezeichnete, wenn wir anstatt e den, dem e entsprechenden, Stundenwinkel t ablesen wollen, anstatt e ein

$$t = 90^0 - e$$

und wenn wir gleich anstatt einer Winkelgrösse eine Zeitgrösse ablesen wollen, ein

$$t_{,} = \left(\frac{90 - e}{15}\right)^{h} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

anzuschreiben haben. Hierbei wird e positiv zu denken sein, wenn der Zeiger l von der Mittellinie mm aus nach rechts und negativ, wenn er von mm aus nach links auf eine Stundenlinie zz, hinweist. Der Stundenwinkel $t_{,}$ wird ferner hierbei von Mittag an nach Morgen hin gerechnet und verlangen wir nun noch, es solle der Zeiger l nicht diesen Stundenwinkel $t_{,}$ sondern gleich die Uhrzeit angeben, so wäre anstatt $t_{,}$ ein

$$T_v = \text{XII}^h - t_{,} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

an die betreffende Stelle, auf welche der Zeiger l auf dem Netze D hinweist, anzuschreiben. Vergleichen wir aber mit dieser unserer Auffassung die wirkliche Stundenaufschrift auf dem Netze D, so wird diese mit jener in völligem Einklang stehen. Denn gesetzt, der Zeiger wiese auf die Mitte m selbst hin, so wäre $e = 0^0$, $t_{,} = \left(\frac{90}{15}\right)^h = 6^h$

und $T_v = XII^h - 6^h = VI^h$ wie es auch wirklich abgelesen wird; gesetzt zweitens der Zeiger l wiese auf VIII^h hin, d. h. um zwei Stunden rechts von der Mitte m ab, so wäre $e = +2 \,.\, 15^0 = 30^0$, mithin $t_, = \left(\frac{90 - 30}{15}\right)^h = 4^h$ und $T_v = XII^h - 4^h = VIII^h$, wie es auch in Wirklichkeit vom Zeiger angezeigt wird; gesetzt drittens es wäre vom Zeiger auf die Stunde V^h links von m hingewiesen worden, so wäre $e = -15^0$, mithin $t_, = \frac{90 + 15}{15} = 7^h$ und somit $T_v = XII^h - 7^h = V^h$, wie es wirklich der Zeiger angiebt.

Für die Nachmittagsbeobachtung ist anstatt T_v ein $T_n = XII^h + t_,$ d. h. ein $T_n = t_,$ anzuschreiben. Sehen wir aber von einer zweiten Stundenaufschrift auf dem Netze D ab und benutzen dieselbe, die uns für eine Vormittagsbeobachtung dient, auch für die Nachmittagsbeobachtung, so ist kar, dass um von dieser am Zeiger l direct abgelesenen Stundenzahl, die wir T_v' nennen wollen, auf die Zahl $T_n = t_,$ zu kommen, wir

$$T_n = XII^h - T_v' \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (33)$$

setzen müssen. Denn würden wir z. B. ein $T_v' = VIII^h$ ablesen, so wäre $T_n = XII^h - VIII^h = IV^h$ Uhr, wie es der Wirklichkeit entspricht.

Anstatt für eine Nachmittagsbeobachtung so zu verfahren, kann man aber auch die Regel Eble's befolgen: nämlich die Zeigerstellungen auf dem Maasstabe C alle umgekehrt machen, d. h.

i auf die Mitternachtstiefe
k „ „ Mittagshöhe
l links von μ auf die Sonnenhöhe

einstellen und die Ablesung so annehmen, wie sie l auf dem Netze unmittelbar angiebt. Denn diese Einstellung resultirt aus der vorigen, wenn wir in Gl. (29) das h negativ und an die Stelle von H_o das H_u und umgekehrt setzen, wodurch, wenn wir für e jetzt $e_,$ schreiben

$$\sin e_, = \frac{-\sin h - \frac{\sin H_u - \sin H_o}{2}}{\frac{\sin H_u + \sin H_o}{2}} = \frac{-\sin h + \frac{\sin H_o - \sin H_u}{2}}{\frac{\sin H_o + \sin H_u}{2}}$$

wird und mit Rücksicht auf Gl. (27) jetzt

$$\sin e_, = -\cos t \text{ d. h. } e_, = -90^0 + t$$

oder

$$t = 90^0 + e_,$$

zu setzen ist. Führen wir anstatt dieses t wieder eine Zeitgrösse ein und bezeichnen diese mit $t_,'$ so ist

$$t_{,}' = \left(\frac{90^0 + e_{,}}{15}\right)^h$$

und als Uhrzeit an die Stundenlinien $zz_{,}$ des Netzes ein

$$T_n' = \mathrm{XII}^h + t_{,}'$$

oder

$$T_n' = t_{,}'$$

anzuschreiben. Denn zeigt der Zeiger l links von m z. B. auf III^h, so wäre $e_{,} = -3 \,.\, 15^0 = -45^0$; mithin $t_{,}' = \left(\frac{90 - 45}{15}\right)^h = 3^h$ und $T_n = \mathrm{III}^h$, wie der Zeiger wirklich ergiebt.

Für den zweiten Hauptfall, wobei δ negativ ist, wird die Mittagshöhe H_o kleiner wie die Mitternachtstiefe H_u ausfallen, d. h. es wird bei der Vormittagsstellung der Punkt μ immer rechts von m liegen. Im Uebrigen aber bleiben die Regeln so wie für eine positive Declination.

§. 93. Hiernach geben wir noch ein

Beispiel der Beobachtung und Berechnung. Am 14. März 1875 war nach einer halbe Secunden schlagenden und mittlere Zeit angebenden Uhr Nachmittags beobachtet worden

Uhrzeit.	Höhe der Sonne.
$4^h\ 29^m\ 6^s$	$28^0\ 30'$
31 42	15
33 56	0
36 20	27 45
38 33	30

Am 14. März ist für Greenwich $\delta = -2^0\ 34'\ 12'',5$ mit einer stündlichen Aenderung gleich $59'',14$; mithin für Marburg Corr. $\delta = \frac{2105}{3600} \,.\, 59'',14 = 34'',6$ und demgemäss für Marburg

$$\begin{aligned} \delta &= -\ 2^0\ 34'\ 47'' \\ 90^0 - \varphi &= \ \ 39\ 11\ 13 \\ H_o &= \ \ 36\ 36\ 26 \\ H_u &= \ \ 41\ 46\ \ 0. \end{aligned}$$

Wurde nun der Zeiger i gemäss der von Eble gegebenen Regel auf H_u und k auf H_o ebenso l der Reihe nach auf die fünf beobachteten Höhen links von μ eingestellt, so ergab sich

$$\begin{aligned} T_n' = \ & 2^h\ 23^m\ 15^s \\ & \ \ \ 25\ \ 45 \\ & \ \ \ 28\ \ \ 0 \\ & \ \ \ 30\ \ 15 \\ & \ \ \ 32\ \ 45. \end{aligned}$$

Da ferner die Zeitgleichung für Greenwich $+ 9^m\ 26^s,3$ betrug mit

einer stündlichen Aenderung von $-0^s,701$, so ist die Corr. für Marburg gleich $0,701 \frac{2105}{3600} = 0^s,4$, mithin $ZG = 9^m\, 26^s,7$, oder in runder Zahl $9^m\, 27^s$. Demgemäss werden die mittleren Zeiten T_u' gleich

$2^h\, 32^m\, 42^s$
35 12
37 27
39 42
42 12

und ziehen wir jetzt diese Zeiten von den entsprechenden Zeiten, welche die Uhr lieferte, ab, so erhalten wir den gesuchten Standfehler

$$s = +\; 1^h\, 56^m\, 24^s$$
56 30
56 29 im Mittel $s = +\; \mathbf{1^h\, 56^m\, 30^s}$
56 38
56 21

Hierzu müssen wir jedoch noch eine Bemerkung machen, welche geeignet ist, den Sinn der Eble'schen Methode noch schärfer aufzufassen, und gemäss derer unter Umständen auch noch eine genauere Bestimmung der Zeit möglich wird. Da nämlich die Sonne nicht im Meridian des Beobachters sondern ausserhalb dieses Meridians beobachtet wird, so leuchtet ein, dass wenn wir für δ den Werth für den Mittag einsetzen, d. h. wirklich die Mittagshöhe und Mitternachtstiefe einführen, wir eigentlich einen Fehler begehen. Da jedoch unter Umständen selbst die ungefähre Zeit der Beobachtung uns unbekannt ist, so würden wir auch gar nicht im Stande sein, ein der Beobachtungszeit entsprechend genaueres δ zu berechnen und würden so, wie wir es gethan haben, die Rechnung erst durchführen müssen, um schliesslich, nachdem die annähernd richtige Beobachtungszeit aus dieser ersten Rechnung erhalten ist, mittelst dieser einen genaueren Werth δ berechnen, um dann von neuem die Rechnung zu wiederholen und hiermit eine genauere Zeitbestimmung zu ermöglichen. Wird aber in den Gleichungen (24) für δ dieser genaue Werth eingeführt, so wird H_o und H_u streng genommen nicht mehr den Namen Mittagshöhe bzw. Mitternachtstiefe verdienen, doch wollen wir die Benennung beibehalten.

In unserem Beispiele ist z. B. die aus der Beobachtung sich ergebende Mitte der Beobachtungszeit in runder Zahl gleich $2^h\, 38^m$ und würde demgemäss die Corr. $\delta = 59'',14 \frac{2^h\, 38^m}{1^h} = 156'',7 = 2'\, 35'',7$ sein und $\delta = -2^0\, 32'\, 11''$, $H_o = 36^0\, 39'\, 2''$, $H_u = 41^0\, 43'\, 24''$ werden. Da nun der Maasstab C in Viertelgrade eingetheilt ist und man dem Augenmaass nach diese Viertelgrade sicher nur noch in

drei Theile gleich 5′ eintheilen kann, so wird, wenn wir bei der ersten Rechnung mit Rücksicht auf diese erreichbare Genauigkeit einstellen, $H_o = 36^0\ 35'$, $H_u = 41^0\ 45'$ und bei der Rechnung mit dem genaueren δ das $H_o = 36^0\ 40'$, $H_u = 41^0\ 45'$ zu rechnen sein. Als nun genau auch nach dieser letzteren Einstellung von i und k der Zeiger l abgelesen wurde, ergab sich

$T'_n = 2^h\ 23^m\ 45^s$	in mittlerer Zeit	$= 2^h\ 33^m\ 12^s$
26 15		35 42
28 30		37 57
31 0		40 27
33 15		42 42

und hiernach

$s = 1^h\ 55^m\ 54^s$	
56 0	
55 59	im Mittel $s = 1^h\ 55^m\ 55^s$
55 53	
55 51	

woraus man erkennt, dass es allerdings von erheblichem Einflusse werden kann, wenn man im Stande ist, die Rechnung von vornherein mit dem genaueren δ anzustellen, oder falls dies vorerst nicht möglich ist, die Rechnung zu wiederholen.

Bei dieser ganzen Frage ist es selbstverständlich, dass man möglichst genau einstellt und abliest, und empfiehlt es sich hierbei, die Zeiger i, k und l eigentlich gar nicht zu benutzen, sondern die betreffenden Stellen der Theilung des Maasstabes C selbst als Indices anzusehen. Namentlich wird es gut sein, sobald die Enden i und k genau auf eine Horizontale des Netzes D passen, an zwei Stellen auf den Maasstab C ein Gewicht zu legen, damit dieser ruhig liegen bleibt, die Ablesung der Stellen, welche den verschiedenen Höhen entsprechen, ohne Anwendung und Verschiebung von l gemacht werden kann und l nur dazu dient, dem Auge ungefähr die Gegend zu bezeichnen, wo die Höhengrade genau zu suchen sind.

Wir haben uns im Vorausgehenden darauf beschränkt, die nützliche Anwendung des Eble'schen Apparats nur mit Rücksicht auf eine Zeitbestimmung nach einer Beobachtung der Sonne darzuthun. In Wirklichkeit gestattet die Methode, noch eine Reihe anderer Aufgaben praktisch zu lösen, wohin ausser der Zeitbestimmung mit Hilfe von Fixsternen namentlich noch die Bestimmung des Azimuths der Sonne, der Planeten und der Fixsterne zu rechnen ist, und verweisen wir in dieser Beziehung auf die Originalabhandlung Eble's selbst.

Kapitel XI.

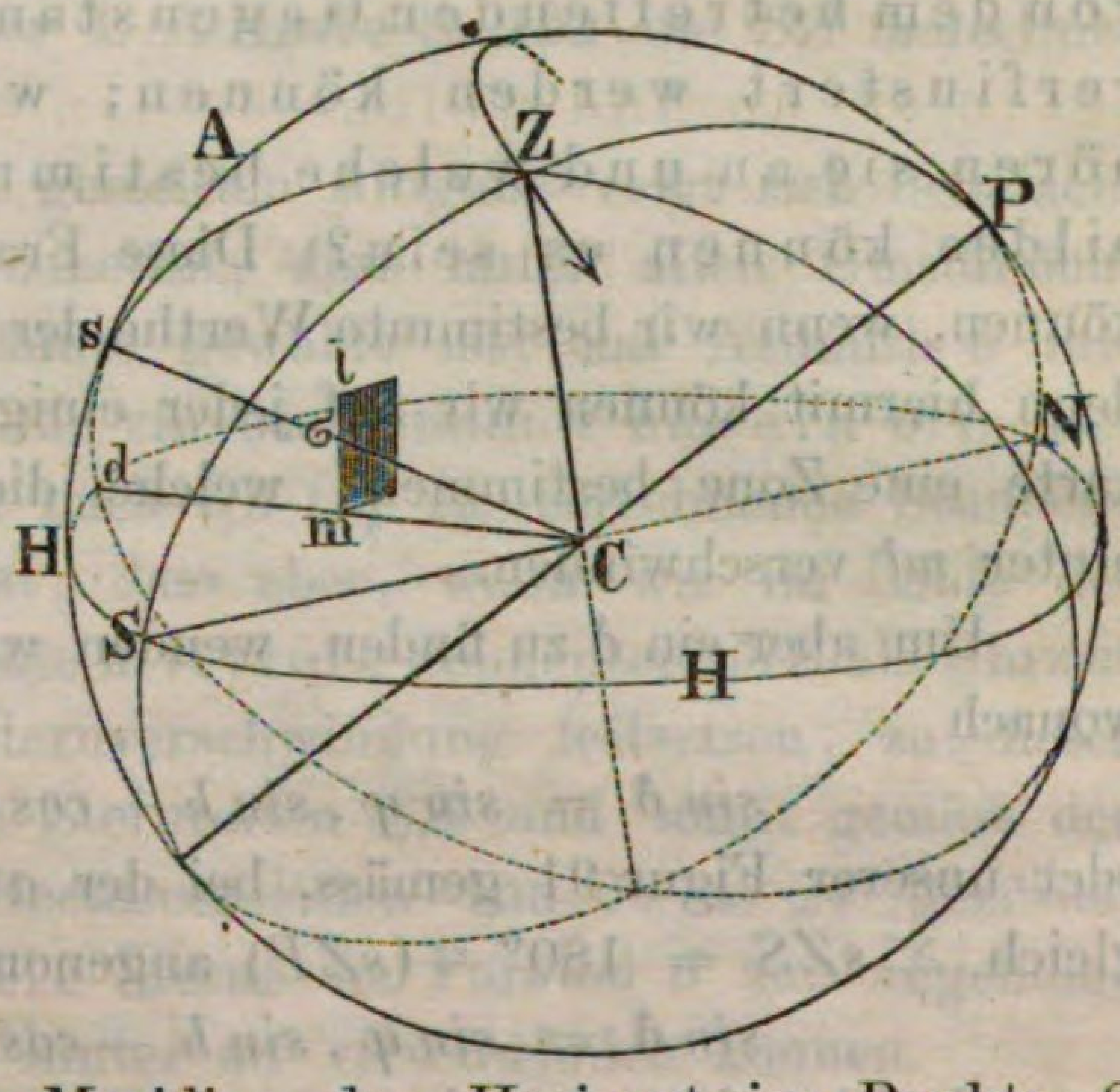
Zeitbestimmung mit Hilfe von Fixsternverschwindungen.

§. 94. Unter den einfachsten Hilfsmitteln, zunächst den Gang einer Uhr mit Genauigkeit zu bestimmen, steht die Beobachtung des Verschwindens von Fixsternen hinter einem terrestrischen Gegenstande mit in erster Linie. Die Methode setzt voraus: erstens den Besitz eines Fernrohrs, das aber auf besondere Güte und starke Vergrösserung keinen Anspruch zu machen braucht, und genügt schon ein gewöhnliches terrestrisches oder astronomisches Fernrohr von etwa 10facher Vergrösserung und 10 bis 12 Lin. Objectivöffnung. Ein Fadenkreuz braucht dieses Fernrohr auch nicht zu besitzen, indem der Verticalfaden vertreten ist durch eine Kante eines in einer grösseren Entfernung gelegenen Gegenstandes. Dieser letztere muss so gewählt werden, dass er seiner Lage nach als unveränderlich angesehen werden kann und empfiehlt sich hierzu am besten eine verticale Mauerkante eines Gebäudes, deren Entfernung so gross ist, dass ihr Bild zugleich mit den Bildern der beobachteten Fixsterne möglichst gleiche Deutlichkeit erhält, wozu wohl immer eine Entfernung von einigen hundert Schritten erfordert wird. Darüber hinausgehende Entfernungen sind noch mehr zu empfehlen, so lange eben nicht die Grösse des Bildes der Mauerkante beträchtlich darunter leiden sollte; anstatt der Mauerkante eine Blitzableiterstange zu wählen, wird, im Falle der Wind diese hin- und herbewegen kann, zu verwerfen sein; anstatt einer verticalen Kante eine schiefe, z. B. eine schief hinauflaufende Kante eines Thurmhelmes zu wählen, kann in Fällen, die wir kennen lernen werden, von schädlichem Einflusse sein und den zu beseitigen wenigstens bestimmte Weitläufigkeiten unvermeidlich wären. Ausserdem ist es gut, wenn diese Mauerkante möglichst hoch über dem Horizont liegt, damit die Sterne, die hinter ihr verschwinden sollen, nicht zu häufig in die Dünste des Horizonts eingehüllt werden und desshalb eine Beobachtung weniger scharf ausfällt.

Dieser Mauerkante gegenüber wird nun das Fernrohr mittelst einer leicht zu treffenden Einrichtung so befestigt, damit man sicher ist, dass seine den verschiedenen Sternen entsprechenden Lagen möglichst immer dieselben bleiben und braucht sich dieses Fernrohr eigentlich nur um eine horizontale Axe zu drehen; dreht es sich aber auch um eine verticale Axe, so werden gewisse Vorbereitungen zur eigentlichen Beobachtung erleichtert, indem man namentlich herannahende Sterne schon vorher gehörig verfolgen kann. Gestattet es die Beschaffenheit des Ortes, den der Beobachter für seinen Beobachtungsstandpunkt auswählt, so braucht das Fernrohr aber auch gar nicht einmal an einem Fenster oder einem Thürpfosten dauernd befestigt zu sein, sondern kann man dasselbe einfach nur immer an derselben Stelle und in derselben Weise an diesen Pfosten anlegen und immer so auf die gegenüberstehende Kante richten. Befindet sich etwa ein vorhandenes Fernrohr auf einem transportabelen Stative, so kann auch dieses passend aufgestellt und das auf ihm montirte Fernrohr zu derartigen Beobachtungen benutzt werden, falls man nur sicher ist, dass das Stativ und das Fernrohr bei einer zweiten, dritten etc. Beobachtung desselben Sterns seine Lage nicht geändert hat.

Die Auffassung des ganzen Zusammenhangs wird durch die Betrachtung unserer Fig. 91 bestimmter und genauer werden. Da den Fixsternen gegenüber nur Richtungen in Betracht kommen, so möge C den Ort des Beobachters, Cs die unveränderliche Richtung nach einem Fixstern vorstellen; bedeutet dann CP die Richtung nach dem Pol, CZ die Zenithrichtung, HH die Ebene des Horizonts, so wird ein durch Z und P gelegter Vertical zugleich den Meridian des Beobachters vorstellen, welcher Meridian den Horizont im Punkte S durchschneidet, den wir zugleich als den Südpunkt des Horizonts auffassen wollen. Ein weiterer Meridian durch P und s gelegt stellt den Stundenkreis (Meridian) des Sterns s vor und legen wir endlich noch durch Z und s einen grössten Kreis, so durchschneidet dieser zweite Vertical den Horizont HH in einem Punkte d so, dass $\sphericalangle dCs = h$ gleich der Höhe des Sterns über dem Horizonte ist, während PZs

Fig. 91.



unser namentlich im Anfange des Kap. IX genauer betrachtetes Dreieck, Pol-Zenith-Stern vorstellt. Nehmen wir ausserdem an, es wäre A der Punkt, in welchem der Meridian des Sterns vom Aequator durchschnitten würde, so stellt Bogen $As = \delta$ die Declination des Sterns vor, die der Figur gemäss negativ aufzufassen ist. Setzen wir ferner einmal fest: wir wollten das Azimuth von Süden über Westen von 0^0 bis 180^0 bis 360^0 rechnen, so ist der $\sphericalangle SZs = \sphericalangle SCd = a$ gleich dem Azimuth des Sterns, für welchen ausserdem $\sphericalangle ZPs = t$ den Stundenwinkel und $\sphericalangle ZsP = p$ den parallactischen Winkel bedeutet. Denken wir uns weiter in ml eine Mauerkante errichtet, die zugleich in die Ebene des Verticals sZC fällt, so wird der Stern s hinter derselben verschwinden in dem Momente, wo bei der Drehung des Zeniths Z in der Richtung des angedeuteten Pfeils der verdunkelnde Gegenstand ml die Stellung erreicht, die wir soeben von vornherein angenommen haben, d. h. mit andern Worten: es wird der Stern verschwinden im Momente, wo das mit der Drehung der Erde veränderliche Azimuth des Sterns d. h. der Winkel SZs gleich dem als unveränderlich anzunehmenden Azimuth SCm der Mauerkante geworden ist.

Mit Hilfe dieser Figur werden wir nun vor allem auch die Frage beantworten können: welche Sterne sind es überhaupt, die von dem betreffenden Gegenstande ml das Jahr hindurch verfinstert werden können; welchem Sternbilde gehören sie an und welche bestimmte Sterne dieses Sternbildes können es sein? Diese Frage wird beantwortet werden können, wenn wir bestimmte Werthe der Declination δ gefunden haben, denn hiermit können wir auf jeder einigermassen vollständigen Sternkarte eine Zone bestimmen, welche die Fixsterne umschliesst, die hinter ml verschwinden.

Um aber ein δ zu finden, wenden wir die dritte der Gl. (1) S. 368 wonach

$$\sin\delta = \sin\varphi \,.\, \sin h + \cos\varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos a$$

oder unserer Figur 91 gemäss, bei der a nicht gleich $\sphericalangle sZP$ sondern gleich $\sphericalangle sZS = 180^0 - (sZP)$ angenommen wird, die Gleichung

$$\sin\delta = \sin\varphi \,.\, \sin h - \cos\varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos a \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

an und folgt hieraus, dass zur Berechnung von δ auf diesem Wege ausser φ auch die Höhe $h = m\sigma$ und das Azimuth a bekannt sein muss. Die Höhe h wird sich nun mit irgend einem Winkelmesser, vielleicht auch mittelst anderer Hilfsmittel wenigstens annähernd finden lassen. Ebenso wird sich auch das Azimuth a der Mauerkante, falls ein Meridianzeichen vorhanden ist und man einen Winkelmesser verwendet, oder vielleicht auch schon aus einem genauen Plane der Ge-

gend finden lassen, so dass a und h wenigstens annähernd bekannt sind. Dieses zugegeben, lassen sich aus der Gleichung (1), wenn man für h einmal den kleinsten und einmal den grössten Werth h_1 und h_2, wie er der Länge der Mauerkante gemäss in Betracht kommen kann, einsetzt, zwei Werthe δ_1 und δ_2 berechnen, mittelst derer dann die betreffende Fixsternzone auf einer Sternkarte oder einem Globus bestimmt wird. Ist auf diese Weise ein, einem bestimmten h entsprechender Werth von δ gefunden, so lässt sich aus der Gleichung

$$sin\, h = sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta + cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta \,.\, cos\, t \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

der entsprechende Stundenwinkel t berechnen; da ferner, wie man aus dem Anblicke der Figur erkennen wird und auch schon auf S. 438 angegeben wurde

$$t = SZ - AR_* \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

und

$$AR_* = SZ - t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ist, so lässt sich, wenn man eine bestimmte Uhrzeit der Beobachtung wählt, dann leicht die zugehörige AR_* und hiermit nach einer Sternkarte das Sternbild und je nach der Genauigkeit der Rechnung auch der betreffende Stern finden, der um die bestimmte Zeit SZ bei der Beobachtung in Betracht kommen kann. Es versteht sich dabei von selbst, dass wenn die Uhrzeit nach einer mittleren Sonnenzeituhr gegeben ist, zunächst gemäss der Lösung der 4. Aufgabe S. 132 die SZ berechnet werden muss.

Bei der Lösung der oben gestellten Aufgabe zeigt sich demnach, um dies noch einmal hervorzuheben, dass unter allen Umständen, wenn eine bestimmte Mauerkante gewählt ist, das Azimuth a unveränderlich ist, dass ferner für ein bestimmtes h nur ein δ in Betracht kommt und somit der nach Gl. (2) zu berechnende Stundenwinkel t ebenfalls constant ist, dass aber, wenn wir im Laufe des Jahres auch noch eine bestimmte mittlere Sonnenzeit MZ als Uhrzeit für die Beobachtung einer Sternverschwindung festsetzen, zu dieser nach und nach alle möglichen Sternzeiten SZ und somit gemäss der Gl. (4) auch alle möglichen Rectascensionen von 0^h bis 24^h gehören, d. h. dass nach und nach alle Sterne im Parallel δ zur angenommenen mittleren Uhrzeit MZ hinter ml verschwinden können.

Ein Beispiel möge die dem Vorausgehenden entsprechende Berechnung noch näher erläutern. Zunächst wurde mit einer Schmalkalder'schen Patentbussole rasch das Azimuth einer etwa 750 Fuss entfernten verticalen Kante des Marburger Schlosses annähernd bestimmt und ergab sich hierbei aus fünf Ablesungen der Winkel A zwischen dem magnetischen Süden und der Mauerkante, welche letztere nach Westen hin von ersterem abwich gleich

$$\left.\begin{array}{r} 37^0\ 0' \\ 37\ \ 0 \\ 36\ 50 \\ 36\ 45 \\ 37\ 15 \end{array}\right\} \text{ im Mittel } A = 36^0\ 58'.$$

Da nun die magnetische Declination von Marburg gegenwärtig nahezu $14^0\ 20'$ beträgt, so ist das Azimuth $a = 22^0\ 38'$ von S nach W gerechnet. Eine Messung, die auf der vorzüglichen kurhessischen topographischen Karte im Maasstabe von $\frac{1}{25000}$ vorgenommen wurde, ergab das Azimuth nahe zugleich 22^0. Die weiter vorgenommene Höhenmessung lieferte $h_1 = 12^0\ 3'$, $h_2 = 13^0\ 36'$, mithin ein mittleres $h = 12^0\ 49'\ 30''$ und berechnet sich nach Gl. (1)

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -24^0\ \ 6'\ 47'' \\ \delta_2 &= -22\ \ 37\ \ 8 \\ \delta &= -23\ \ 21\ \ 58 \end{aligned}$$

und hiermit nach Gl. (2) für das mittlere $\delta = -23^0\ 21'\ 58''$

$$t = 24^0\ 7'\ 40'' = 1^h\ 36^m\ 31^s.$$

Würde nun z. B. gefragt, welche Rectascension kommt den Sternen zu, die Abends um $MZ = 9^h\ 30^m$ am 1. März 1875 in der mittleren Höhe h der Mauerkante verschwinden, so ist für Marburg 1. März 1875 $\overset{+}{A\!R}\odot = 22^h\ 35^m\ 26^s$; ferner $9^h\ 30^m\ MZ = 9^h\ 31^m\ 34^s$ Sternzeit, mithin die für die Gl. (4) einzusetzende $SZ = 22^h\ 35^m\ 26^s + 9^h\ 31^m\ 34^s = 8^h\ 7^m\ 0^s$ und demgemäss nach Gl. (4)

$$A\!R_* = 8^h\ 7^m\ 0^s - 1^h\ 36^m\ 32^s = \mathbf{6^h\ 30^m\ 28^s}.$$

Eine solche Rectascension und die obigen Declinationsgrenzen führen auf das Sternbild von Canis major und genauer auf die Sterne o^1 und o^2 Can. maj., deren Verschwinden in der That um jene Zeit wiederholt beobachtet wurde.

Wenn wir blos Sterne bis zur 5. Grösse berücksichtigen wollen, so ergiebt sich für den betreffenden Standpunkt und die bezeichnete Mauerkante die folgende Zusammenstellung von Sternbildern bzw. der ihnen angehörenden Sterne, wobei noch bemerkt werden mag, dass diese Zusammenstellung nach dem „Atlas novus coelestis etc. von C. L. Harding, Goettingae 1822“ gemacht wurde, und dass in ihr diejenigen Sterne, die im genannten Atlas keine Nummer oder keine Buchstabenbezeichnung führen, einfach mit x bezeichnet worden sind und ferner dass die Grösse der Sterne durch eine in eine Klammer eingeschlossene Ziffer angegeben ist.

Rectascension.	Sternbilder.	Sterne.
0^h bis III^h	Walfisch; Eridanus;	0;
III „ IV	Eridanus;	15 (5); 27 (5);
IV „ V	Eridan.; Brandenb. Schild;	0;
„ „ „	Haase;	ε (4);
V „ VI	„	0;
„ „ „	Canis major;	x (5);
VI „ VII	„ „	ξ^1(5); ξ^2(5); o^1(4); o^2(4);
VII „ VIII	„ „	x (5);
„ „ „	Argo;	15 (4);
VIII „ IX	Argo; Pyxis nautica;	0;
IX „ X	Felis;	x (5); x (5);
X „ XI	Hydra;	44 (5);
XI „ XII	„	x (5);
„ „ „	Corvus;	α (4);
XII „ XVI	Corvus; Hydra; Turdus solitarius; Waage; Scorpion;	0;
„ „ „		0;
XVI „ XVII	Scorpion;	19 (5);
„ „ „	Ophiuchus;	5 (5);
XVII „ XVIII	„	39 (5); 44 (5); 51 (5);
„ „ „	Schütze;	4 (5);
XVIII „ XIX	„	ν^1 (5); ν^2 (5);
XIX „ XXI	Schütze; Steinbock;	0
XXI „ XXII	Steinbock;	ζ (4); 36 (5);
„ „ „	Globus aërostaticus;	41 (5);
XXII „ XXIII	Wassermann;	89 (5);
XXIII „ XXIV	„	0.

Die Zusammenstellung zeigt, dass in dieser Zone von $\delta = -22^0\ 37'\ 8''$ bis $\delta = -24^0\ 6'\ 47''$ keine Sterne 1ter, 2ter und 3ter Grösse vorkommen, dass selbst die Sterne 4ter und 5ter Grösse nicht zahlreich vertreten sind, und wird man unter Umständen genöthigt sein, Sterne 6ter Grösse zu beobachten, welche aber in solcher Zahl anzutreffen sind, dass an jedem Tage eine Beobachtung möglich wird, wobei jedoch zu bemerken ist, dass diese Sterne 6ter Grösse bei Anwendung eines kleinen Fernrohrs für eine deutliche Beobachtung immerhin schon eine reine Luft verlangen.

Zunächst muss nun noch eine genauere Erörterung über das Verschwinden der Sterne stattfinden und ist zu dem Ende die Figur 92 entworfen worden. In ihr stellt K die Kante der Mauer KK', ferner M die Mitte des Objectivs und m die Mitte des Fadenkreuzes vor, falls wir uns ein solches einmal in der Brennebene des Objectivs angebracht

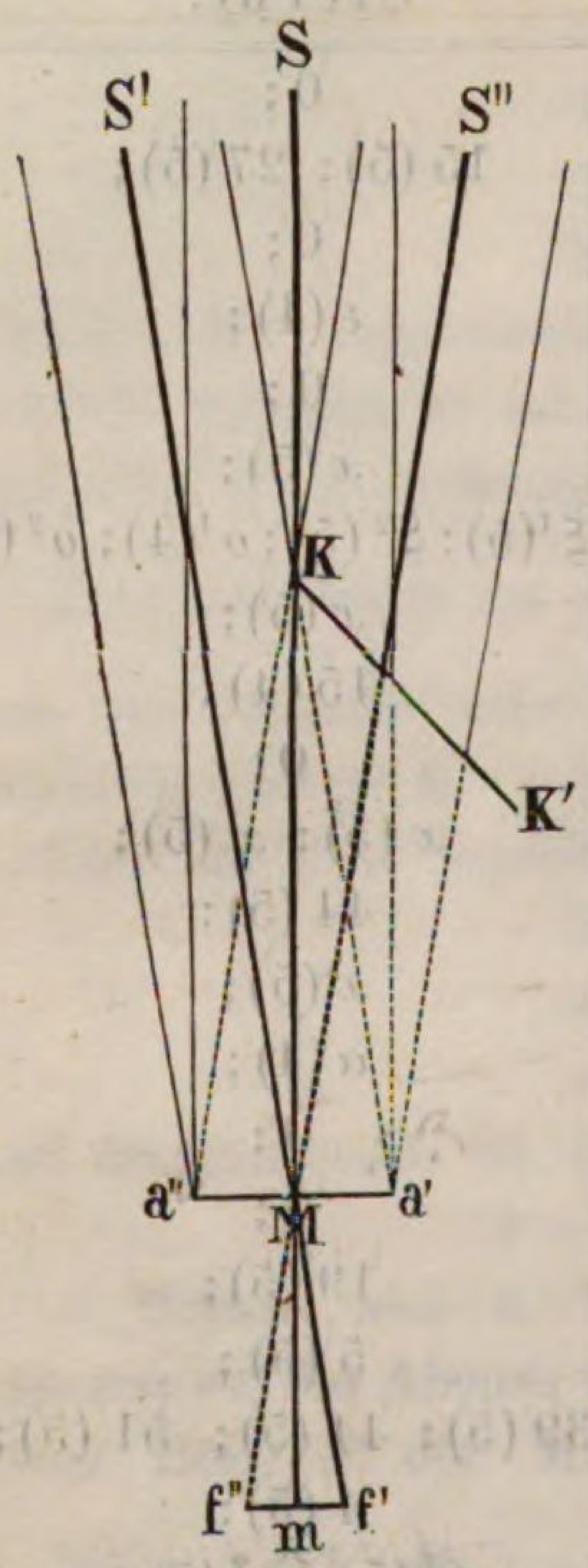


Fig. 92.

dächten. Da sich nun das Fernrohr immer so richten lässt, dass das Bild von K in die Mitte des Gesichtsfeldes fällt, so nehmen wir hiernach an, es lägen m, M und K in einer und derselben Verticalebene. Stellt dann $a'a''$ die Oeffnung des Objectivs vor, so wird das Bild des Sterns anfangen lichtschwächer zu werden, wenn der Stern in der Richtung $S'M$ seine Strahlen ins Fernrohr sendet, denn in diesem Momente wird gerade der äusserste Strahl $S'a'$ die entgegenstehende Mauerkante K streifen. Bewegt sich nun der Stern scheinbar von S' nach S weiter, so wird, falls er in der Richtung MS steht, die rechte Hälfte des Strahlenbündels S von der Mauer aufgehalten und in Folge hiervon das Bild m nur noch die halbe Helligkeit vom Bilde f' besitzen. Bewegt sich hierauf der Stern von S nach S'', so wird in dieser Stellung des Sterns das gesammte Bündel S'' von der Mauer aufgehalten. Während also das Bild des Sterns im Gesichtsfelde von f' nach f'' wandert, wird die Helligkeit desselben continuirlich bis zum völligen Verschwinden abnehmen und kann man jetzt fragen: ob die Dauer der Abnahme dieser Helligkeit eine messbare Zeit sei? Die Frage kann namentlich mit Rücksicht auf unsere ausführlichen Erläuterungen über das Wesen und die Berechnung der Fädendistanzen im Kap. VIII §. 72 leicht beantwortet werden. Denn bezeichnen wir die Fädendistanz $f'Mf''$ mit f, so ist nach Gl. (10) S. 341, wenn wir uns erlauben, für $\sin \Delta\tau$ und $\sin f$ ein $\Delta\tau$ und f zu setzen und gleich, um $\Delta\tau$ als eine Zeitgrösse zu haben, mit 15 dividiren, die dieser Fädendistanz einsprechende Zeit gleich

$$\Delta\tau = \frac{f}{15 \, . \cos\delta}.$$

Da nun aber der Winkel f auch gleich $\measuredangle\, a'Ka''$ ist und dieser Winkel, wenn E die Entfernung der Mauer MK, vom Standpunkte M des Beobachters und $w = a'a''$ die Objectivweite bedeutet, auch gleich $206265'' \frac{w}{E}$ gesetzt werden darf, so wird in Zeitsecunden ausgedrückt

$$\Delta\tau = 206265 \frac{w}{15 \, . E \, . \cos\delta} = 13751^s \frac{w}{E \, . \cos\delta} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

woraus sich ergiebt, dass die Dauer des Verschwindens direct proportional der Objectivöffnung und umgekehrt proportional der Ent-

fernung der Mauer ist. Für unsere Beobachtung wurde häufig ein Kometensucher mit 2,4 Zoll Objectivweite angewandt und war E etwa gleich 750′, so dass

$$\Delta\tau = 13751^s \frac{0,24}{750 \,.\, cos\,(23^0\,22')} = 4^s,8$$

wird, woraus man erkennt, dass dieses successive Verschwinden der Sterne unter mittleren Breite beobachtet werden kann, aber in dem Maasse auffälliger wird, als der Beobachter sich dem Aequator nähert, weil dann sein Horizont mehr und mehr durch den Pol lauft und Sterne in Betracht kommen, deren Declination nicht weit von 90⁰ entfernt liegt.

Es ist einleuchtend, dass mit der Zunahme der Dauer dieser Zeit des Verschwindens eine Unsicherheit in die Beobachtung hineingetragen wird. Für den Fall jedoch, dass dieselbe nur wenige Secunden beträgt, wird der Moment des eigentlichen Verschwindens unzweifelhaft sein und somit, da dieses successive Verschwinden für denselben Stern sich in derselben Weise vollzieht und höchstens ein klein wenig wegen der Veschiedenheit der Reinheit der Luft veränderlich ist, von keinem bemerkenswerthen Einfluss auf die Zeitbestimmung sein.

Die Figur 92 wird ausserdem alle Gründe dafür erkennen lassen, warum es nöthig ist, das Fernrohr immer möglichst in derselben Lage der Kante K gegenüber zur Anwendung zu bringen.

§. 95. Da unsere vorausgehenden Betrachtungen zeigten, wie der Stundenwinkel t sich finden lässt, wenn man die Declination δ und die Höhe h sowie die Polhöhe φ kennt und hiermit unter Benutzung der Gl. (3) auch die Sternzeit SZ gefunden werden kann, so liesse sich unsere Methode sofort anwenden, um die absolute Zeit zu bestimmen und somit den Standfehler s einer Uhr zu finden. In diesem Falle müsste also δ bekannt sein, was voraussetzt, dass man gerade Sterne beobachten könnte, deren Position in einem Jahrbuche oder auf einer Sternkarte genau verzeichnet ist, was aber für alle Sterne nicht angenommen werden kann, insofern z. B. im N. A. gegenwärtig nur 147 Sterne als solche aufgenommen werden. Wollte man aber δ erst selbst genau mit der Gl. (1) finden, so müsste, wie wir wissen, h und a genau bekannt sein, was wiederum solche Hilfsmittel und so sorgfältige Beobachtungen voraussetzt, dass überhaupt die ganze Methode der Zeitbestimmung, so lange es sich um den Standfehler s handelt, zunächst nicht anwendbar erscheint.

Desto sicherer und überaus bequem gestattet aber die Methode den Gang einer Uhr zu bestimmen, indem hierzu weder a noch h noch δ bekannt zu sein braucht, und es einfach nur nöthig ist, die Zeit des Verschwindens zu notiren. Wir wollen zu dem Ende annehmen,

wir hätten am

$$p_0,\ p_1,\ p_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{Tage}$$

eine Beobachtung angestellt und wäre an jedem dieser Tage jeder der Sterne

$$S^{\mathrm{I}},\ S^{\mathrm{II}},\ S^{\mathrm{III}}\ .\ .\ .\ .\ .$$

beobachtet worden und zwar entsprechend am

$$\begin{array}{llllll} p_0. & \text{Tage zur Zeit} & t_0^{\mathrm{I}}, & t_0^{\mathrm{II}}, & t_0^{\mathrm{III}} & .\ .\ .\ .\ . \\ p_1. & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & t_1^{\mathrm{I}}, & t_1^{\mathrm{II}}, & t_1^{\mathrm{III}} & .\ .\ .\ .\ . \\ p_2. & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & t_2^{\mathrm{I}}, & t_2^{\mathrm{II}}, & t_2^{\mathrm{III}} & .\ .\ .\ .\ . \\ . & .\ .\ .\ . & . & . & . & \\ . & .\ .\ .\ . & . & . & . & \end{array}$$

so leuchtet ein, dass wir auf diese Weise zunächst bestimmen können

1) wie gross der Gangfehler einer Uhr ist;
2) wie viel später oder früher jeder der beobachteten Sterne verschwindet, wie ein bestimmter Stern, den man aus der Schaar der überhaupt beobachteten Sterne für diesen Vergleich auswählt, und als welchen wir immer den Stern S^{I} ansehen wollen.

Den ersten Punkt anlangend, ist klar, dass wenn wir z. B. den mittleren Gang zwischen dem p_0 und p_2. Tage bestimmen wollen und voraussetzen, die Uhr sei eine Sternuhr, sowie ferner annehmen, es lägen zwischen p_2 und p_0 eine Anzahl von n Tagen, der aus der Beobachtung der einzelnen Sterne abgeleitete Gang gleich

$$\left.\begin{aligned} g_{\prime} &= \frac{t_2^{\mathrm{I}} - t_0^{\mathrm{I}}}{n} \\ g_{\prime\prime} &= \frac{t_2^{\mathrm{II}} - t_0^{\mathrm{II}}}{n} \\ g_{\prime\prime\prime} &= \frac{t_3^{\mathrm{III}} - t_0^{\mathrm{III}}}{n} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

mithin der genauere Werth des Ganges g als Mittel der Einzelwerthe gleich

$$g = \frac{g_{\prime} + g_{\prime\prime} + g_{\prime\prime\prime}\ .\ .\ .\ .}{m} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

ist, wenn m die Anzahl der beobachteten Sterne bedeutet.

Für den Fall, dass man eine mittlere Zeituhr bei der Beobachtung verwandt hätte, müssen anstatt der Gleichungen (6) bzw. (7) andere substituirt werden. Da nämlich der Sterntag um $3^{\mathrm{m}}\ 55^{\mathrm{s}},909$ (mittlerer Sonnenzeit) kürzer ist, wie der mittlere Sonnentag, so wird, wenn in einem bestimmten Momente das Verschwinden nach einer Sternuhr beobachtet wurde, das nächste Verschwinden, falls $g = 0$ ist, um 24 Sternstunden später erfolgen; war aber eine mittlere Zeituhr benutzt worden, so findet dieses zweite Verschwinden, selbst wenn

auch der Gang dieser Uhr gleich Null ist, nicht um 24^h sondern um $24^h - 3^m\ 55^s{,}909$ später statt. Ebenso würde die Beobachtung des n^{ten} Verschwindens nicht um $n\,.\,24^h$ sondern $n\,(24^h - 3^m\ 55^s{,}909)$ später angezeigt werden, d. h. es müsste, wenn das 1^{ste} Verschwinden zur Zeit t_0 stattfand, das n^{te} zur Zeit

$$t_n = t_0 + n\,.\,(24^h - 3^m\ 55^s{,}908)$$

oder, da man $n\,.\,24^h$ als Uhranzeige weglassen darf, zur Zeit

$$t_n = t_0 - n\,.\,(3^m\ 55^s{,}909) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

angezeigt werden. Zeigt aber die Uhr dies nicht, sondern anstatt t_n ein t'_n so ist

$$g = \frac{t'_n - t_n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

der gesuchte Gang der mittleren Zeituhr. Man muss demnach, zuerst nach Gl. (8) die Zeit t_n berechnen, um so schliesslich nach Gl. (9) den Gang bestimmen zu können, während bei der Sternuhr anstatt t_n einfach der Werth t_0 einzusetzen ist.

Was den zweiten Punkt anlangt, so leuchtet folgendes ein. Bezeichnen wir die Zeit, um welche am p_0. Tage der Stern

S^{II} später wie S^{I} verschwindet oder $t_0^{II} - t_0^{I}$ mit $\varDelta\tau_0^{II}$
S^{III} „ „ S^{I} „ „ $t_0^{III} - t_0^{I}$ „ $\varDelta\tau_0^{III}$
. . . .

ebenso dieses spätere Verschwinden am p_1. Tage mit

$$\varDelta\tau_1^{II},\ \varDelta\tau_1^{III}\ \ldots\ldots$$

u. s. w., so erhält man, falls für den Vergleich von S^{II} mit S^{I} eine Anzahl n_2, für den Vergleich von S^{III} mit S^{I} eine Anzahl n_3 Beobachtungen etc. vorliegen, aus den Einzelwerthen $\varDelta\tau_0^{II}$, $\varDelta\tau_0^{III}$ . . . .; $\varDelta\tau_1^{II}$, $\varDelta\tau^{III}$ . . . u. s. w. die Mittelwerthe

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\tau^{II} &= \frac{\varDelta\tau_0^{II} + \varDelta\tau_1^{II} + \ldots.}{n_2} \\ \varDelta\tau^{III} &= \frac{\varDelta\tau_0^{III} + \varDelta\tau_1^{III} + \ldots}{n_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und stellen diese Mittelwerthe die genaueren Zeitintervalle dar, welche zwischen dem Verschwinden von S^{II}, S^{III} . . . gegenüber S^{I} an irgend einem Tage liegen.

Von der Genauigkeit dieser Werthe wird es nun abhängen: ob dieselben für bestimmte weitere Zwecke vortheilhaft zu verwenden sind. Geben wir nämlich diese Genauigkeit zu, so bietet der Besitz der Zeiten $\varDelta\tau^{II}$, $\varDelta\tau^{III}$ . . . . zunächst folgenden Vortheil. Es wäre denkbar, man hätte an irgend einem Tage p_0 aus der überhaupt in Betracht kommenden Zahl von Sternen z. B. die Sterne

$$S^{III},\ S^{VI},\ S^{VII} \text{ zur Zeit } t_0^{III},\ t_0^{VI},\ t_0^{VII}$$

beobachtet, während S^{I}, S^{II}, S^{IV}, S^{V} nicht hätten beobachtet werden können, an einem anderen Tage p_1 dagegen seien die Sterne

$$S^{II},\ S^{IV},\ S^{V},\ S^{VI} \text{ zur Zeit } t_1^{II},\ t_1^{IV},\ t_1^{V},\ t_1^{VI}$$

aber nicht die Sterne S^{I}, S^{III} und S^{VII} beobachtet worden. Dies angenommen würde, soweit wir bis jetzt urtheilen können, die Beobachtung von S^{II}, S^{III}, S^{IV}, S^{V} und S^{VII} ganz nutzlos gewesen sein, da nur der Stern S^{VI}, der an beiden Tagen p_0 und p_1 beobachtet wurde, zur Bestimmung des Gangs dienen kann. Ganz anders aber wird die Sachlage, wenn wir die betreffenden Werthe $\Delta\tau$ schon besitzen. Denn jetzt lassen sich aus den beobachteten Zeiten am Beobachtungstage p_0 für den Stern S^{I}, welcher direct an diesem Tage gar nicht beobachtet wurde, die Zeiten

$$\left.\begin{aligned} t_0^{I} &= t_0^{III} - \Delta\tau_0^{III} \\ t_0^{I} &= t_0^{VI} - \Delta\tau_0^{VI} \\ t_0^{I} &= t_0^{VII} - \Delta\tau_0^{VII} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und ebenso aus den Beobachtungszeiten am Beobachtungstage p_1 die Zeiten

$$\left.\begin{aligned} t_1^{I} &= t_{1II} - \Delta\tau_1^{II} \\ t_1^{I} &= t_1^{IV} - \Delta\tau_1^{IV} \\ t_1^{I} &= t_1^{V} - \Delta\tau_1^{V} \\ t_1^{I} &= t_1^{VI} - \Delta\tau_1^{VI} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

berechnen, so dass aus den drei ersten Einzelwerthen t_0^{I} ein Mittelwerth t_0^{I} und aus den vier anderen Werthen ebenfalls ein Mittelwerth t_1^{I} abgeleitet werden kann, wobei die Differenz $(t_1^{I} - t_0^{I})$ durch die Anzahl n Tage, die zwischen der Beobachtung am p_0 und p_1 Tage liegen, dividirt offenbar einen viel genaueren Werth

$$g = \frac{t_1^{II} - t_0^{I}}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

für den Gang liefert, als wenn wir nur den einen Stern S^{VI} für diese Bestimmung, eben desshalb, weil die übrigen sechs Sterne nicht gleichzeitig an beiden Beobachtungstagen zu beobachten waren, hätten benutzen können.

Ein Beispiel wird den im Vorausgehenden dargestellten Zusammenhang noch weiter erläutern. An verschiedenen Tagen waren nach dem Kessels'schen Chronometer die zwei Sterne o^1 und o^2 Can. maj. sowie der Stern 15 im „Schiff" beobachtet worden, nämlich 1875 am

21. Febr.	o^1	zur Zeit	2^h	7^m	38^s		
„ „	o^2	„ „	2	16	5	$\varDelta\tau_0^{II} =$	8^m $27^s,0$
23. „	o^1	„ „	1	59	49 ,5		
„ „	o^2	„ „	2	8	16 ,0	$\varDelta\tau_1^{II} =$	8 26 ,5
5. März	o^1	„ „	1	20	49		
„ „	o^2	„ „	1	29	17	$\varDelta\tau_2^{II} =$	8 28 ,0
9. „	o^1	„ „	1	5	16		
„ „	o^2	„ „	1	13	41	$\varDelta\tau_3^{II} =$	8 25 ,0
„ „	15	„ „	2	18	14 ,5	$\varDelta\tau_3^{III} =$	1^h 12 58 ,5;

ferner wurde, nachdem das Chronometer einmal aufzuziehen vergessen worden war, noch beobachtet am

13. März	o^1	zur Zeit	8^h	38^m	$17^s,0$		
„ „	o^2	„ „	8	46	42 ,5	$\varDelta\tau_4^{II} =$	8^m $25^s,5$
„ „	15	„ „	9	51	16 ,0	$\varDelta\tau_4^{III} =$	1^h 12 59 ,0.

Wir wollen nun zunächst annehmen, die Beobachtung am 23. Febr., 5. März und 13. März hätte gar nicht stattgefunden, sondern es wäre blos die am 21. Febr. und 9. März gelungen und man wollte den mittleren Gang g für diese Zwischenzeit von $n = 16$ Tagen nach Gl. (6) bzw. Gl. (7) bestimmen. Da am 21. Febr. der Stern 15 Argo nicht beobachtet wurde, so kommt er zunächst nicht in Betracht; da ferner das Chronometer nach mittlerer Zeit gieng, so müssen wir vorerst die Zeiten t_n der Gl. (8) berechnen. Es ist aber 16. $(3^m\ 55^s,909) = 1^h\ 2^m\ 54^s,5$ mithin

$$t_n^I = 2^h\ 7^m\ 38^s - 1^h\ 2^m\ 54^s,5 = 1^h\ 4^m\ 43^s,5$$
$$t_n^{II} = 2\ \ 16\ \ 5 - 1\ \ 2\ \ 54,5 = 1\ \ 13\ \ 10,5$$

und hiermit n. Gl. (9)

$$g_{,} = \frac{1^h\ 5^m\ 16^s,0 - 1^h\ 4^m\ 43^s,5}{16} = \frac{32^s,5}{16} = 2^s,031$$

$$g_{,,} = \frac{1^h\ 13^m\ 41^s,0 - 1^h\ 13^m\ 10^s,5}{16} = \frac{30^s,5}{16} = 1^s,906$$

und demgemäss nach Gl. (7)

$$g = \frac{2^s,031 + 1^s,906}{2} = 1^s,969.$$

Nun gestatten aber vor allem unsere Beobachtungen an den fünf verschiedenen Tagen eine genauere Bestimmung der Grössen $\varDelta\tau$. Denn es liegen uns zur Bestimmung von $\varDelta\tau^{II}$ fünf, dagegen zur Bestimmung von $\varDelta\tau^{III}$ zwei Beobachtungen vor und ist nach den Gl. (10)

$$\varDelta\tau^{II} = 8^m + \frac{27^s,0 + 26^s,5 + 28^s,0 + 25^s,0 + 25^s,5}{5} = 8^m\ 26^s,40$$

$$\varDelta\tau^{III} = 1^h\ 12^m + \frac{58^s,5 + 59^s,0}{2} = 1^h\ 12^m\ 58^s,75.$$

Gesetzt nun, wir hätten am 21. Febr. blos o^2 Can. maj., dagegen am

9. März blos 15 Arg[illegible] beobachtet, so würde eine Bestimmung des Gangs zunächst nicht möglich sein; dennoch aber gelingt diese sehr wohl, sobald wir von unseren Werthen $\varDelta\tau$ Gebrauch machen, bei denen wir ja einmal zugeben können, sie seien zu einer anderen Zeit als gerade in der Zeit vom 21. Febr. bis zum 13. März gewonnen worden. Nach Gl. (11) ist

$$t_0^{I} = t_0^{II} - \varDelta\tau^{II} = 2^h\,16^m\,5^s{,}0 - 8^m\,26^s{,}40 = 2^h\,7^m\,38^s{,}60$$

und nach einer ähnlichen Gleichung wie Gl. (12)

$$t_3^{I} = t_3^{III} - \varDelta\tau^{III} = 2^h\,18^m\,14^s{,}5 - 1^h\,12^m\,58^s{,}75 = 1^h\,5^m\,15^s{,}75$$

und demgemäss nach Gl. (13), wenn wir wegen der mittleren Zeituhr von t_0^{I} erst $n\,(3^m\,55^s{,}909) = 1^h\,2^m\,54^s{,}5$ abziehen und so $1^h\,4^m\,44^s{,}1$ erhalten

$$g = \frac{1^h\,5^m\,15^s{,}75 - 1^h\,4^m\,44^s{,}1}{16} = \frac{31^s{,}65}{16} = 1^s{,}979.$$

Bezüglich der Bestimmung der Zeitintervalle $\varDelta\tau$ wird hernach noch eine Bemerkung gemacht werden.

§. 96. Soweit wir bis jetzt unsere Methode verfolgt haben, gestattet sie nur den Gang, aber nicht auch den Stand einer Uhr zu bestimmen. Dennoch aber ist sie auch in dieser Beziehung von Nutzen, wie wir sogleich sehen werden. Es ist nämlich denkbar, dass man mit Hilfe einer anderen Zeitbestimmungsmethode den Stand einer Uhr bestimmt habe und zwar für einen bestimmten Moment T am p Tage des Jahres, und dass umgekehrt über den Gang dieser Uhr noch Nichts bekannt ist. Gelingt dann an demselben p Tage oder an einem der nächstfolgenden Tage mit derselben Uhr eine Beobachtung von Fixsternverschwindungen, also z. B. an einem Tage, den wir mit p_0 bezeichnen wollen, gelingt zweitens an einem dritten Tage p_1 eine zweite Beobachtung der Fixsternverschwindungen, so lässt sich aus der Beobachtung am p_0 und p_1 Tage nach den vorausgegangenen Regeln der Gang der Uhr finden. Dürfen wir dann der Uhr eine Regelmässigkeit in ihrem Gange zutrauen, so ist es erlaubt, falls die Tage p und p_1 nicht zu weit auseinanderliegen, anzunehmen, dass derselbe Gang auch für die Zeit zwischen dem p und p_0 Tage sowie zwischen dem Momente T des p Tags und den Momenten der Fixsternverschwindungen am p_0 Tage gegolten habe, und lässt sich sonach auch der Stand der Uhr für die Momente der Fixsternverschwindungen am p_0 Tage finden, womit dann weitere Vortheile, die wir noch bezeichnen werden, verbunden sind.

Nehmen wir z. B. an, der Moment T sei der mittlere Mittag des p Tags und der Stand der Uhr, die wir zunächst als eine mittlere Zeituhr voraussetzen, in diesem Momente sei s; nehmen wir ferner an, dass an einem auf p folgenden Tage p_0 die Beobachtung von Fixstern-

verschwindungen gelungen sei, und halten zunächst der Einfachheit halber nur an der Verschwindung von einem und demselben Stern S zur Zeit t_0 fest, geben ausserdem zu, es wäre m Tage nach der Beobachtung t_0 eine zweite Beobachtung der Zeit des Verschwindens von S gelungen, und sei aus diesen beiden Beobachtungen ein Gang für die Uhr gleich g erkannt worden, so würde diese Uhr, wenn sie seit dem Momente T einen Gang gleich Null gehabt hätte, die erste Verschwindung am p_0 Tage nicht zur Zeit t_0, sondern zu einer Zeit t_0' angezeigt haben, welche Zeit t_0' sich sofort berechnen lässt. Denn ziehen wir vom Momente (p_0, t_0) die Zeit des Moments (p, T) ab, so erhalten wir die Zwischenzeit, welche wir nöthig haben, um die Berechnung der Correction wegen des Ganges der Uhr machen zu können und ist diese

$$\text{Corr.}\,(t) = g\,[(p_0, t_0) - (p, T)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

falls der in Klammer stehende Ausdruck als ein Tagebruch angesehen wird. Ist so nun die Corr. (t) gefunden, so ist das zunächst zu suchende

$$t_0' = t_0 - \text{Corr.}\,(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und hiernach

$$t_0'' = t_0 - \text{Corr.}\,(t) - s \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

die Zeit, welche die Uhr am p_0 Tage im Momente des Verschwindens von S hätte zeigen müssen, wenn sie in diesem Momente einen S t a n d gleich Null gehabt hätte, d. h. richtig gewesen wäre. Kennt man nun aber diese Zeit t_0'' für einen bestimmten Tag p_0, so kann für eine l ä n g e r e Periode (vielleicht so lange, als nicht etwa eine Aenderung der Æ und δ einen bemerkbaren Einfluss auf die Zeitbestimmung ausübt) sofort der Stand der Uhr gefunden werden, wenn man nur die Zeit beobachtet, in welcher dieser Stern S verschwindet. Denn wäre z. B. am p_2 Tage eine Verschwindung beobachtet worden, so lägen zwischen der Beobachtung am p_0 und p_2 Tage $(p_2 - p_0)$ Verschwindungen und wäre demnach die Zeit, die die Uhr am p_2 Tage zeigen müsste, gleich

$$t_2 = t_0'' - (p_2 - p_0)\,(3^m\ 55^s{,}909); \quad .\ . \quad (17)$$

zeigt sie statt dessen aber t_2', so ist

$$s = t_2' - t_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

der gesuchte Standfehler im Momente des Verschwindens am p_2 Tage.

Ein B e i p i e l mag das Mitgetheilte noch näher erläutern. Im Besitze eines hiesigen Uhrmachers befand sich eine Uhr (dieselbe, die wir beim Beispiel S. 451 benutzten) von einem unbekannten Verfertiger, welche Uhr halbe Secunden zeigte und einmal auf ihren Gang geprüft werden sollte, um ein Urtheil über den verschiedentlich sonst interessanten Mechanismus zu erlangen. Zu dem Ende wurde am

14. März 1875 Nachmittags nach der Eble'schen Methode der Stand dieser Uhr bestimmt und fand sich derselbe gleich

$$s = + 1^h\, 55^m\, 55^s.$$

An demselben Tage wurde ausserdem nach dieser Uhr das Verschwinden von o^1 und o^2 Can. maj. beobachtet zur Zeit

$$10^h\, 54^m\, 23^s{,}5 \text{ und } 11^h\, 2^m\, 47^s{,}0;$$

ferner wurden dieselben beiden Sterne auch am 21. März beobachtet zur Zeit

$$9^h\, 38^m\, 18^s{,}5 \text{ und } 9^h\, 46^m\, 41^s{,}5,$$

so dass also $p = p_0 = 14$; $p_1 = 21$; $(p - p_0) = 0$ und $p_1 - p_0 = 7$ war. Ziehen wir die Zeitgrösse $7 \,.\, 3^m\, 55^s{,}909 = 27^m\, 31^s{,}4$ von den Beobachtungszeiten des 14. März ab, so erhalten wir

$$10^h\, 26^m\, 52^s{,}1 \text{ und } 10^h\, 35^m\, 15^s{,}6$$

als die Zeiten, in welchen am 21. März die beiden Sterne verschwinden mussten, wenn die Uhr keinen Gang gehabt hätte, welche Zeiten mit den wirklich beobachteten verglichen aber den Unterschied von

$$-48^m\, 33^s{,}6 \text{ und } -48^m\, 34^s{,}1 \text{ im Mittel } -48^m\, 33^s{,}9$$

ergaben und wonach der enorme Gang von

$$g = -\frac{48^m\, 33^s{,}9}{7} = -6^m\, 56^s{,}27 = -416^s{,}27$$

constatirt war.

Da nun die beiden äussersten Zeiten bei der Bestimmung des Standes der Uhr am 14. März Nachmittags $4^h\, 29^m\, 6^s$ und $4^h\, 38^m\, 33^s$ mithin der der Mitte der Beobachtung entsprechende Moment gleich

$$T = 4^h\, 33^m\, 49^s{,}5$$

war, so verfloss von diesem Momente bis zur Zeit t_0 des Verschwindens von o^1 Can. maj. am 14. März Abends die Zeit

$$t_0 - T = 10^h\, 54^m\, 23^s{,}5 - T = 6^h\, 20^m\, 34^s{,}0 = 0^d{,}26428$$

so dass gemäss der Gl. (14)

$$\text{Corr. } (t) = -416^s{,}27 \,.\, 0{,}26428 = -110^s{,}0 = -1^m\, 50^s{,}0$$

ferner das ohne Rücksicht auf den Standfehler nach Gl. (15) berechnete

$$t_0' = 10^h\, 54^m\, 23^s{,}5 + 1^m\, 50^s{,}0$$

und das mit Rücksicht auf den Standfehler nach Gl. (16) berechnete

$$t_0'' = 10^h\, 54^m\, 23^s{,}5 + 1^m\, 50^s{,}0 - 1^h\, 55^m\, 55^s{,}0 = \mathbf{9^h\, 0^m\, 18^s{,}5}$$

die Zeit vorstellt, welche die Uhr im Momente des Verschwindens von o^1 Can. maj. am 14. März zeigen musste, wenn sie richtig gewesen wäre.

Hiernach war man aber auch in der Lage, an einem beliebigen Tage nach vorausgegangener Beobachtung eines der Sterne o^1 oder o^2 oder beider Sterne den Stand der Uhr zu finden. Dieselbe war nach der Beobachtung am 21. März nicht wieder aufgezogen und geschah dies erst wieder am 5. April Abends, als sich die Möglichkeit zeigte, eine Beobachtung machen zu können. Es liess sich hierauf zwar nicht o^1

aber o^2 beobachten und zwar zur Zeit

$$9^h\ 26^m\ 30^s.$$

Da nun zwischen der Beobachtung des Verschwindens von o^1 und o^2 am 14. März $8^m\ 23^s{,}5$, am 21. März $8^m\ 23^s{,}0$, im Mittel also $8^m\ 23^s{,}2$ lagen, so wäre am 5. April, wenn man anstatt o^2 das o^1 hätte beobachten können, dies um $9^h\ 26^m\ 30^s - 8^m\ 23^s{,}2$

$$9^h\ 18^m\ 6^s{,}8$$

beobachtet worden. Die absolut richtige Uhr musste dieses Verschwinden am 14. März, wie wir so eben berechnet haben, um $9^h\ 0^m\ 18^s{,}5$ zeigen, mithin eine richtig bleibende Uhr am 5. April um

$$9^h\ 0^m\ 18^s{,}5 - 22\,.\,(3^m\ 55^s{,}909) = 7^h\ 33^m\ 48^s{,}5$$

wonach der Standfehler der Uhr am 5. April zur Zeit des Verschwindens von o^1 Can. maj. gleich

$$s = 9^h\ 18^m\ 6^s{,}8 - 7^h\ 33^m\ 48^s{,}5 = +\ 1^h\ 44^m\ 18^s{,}3$$

war.

Hiermit glauben wir dargethan zu haben, dass die Beobachtung von Fixsternverschwindungen auch sehr gute Dienste leistet, wenn es sich um die Bestimmung des S t a n d e s einer Uhr handelt.

Es bietet nun die bei der Beobachtung benutzte Uhr noch Gelegenheit, in Betreff der Bestimmung und Verwendung der Grössen $\Delta\tau$ Einiges zu bemerken. Zur genaueren Bestimmung dieser Intervalle $\Delta\tau$ muss man nämlich mehr als eine Beobachtung machen und ist es denkbar, dass bei diesen Beobachtungen ein auffällig verschiedener Gang in Betracht kommt, dessen Verschiedenheit bei grösseren Intervallen $\Delta\tau$ schon von erheblichem Einfluss sein kann. Der sehr bedeutende Gang unserer zuletzt betrachteten Uhr gleich $-\ 416^s$ könnte z. B. bei einer zweiten Beobachtung nur noch halb so gross $= -\ 208^s$, bei einer dritten vielleicht gleich Null, bei einer vierten vielleicht gleich $+\ 208^s$ sein. Bleiben wir nun bei den beiden Sternen o^1 und o^2 stehen, so würde, wenn wir anstatt eines Gangs von $-\ 416^s$ einen solchen gleich Null vorausgesetzt hätten, das Intervall $\Delta\tau^{II}$, welches factisch $8^m\ 23^s{,}5 = 503^s{,}5$ betrug $416\,.\,\frac{503{,}5}{86400}$ $= 2^s{,}4$ mehr betragen haben; ebenso würde es bei der zweiten Beobachtung $1^s{,}2$ mehr, bei der vierten aber $1^s{,}2$ weniger betragen haben, d. h. die vier Intervalle wären bei einem Gange gleich Null alle gleich $505^s{,}9$, mit Rücksicht auf die vier verschiedenen Gänge aber gleich

$$503^s{,}5$$
$$504\ {,}7$$
$$505\ {,}9$$
$$507\ {,}1$$

gefunden worden und hätten einmal wir z. B. aus den drei ersten Beobachtungen im Gegensatze zu den drei letzten Beobachtungen den

Werth $\Delta\tau$ abgeleitet, so würde im ersten Falle im Mittel $504^s,7$, im letzten $505^s,9$ herausgekommen und hiermit ein Unterschied in diesen Intervallen gleich $1^s,2$ eingetreten sein. Dieser Unterschied würde aber, wenn wir zwei zeitlich vielleicht zehnmal soweit auseinander gelegene Sterne benutzt hätten, auf 12^s steigen und begreift man sofort, wie bei solchen Bestimmungen von $\Delta\tau$ unter Umständen der Gang der Uhr einen sehr wesentlichen Einfluss ausüben kann. Man wird zwar freilich Einzelintervalle, die so viel wie die vier bezeichneten von einander abweichen, gar nicht für die Bildung eines mittleren Werthes verwenden, aber selbst wenn dieselben nur einen Unterschied von $0^s,4$ im Mittelwerthe von $\Delta\tau$ zeigten, würde dieser Unterschied bei zwei Sternen, die 10mal so weit auseinanderlägen, einen Werth von 4^s erreichen.

Hiernach muss man also auch vorsichtig sein bei der Verwendung der Grössen $\Delta\tau$ im Sinne der Gleichungen (11) und (12). Denn gesetzt, wir hätten aus einer Anzahl Einzelwerthe, welche nahezu bei einem Gange gleich -416^s beobachtet wurden, für o^1 und o^2 Can. maj. den Mittelwerth $\Delta\tau$ gleich $8^m\ 23^s,5$ abgeleitet und hätten an einem anderen Tag p, als der Gang $+208^s$ war, nur das Verschwinden von o^2 um $9^h\ 7^m\ 33^s,0$ beobachtet, so würde die mit Hilfe von $\Delta\tau$ berechnete Zeit des Verschwindens von o^1, das angenommenermassen am p Tage nicht beobachtet werden konnte, gleich $9^h\ 7^m\ 33^s - 8^m\ 23^s,5 = 8^h\ 59^m\ 9^s,5$ sein. Diese Zeit ist aber falsch. Denn hätten wir o^1 wirklich nach der Uhr beobachten können, so würde das Zeitintervall nicht $503^s,5$ sondern da die Uhr jetzt gegenüber dem Gange gleich -416^s einen um $(+208^s) - (-416^s) = +624^s$ grösseren Gang zeigte, den Werth

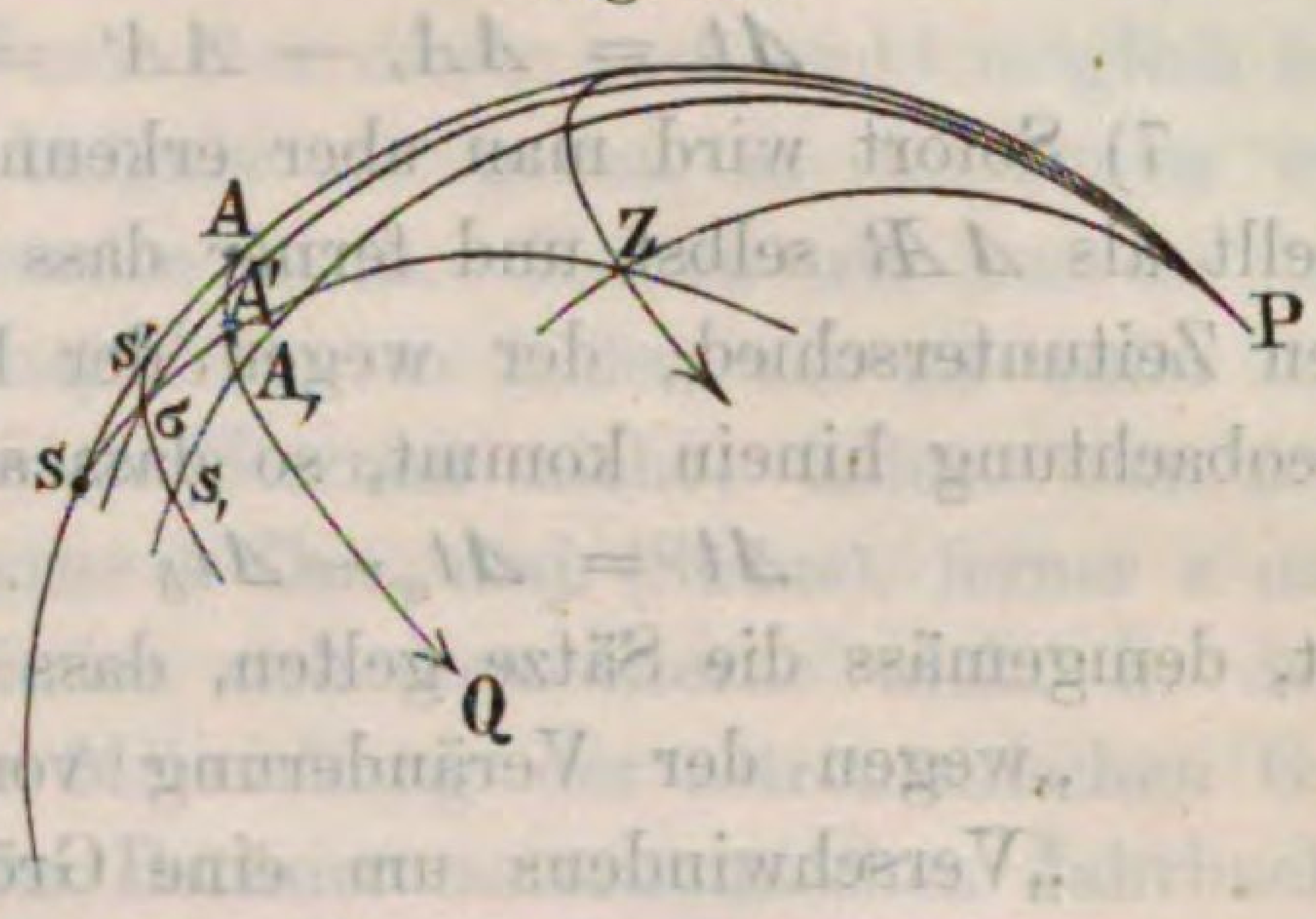
$$503,5 + 503,5 \cdot \frac{624}{86400} = 507^s,1$$ erreicht haben, d. h. der Stern o^1 würde nach der Uhr wirklich beobachtet um $9^h\ 7^m\ 33^s - 8^m\ 27^s,1 = 8^h\ 59^m\ 5^s,9$ verschwunden sein.

Wir schliessen aus diesen Betrachtungen, dass die Berechnung und Verwendung dieser Werthe $\Delta\tau$ zunächst voraussetzt, dass der Gang der Uhr zu den Zeiten, wofür $\Delta\tau$ in Betracht kommt, sich nicht sehr verändert habe, oder dass man, falls über die Veränderlichkeit des Ganges etwas Näheres bekannt ist, gewisse Correctionen anbringt. Der ganze Einfluss dieser Verschiedenheit des Ganges verliert ebenso an Bedeutung, je mehr man Sterne wählt, für welche der absolute Werth der Intervalle $\Delta\tau$ nur ein geringer ist, und dann selbst bei einem so bedeutenden Gange und so bedeutenden Gangunterschieden, wie wir sie voraussetzten, nur kleine Zeitcorrectionen in Betracht kommen.

§. 97. Es ist schon auf S. 467 angedeutet worden, dass vielleicht die Aenderung der Rectascension und Declination eines Sterns: falls längere Zeiträume zwischen zwei auf einanderfolgenden Beobach-

tungen in Betracht kommen, von Einfluss auf die Zeit des Verschwindens eines Sterns sein könne, und wollen wir diesem Punkte noch unsere Aufmerksamkeit schenken. Die Figur 93 stellt im Anschluss an die Fig. 91 den Zusammenhang dar. Das Dreieck PZs entspricht dem in Fig. 91 und ist namentlich anzunehmen, dass die Declination $As = -\delta$ einem Sterne angehöre, der zwischen dem Aequator und dem Horizont gelegen ist. Setzen wir nun voraus, dass sowohl die Declination wie die Rectascension des Sterns im Zunehmen begriffen sei, so möge $ss' = \varDelta\delta$, die Zunahme der Declination, $AA_{,} = \varDelta Æ$ die Zunahme der Rectascension vorstellen, demgemäss der betreffende Stern anstatt in s nunmehr in $s_{,}$ zu liegen kommt, nämlich da, wo ein durch s' gelegter Parallelkreis sich mit dem durch $A_{,}$ laufenden Meridian durchschneidet. Dieser Parallelkreis $s's_{,}$ schneidet aber den Vertical Zs in einem Punkte σ und besteht nun folgender Zusammenhang:

Fig. 93.



1) unserem Hauptsatze auf S. 456 entsprechend, ändert sich der Winkel $sZP = 180 - a$ nicht, denn er wird nur bestimmt durch die Lage des den Stern verdunkelnden Gegenstandes und den Standpunkt des Beobachters;

2) ebenso wenig ändert sich die Seite $PZ = 90 - \varphi$;

3) wäre nur der verdunkelnde Gegenstand hoch genug, so würde zu derselben Zeit, wo s verschwindet, auch der Punkt σ wie überhaupt alle Sterne, die im Vertical sZ liegen und der Höhe der Mauer wegen in Betracht kommen können, verschwinden;

4) der Punkt σ hat eine Declination gleich der von s plus dem angenommenen Zuwachs $ss' = \varDelta\delta$;

5) legt man daher durch σ einen weiteren (vierten) Meridian, so leuchtet ein, dass der Stern $s_{,}$ mit der Decl. $= -\delta + \varDelta\delta$ und der Rectascension $= Æ + \varDelta Æ$ verschwindet im Momente, wo bei der Rotation von Z um die Erdaxe der Punkt σ an die Stelle von $s_{,}$ oder der Durchschnittspunkt A', welchen der durch σ und P laufende vierte Meridian mit dem Aequator AQ bildet, an die Stelle von $A_{,}$ rückt und ist daher

6) $\qquad \sphericalangle A'PA_{,} = \varDelta t$

der wegen der Declinations- und Rectascensionsänderung eintretende Zeitunterschied. Es ist aber auf dem Aequator AQ auch der Bogen

$AA_,$ gleich Δt und hiermit, wenn wir

$$AA_, = \Delta t_\alpha;\ AA' = \Delta t_\delta$$

setzen, auch

$$\Delta t = AA_, - AA' = \Delta t_\alpha - \Delta t_\delta$$

7) Sofort wird man aber erkennen, wie Δt_α nichts anderes vorstellt als $\Delta Æ$ selbst und ferner dass Δt_δ nichts anderes bedeutet als den Zeitunterschied, der wegen der Declinationsänderung in die Beobachtung hinein kommt, so dass allgemein auch

$$\Delta t = \Delta t_\alpha - \Delta t_\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

ist, demgemäss die Sätze gelten, dass

„wegen der Veränderung von $Æ$ und δ sich die Zeit des „Verschwindens um eine Grösse Δt ändert und diese Grösse „gleich der durch die beiden Aenderungen der Rectascension „und Declination im Einzelnen hervorgerufenen Zeitunter- „schiede ist“,

„der Zeitunterschied Δt_α, von der Rectascensionsänderung „herrührend, gleich der Rectascensionsänderung $\Delta Æ$ selbst ist“,

„der Zeitunterschied Δt_δ dagegen erst berechnet werden „muss.“

Zu dem Ende folgt zunächst aus der Figur 93

$$s'\sigma = (AA').\cos(As - ss') = (AA').\cos(\delta - \Delta\delta)$$

oder wenn wir $\Delta\delta$ gegen δ vernachlässigen

$$s'\sigma = (AA').\cos\delta = \Delta t_\delta.\cos\delta;$$

da ferner im Dreieckchen $ss'\sigma$ Winkel $s'\!s\sigma = p$ gleich dem parallactischen Winkel, und

$$s'\sigma = (ss').\tang p = \Delta\delta.\tang p$$

ist, so ergiebt sich weiter, dass

$$\Delta t_\delta.\cos\delta = \Delta\delta.\tang p$$

d. h.

$$\Delta t_\delta = \frac{\Delta\delta}{\cos\delta}.\tang p \quad \ldots . \quad (20)$$

ist, wonach die Grösse Δt_δ sich berechnen lässt, sobald wir nur im Stande sind, p, δ und $\Delta\delta$ anzugeben.

Der parallactische Winkel lässt sich aber auf verschiedenem Wege finden, z. B. so, dass man a als gegeben ansieht und aus der untersten der Gleichungen (4) S. 370

$$\sin p = \frac{\sin a.\cos\varphi}{\cos\delta} \quad \ldots . \quad (21)$$

berechnet und wäre zur vollständigen Berechnung von Δt dann nur noch $\Delta Æ$ und wie schon erwähnt, δ und $\Delta\delta$ nöthig, Grössen, die ohne weiteres einem Jahrbuche entnommen werden können, falls der betreffende Fixstern sich unter der Zahl von Sternen befindet, die als

Hauptsterne in das Jahrbuch aufgenommen sind. Ist dies aber nicht der Fall, so fragt es sich weiter, ob ein Sterncatolog mit einer grösseren Anzahl Sterne zur Disposition steht, um hieraus *Æ*, δ, Δ*Æ* und $\Delta\delta$ berechnen zu können. Wenn aber dieses auch nicht möglich ist, leuchtet ein, dass die gestellte Aufgabe Δt genau zu berechnen zunächst überhaupt nicht gelöst werden kann. Halten wir nun an den beiden Sternen o^1 und o^2 Can. maj. fest, so finden wir sie unter den im Nautical Almanac verzeichneten Sternen nicht, indem von dem genannten Sternbild blos die Sterne α Can. maj. (Sirius), ferner ε und γ aufgenommen sind. Ebenso finden sich diese Sterne nicht in dem Sternverzeichniss, welches unter Mitwirkung der astronomischen Gesellschaft von der Redaction des Berliner astronomischen Jahrbuchs unter dem Titel: „Mittlere Oerter für 187. von 539 Sternen und scheinbare Oerter für das Jahr 187. von 529 Sternen .... für die Beobachtung der Sterne der nördlichen Halbkugel ...“ Berlin, Ferdin. Dümmler herausgegeben wird, eben weil unser Sternbild der „grosse Hund“ ganz der südlichen Hälfte des Himmels angehört und das genannte Verzeichniss nur Sterne der nördlichen Halbkugel enthält. Dagegen finden sich die beiden Sterne in dem schon S. 235 citirten „Catalogue of Stars of the British Association ..“ und führen daselbst die Nummer 2267 und 2318, so dass wir nunmehr aus den Angaben dieses Catalogs die nöthigen Grössen berechnen können, bei welcher Gelegenheit wir noch einige Bemerkungen machen werden, die die Lehren des §. 50 vervollständigen können.

Die Angaben des betreffenden Catalogs gelten zunächst für den Zeitpunkt: 1. Januar 1850 und liefern in einer Columne mit der Ueberschrift „Right Ascension“ die diesem Zeitpunkt entsprechende Rectascension und ebenso unter der Ueberschrift: „North Polar distance“ den Abstand des Sterns vom Pole, der mit d bezeichnet, die Declination δ zu 90^0 ergänzt. Für o^1 Can. maj. sind diese Grössen

$$Æ = 6^h\,47^m\,54^s{,}73 = 101^0\,58'\,40'',95$$
$$d = 114^0\,0'\,0'',1;\ \delta = -\ 24^0\ 0'\ 0'',1.$$

Um nun für einen späteren Zeitmoment, z. B. 1. Januar 1875 die Werthe zu finden, welche den Angaben des N. A. auf S. 329 und denen des Berliner Jahrbuchs Jahrg. 1875 S. 185 entsprechen, müssen an die genannten Grössen zunächst die Aenderungen angebracht werden, welche von der Präcession und Eigenbewegung herrühren und *Æ* und δ in ein *Æ'* und δ' verwandeln, Werthe, die man eigentlich erst die „mittlere Rectascension“ und „mittlere Declination“ für den betreffenden zweiten Moment: also hier 1. Januar 1875 zu nennen pflegt. Ist aber diese Berechnung von *Æ'* und δ' geschehen, so steht

die Sachlage auf dem Punkte, von welchem wir im §. 33 und §. 50 z. B. für den Stern α Aquarii ausgiengen. Denn für diesen Stern fanden wir die mittlere AR und δ z. B. für 1. Januar 1870 in dem Jahrbuch berechnet vor und hatten sodann, um die „scheinbare" Rectascension und „scheinbare" Declination für einen bestimmten Tag — 13. October — des Jahres 1870 zu berechnen, zuzusehen, welchen Einfluss erstens die jährliche Präcession des Jahres 1870 bis zu dem bestimmten Tage des 13. Octobers, zweitens die Aberration, drittens die Nutation, viertens die Eigenbewegung und fünftens auch noch die tägliche Aberration ausübte. Bezeichnen wir diese scheinbare Rectascension und Declination nun einmal mit AR'' und δ'', so hat uns das Kap. V gelehrt, wie wir aus AR' und δ' das AR'' und δ'' zu berechnen haben und kamen hierbei insbesondere die Gl. (49) S. 231 in Betracht. Jetzt aber liegt die Sache anders und müssen wir uns vor allem erst AR' und δ' verschaffen.

Indem wir auf die am Schlusse des §. 50 citirten Schriften verweisen, bemerken wir einfach, dass die zur Umwandlung von AR und δ in AR' und δ' gebräuchlichen Gleichungen

$$AR' = AR + (P + \mu + \frac{p}{100} \cdot \tfrac{1}{2} T) \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\delta' = \delta + (P' + \mu' + \frac{p'}{100} \cdot \tfrac{1}{2} T) \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

sind und hierin bedeutet:

T die seit 1850 (denn wir setzen eine Benutzung des zuletzt erwähnten Sternkatologs voraus) verflossene Anzahl Jahre, so dass z. B. für 1875 das $T = 25$ zu setzen wäre;

P und P' die „jährliche Präcession" in Rectascension und Declination, d. h. die Grösse, um welche wegen der Präcession für die Zeitdauer des Jahres 1850 die Rectascension und Declination zu ändern ist. Diesen Werth findet man im genannten Catologe in der mit „Annual Precession" überschriebenen Columne und beträgt für den betr. Stern o^1 Can. maj. in Rectascension $+ 2^s,488 = + 37'',32$, in Polardistanz $+ 4'',16$ oder in Declination $- 4'',16$;

p und p' die „säculare Aenderung der Präcession" in Rectascension und Declination, d. h. die Aenderung, welche die jährliche Präcession in 100 Jahren erleidet, Grössen, welche für den genannten Stern gleich

$$p = -0^s,0010 = -0'',015$$

$$p' = -0'',355;$$

μ und μ' (identisch mit Δc und $\Delta c'$ auf S. 232) die „jährliche Eigenbewegung" in Rectasc. und Decl., Grössen, die für den genannten Stern gleich

$$\mu = +\,0^s{,}004 = +\,0'',060$$
$$\mu' = +\,0'',01$$

sind. Demgemäss wäre für 1875 Jan. 1 unser

$$\begin{aligned} Æ' &= 6^h\,47^m\,54^s{,}73 + (2^s{,}488 + 0^s{,}004 - 0{,}000005\,.\,25)25 \\ &= 6^h\,47^m\,54^s{,}73 + 62^s{,}30 = 6^h\,48^m\,57^s{,}03 = 102^0\,14'\,15'' \\ \delta' &= -24^0\,0'\,0'',1 + (-4'',16 + 0'',01 - 0'',00177.25)\,.\,25 \\ &= -24^0\,0'\,0'',1 - 104'',8 = -24^0\,1'\,44'',8. \end{aligned}$$

Gesetzt nun, wir hätten unseren Stern am 14. März und dann erst wieder am 20. October beobachtet und es solle berechnet werden, wie viel die Aenderung in Rectasc. und Decl. in der Zeitbestimmung ausmache, so müssen wir aus den Werthen $Æ'$ und δ', die wir soeben gefunden haben, mit Hilfe der Gl. (49) des §. 50 sowohl für den 14. März wie für den 20. October $Æ''$ und δ'' berechnen. Diese Berechnung der Rectascension nach Gl. (19) S. 176 ist folgende:

$log\ cos\ Æ'$	=	$9{,}32626_n$	$log\ sin\ Æ'$	=	$9{,}99001$
$log\ sec\ \delta'$	=	$0{,}03937$	$log\ sec\ \delta'$	=	$0{,}03937$
$log\ a$	=	$9{,}36563_n$	$log\ b$	=	$0{,}02938$
$log\ A$	=	$1{,}27080_n$	$log\ B$	=	$0{,}32770$
$log\ (A\,.\,a)$	=	$0{,}63643$	$log\ (B\,.\,b)$	=	$0{,}35708$
$A\,.\,a$	=	$+\,4'',33$	$B\,.\,b$	=	$+\,2'',28.$

Die Zahlen-Coëfficienten für c und c' ebenso für a' (wegen der Aenderung der Schiefe der Ekliptik oder der Grösse ε) sind zwar nicht ganz dieselben wie im Jahre 1870, doch weichen sie so wenig ab, dass wir dieselben beibehalten und demnach einige Logarithmen aus den früheren Rechnungen S. 176 und 232 verwenden können, wonach weiter für die oberste der Gleichungen (50) und (52) S. 231

$log\ 20{,}0547$	=	$1{,}30222$	$log\ cos\ Æ'$	=	$9{,}32626_n$
$log\ sin\ Æ'$	=	$9{,}99001$	$log\ tang\ \delta'$	=	$9{,}64918_n$
$log\ tang\ \delta'$	=	$9{,}64918_n$	$log\ d$	=	$8{,}97544$
		$0{,}94141_n$	$log\ D$	=	$0{,}96370_n$
$num.$	=	$-\ 8'',74$	$log\ (D\,.\,d)$	=	$9{,}93914_n$
		$46{,}082$	$D\,.\,d$	=	$-\,0'',87$
c	=	$37'',34$			

$$\begin{aligned} log\ c &= 1{,}57217 \\ log\ C &= 8{,}99050 \\ log\ (C\,.\,c) &= 0{,}56262 \\ C\,.\,c &= +\,3'',65 \end{aligned}$$

wird. Da ferner der Jahresbruch (vergl. S. 232) am 14. März gleich 0,1971 ist und zu ihm im Jahre 1875, um t zu erhalten, 0,002 (anstatt 0,0027 im Jahre 1870; vergl. S. 233) addirt werden muss, so ist

$$t = 0{,}200$$
$$t\,.\,\mu = +\,0'',01.$$

und somit die an $Æ'$ für den 14. März anzubringende Summe der Correctionen gleich

$$(4''33 + 2'',28 + 3'',65 - 0'',87 + 0,01) = \mathbf{9'',40} = \mathbf{0^s,63}.$$

Ebenso wird die Berechnung für den 20. October wie folgt:

$$\begin{array}{rlrl}
\log a &= 9{,}36563_n & \log b &= 0{,}02938 \\
\log A &= 1{,}22220 & \log B &= 0{,}97050 \\
\hline
& 0{,}58783_n & & 0{,}99988 \\
A.a &= -3'',87 & B.b &= +10'',00 \\
\log c &= 1{,}57217 & \log d &= 8{,}97544 \\
\log C &= 9{,}86960 & \log D &= 0{,}97250_n \\
\hline
& 1{,}44177 & & 9{,}94794_n \\
C.c &= 27'',66 & D.d &= -0'',89
\end{array}$$

$$t = 0{,}801$$
$$t.\mu = +0'',05$$

mithin die Summe der Correctionen für $Æ'$ am 20. October gleich

$$(-3'',87 + 10'',00 + 27'',66 - 0'',89 + 0'',05) = \mathbf{32'',95}$$

so dass nunmehr unser

$$\varDelta Æ = \varDelta t_a = 32'',95 - 9'',40 = \mathbf{23'',55} = \mathbf{1^s,57}$$

ist.

Bezüglich der Declination ist gemäss Gl. (21) S. 176

$$\begin{array}{rlrl}
\log(-\sin Æ') &= 9{,}99001_n & \log tang\,\varepsilon &= 9{,}63739 \\
\log \sin \delta' &= 9{,}60981_n & \log \cos \delta' &= 9{,}96063 \\
\hline
& 9{,}59982 & & 9{,}59802 \\
\log A &= 1{,}27080_n & \log A &= 1{,}27080_n \\
\hline
& 0{,}87062_n & & 0{,}86882_n \\
num. &= -7'',42 & num. &= -7'',39
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
A.b' &= -14'',81 \\
\log \cos Æ' &= 9{,}32626_n \\
\log \sin \delta' &= 9{,}60981_n \\
\hline
\log b' &= 8{,}93607 \\
\log B &= 0{,}32770 \\
\hline
\log (B.b') &= 9{,}26377 \\
B.b' &= +0'',18;
\end{array}$$

ferner nach der je zweiten Gl. (50) und (52) S. 232

$$\begin{array}{rlrl}
\log 20'',0547 &= 1{,}30222 & \log d' = \log(-\sin Æ') &= 9{,}99001_n \\
\log \cos Æ' &= 9{,}32626_n & \log D &= 0{,}96370_n \\
\hline
\log c' &= 0{,}62848_n & \log (D.d') &= 0{,}95371 \\
\log C &= 8{,}99050 & D.d' &= +8'',99 \\
\hline
\log (C.c') &= 9{,}61898_n & & \\
C.c' &= -0'',42. & &
\end{array}$$

Hiernach ist, da $t.\mu' = 0$ gesetzt werden darf, die für δ am 14. März geltende Correction gleich

$$(-14'',81+0'',18-0'',42+8'',99) = -\mathbf{6'',06}.$$

Ebenso am 20. October

$$\begin{aligned} log(-sin Æ'.sin\delta') &= 9{,}59982 & log(tang\,\varepsilon.cos\,\delta') &= 9{,}59802 \\ log\,A &= 1{,}22220 & log\,A &= 1{,}22220 \\ & \overline{0{,}82202} & & \overline{0{,}82022} \\ num. &= +6{,}64 & num. &= +6{,}61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A.a' &= +13'',25 \\ log\,b' &= 8{,}93607 \\ log\,B &= 0{,}97050 \\ log(B.b') &= 9{,}90657 \\ B.b' &= +0'',81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log\,c' &= 0{,}62848_n & log\,d' &= 9{,}99001_n \\ log\,C &= 9{,}86960 & log\,D &= 0{,}97250_n \\ log(C.c') &= 0{,}49808_n & log(D.d') &= 0{,}96251 \\ C.c' &= -3'',15 & D.d' &= +9{,}17 \end{aligned}$$

mithin Corr. (δ) am 20. October gleich

$$(+13'',25+0'',81-3'',15+9'',17) = -\mathbf{20'',08}.$$

Hiernach ist unser gesuchtes

$$\varDelta t_\delta = +20'',08-(-6'',06) = +\mathbf{26'',14} = +\mathbf{1^s,74}.$$

Da nun nach unserer angenäherten Bestimmung das Azimuth $a = 22^0\,38'$

$$\begin{aligned} log\,sin\,a &= 9{,}58527 \\ log\,cos\,\varphi &= 9{,}80062 \\ & \overline{9{,}38589} \\ log\,cos\,\delta &= 9{,}96063 \\ log\,sin\,p &= 9{,}42526 \qquad p = 15^0\,26'\,25'' \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} log\,1{,}74 &= 0{,}24055 \\ log\,tang\,p &= 9{,}44123 \\ & \overline{9{,}68178} \\ log\,cos\,\delta &= 9{,}96063 \\ log\,\varDelta t_\delta &= 9{,}72115 \qquad \varDelta t_\delta = +0^s,53 \end{aligned}$$

und demgemäss schliesslich

$$\varDelta t = 1^s,57-0^s,53 = \mathbf{1^s,04}.$$

Für den Fall, dass man das Azimuth a nicht direct bestimmen kann, lässt sich noch ein anderer Weg betreten, bei dem ausser der Kenntniss von δ und φ nur noch die Kenntniss des Stundenwinkels t vorausgesetzt wird, welcher Winkel ja aus der Gl. (3) sich finden lässt, falls die Sternzeit SZ des Verschwindens bekannt ist. Setzen wir nämlich zunächst die Seiten

$$90^0 - \delta = x$$
$$90 - \varphi = y$$

so ist nach einer bekannten Gleichung der sphärischen Trigonometrie

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a-p) = cotg\,\frac{t}{2} \cdot \frac{sin\,\tfrac{1}{2}(x-y)}{sin\,\tfrac{1}{2}(x+y)}$$

und

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a+p) = cotg\,\frac{t}{2} \cdot \frac{cos\,\tfrac{1}{2}(x-y)}{cos\,\tfrac{1}{2}(x+y)}$$

oder wenn man für x und y wiederum δ und φ substituirt:

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a-p) = cotg\,\frac{t}{2} \cdot \frac{sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}{cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)}$$

und

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a+p) = cotg\,\frac{t}{2} \cdot \frac{cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}{sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)}$$

woraus sich $(a-p)$, $(a+p)$ und hiermit sowohl a wie p finden lässt. Nach der Beobachtung am 14. März hätte der Stern o^1 Can. maj., wenn die Uhr richtig gewesen wäre (vergl. S. 468), verschwinden müssen um $9^h\ 0^m\ 18^s{,}5$ mittlerer Zeit. Da nun die $AR\odot$ am 14. März 1875 für Marburg $23^h\ 26^m\ 41^s{,}4$ beträgt, so kommt hier die Gl. (23) S. 132 in Betracht und ist, da die aus Taf. II (B) zu nehmende Corr. $AR\odot$ gleich $1^m\ 28^s{,}7$ wird, zunächst

$$SZ = 9^h\ 1^m\ 47^s{,}2 + 23^h\ 26^m\ 41^s{,}4 - 24^h = 8^h\ 28^m\ 28^s{,}6\,;$$

ferner n. Gl. (3) S. 457, weil nach den Angaben und Berechnungen auf S. 475 bzw. S. 476 $AR_* = 6^h\ 48^m\ 57^s{,}03 + 0^s{,}63$ ist,

$$t = 8^h\ 28^m\ 28^s{,}6 - 6^h\ 48^m\ 57^s{,}7 = 1^h\ 39^m\ 30^s{,}9 = 24^0\ 52'\ 43''{,}5$$

$$\frac{t}{2} = 12^0\ 26'\ 22''\,;$$

ferner

$$\varphi = 50^0\ 48'\ 47''$$
$$\delta = -24\ \ 1\ \ 44{,}9 - 6''{,}0 = -24^0\ 1'\ 51''$$
$$\varphi - \delta = 74^0\ 50'\ 38''\,;\ \frac{\varphi-\delta}{2} = 37^0\ 25'\ 19''$$
$$\varphi + \delta = 26^0\ 46'\ 56''\,;\ \frac{\varphi+\delta}{2} = 13^0\ 23'\ 28''$$

$log\,cotg\,\frac{t}{2}$	$= 0{,}65642$	$log\,cotg\,\frac{t}{2}$	$= 0{,}65642$
$log\,sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)$	$= 9{,}78367$	$log\,cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)$	$= 9{,}89992$
	$0{,}44009$		$0{,}55634$
$log\,cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)$	$= 9{,}98803$	$log\,sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)$	$= 9{,}36474$
$log\,tang\,\tfrac{1}{2}(a-p)$	$= 0{,}45206$	$log\,tang\,\tfrac{1}{2}(a+p)$	$= 1{,}19160$
$\tfrac{1}{2}(a-p)$	$= 70^0\ 33'\ 0''$	$\tfrac{1}{2}(a+p)$	$= 86^0\ 19'\ 10''$.

Hieraus ergiebt sich aber

$$a = 156^0\ 52'\ 10''$$

oder vielmehr unser a, welches diesen letzteren Werth zu 180^0 ergänzt, gleich

$$a = 23^0\ 7'\ 50''$$

und

$$p = 15^0\,46'\,10''$$

welcher Werth a von unserem Werthe auf S. 458, der mit Hilfe einer kleinen Magnetnadel gefunden worden war, um 29′ 50″ abweicht, was nicht auffällig ist, da die Bestimmung eines Azimuths mit Hilfe der Schmalkalderschen Bussole ohne Zweifel keine grosse Genauigkeit bietet und welche zu vermehren, als wir nur annähernd genau die Zone der Fixsterne, die bei den Sternverschwindungen in Betracht kam, bestimmen wollten, kein triftiger Grund vorlag.

Wir schliessen, indem wir zunächst noch die bemerkenswertheste Abhandlung nennen, der wir im letzten Kapitel der Hauptsache nach gefolgt sind. Diese Abhandlung findet sich in dem Bd. III der „monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erdund Himmelskunde", herausgegeben von v. Zach auf S. 124 unter dem Titel:

„Doctor Olbers in Bremen neue Methode, den Gang und
„den Stand astronomischer Uhren ohne Mittagsfernrohr und
„überhaupt ohne feststehende Instrumente, auf eine ebenso
„sichere als bequeme Art zu erforschen und zu berichtigen."

Während jedoch Olbers an einem speciellen Beispiele die Methode erläuterte, ist in unserer vorausgehenden Darstellung zunächst auf eine grössere Allgemeinheit Rücksicht genommen worden.

Da es ausserdem bei dieser Methode erwünscht sein kann, mit der Fixsternwelt genauer bekannt zu sein, so mögen hier am Schlusse dieses Werkes noch folgende Sternkarten genannt werden. Argelander „Neue Uranometrie" (Uranometria nova) oder „Darstellung der im mittleren Europa mit blossen Augen sichtbaren Sterne nach ihren wahren, unmittelbar vom Himmel entnommenen Grössen"; Berlin, Simon Schropp u. Comp. 1843; Text und Atlas mit XVII Tafeln, auf dem eine Gesammtsumme von 3256 Sternen bis incl. sechster Grösse verzeichnet sind. Ferner Heis, E., „Neuer Himmelsatlas." Köln 1872. Du Mont-Schauberg'sche Buchhandlung; Text mit Atlas von XII Tafeln, worauf eine Zahl von 5421 Sternen als mit blossem Auge sichtbar verzeichnet sind. Für alle Diejenigen, welche ein genaueres Studium des Sternenhimmels eröffnen wollen, wird dieser Atlas besonders zu empfehlen sein, da derselbe auch in sehr wohlgefälliger und deutlich markirter Weise die Sternbilder darstellt. Die grosse Mehrzahl von über 2000 Sternen gegenüber der Zahl bei Argelander erklärt sich der Hauptsache nach daher, dass Heis insbesondere noch Sterne von 6 bis 7 Grösse aufgenommen hat. Im Anschluss hieran erschien 1874 auch der „Atlas des südlichen gestirnten Himmels" von Dr. C. Behrmann und enthält dieser auf VII Tafeln die mit blossem Auge zwischen dem Südpol und dem 20. Grad süd-

licher Abweichung sichtbaren Sterne, Leipzig, Brockhaus. Ausser diesen Atlanten sind noch für Freunde der Astronomie besonders hervorzuheben: „Fr. Braun, Himmels-Atlas in transparenten Karten", Stuttgart, W. Nitzschke und vor allen seiner Billigkeit, Reichhaltigkeit und Gediegenheit wegen der vielverbreitete „Atlas des gestirnten Himmels für Freunde der Astronomie von J. J. Littrow. 3. Aufl. her. v. K. v. Littrow", Stuttgart, G. Weise. Andere Schriften über den Fixsternhimmel sind ausserdem am Schlusse des ersten Theils dieses Werkes angeführt worden.

Hilfstafeln.

Tafel I (A).

Verwandlung eines Sternzeit-Intervalls in ein mittleres Sonnenzeit-Intervall (nach Gl. 31; S. 99.).

Stunden.		Minuten.				Secunden.			
Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.
1	$0^h\,59^m\,50^s$,170	1	$0^m\,59^s$,836	31	$30^m\,54^s$,921	1	0^s,997	31	30^s,915
2	1 59 40 ,341	2	1 59 ,672	32	31 54 ,758	2	1 ,995	32	31 ,913
3	2 59 30 ,511	3	2 59 ,509	33	32 54 ,594	3	2 ,992	33	32 ,910
4	3 59 20 ,682	4	3 59 ,345	34	33 54 ,430	4	3 ,989	34	33 ,907
5	4 59 10 ,852	5	4 59 ,181	35	34 54 ,266	5	4 ,986	35	34 ,905
6	5 59 1 ,023	6	5 59 ,017	36	35 54 ,102	6	5 ,984	36	35 ,902
7	6 58 51 ,193	7	6 58 ,853	37	36 53 ,938	7	6 ,981	37	36 ,899
8	7 58 41 ,364	8	7 58 ,689	38	37 53 ,775	8	7 ,978	38	37 ,896
9	8 58 31 ,534	9	8 58 ,526	39	38 53 ,611	9	8 ,975	39	38 ,894
10	9 58 21 ,704	10	9 58 ,362	40	39 53 ,447	10	9 ,973	40	39 ,891
11	10 58 11 ,875	11	10 58 ,198	41	40 53 ,283	11	10 ,970	41	40 ,888
12	11 58 2 ,045	12	11 58 ,034	42	41 53 ,119	12	11 ,967	42	41 ,885
13	12 57 52 ,216	13	12 57 ,870	43	42 52 ,956	13	12 ,965	43	42 ,883
14	13 57 42 ,386	14	13 57 ,706	44	43 52 ,792	14	13 ,962	44	43 ,880
15	14 57 32 ,557	15	14 57 ,543	45	44 52 ,628	15	14 ,959	45	44 ,877
16	15 57 22 ,727	16	15 57 ,379	46	45 52 ,464	16	15 ,956	46	45 ,874
17	16 57 12 ,898	17	16 57 ,215	47	46 52 ,300	17	16 ,954	47	46 ,872
18	17 57 3 ,068	18	17 57 ,051	48	47 52 ,136	18	17 ,951	48	47 ,869
19	18 56 53 ,238	19	18 56 ,887	49	48 51 ,973	19	18 ,948	49	48 ,866
20	19 56 43 ,409	20	19 56 ,724	50	49 51 ,809	20	19 ,945	50	49 ,864
21	20 56 33 ,579	21	20 56 ,560	51	50 51 ,645	21	20 ,943	51	50 ,861
22	21 56 23 ,750	22	21 56 ,396	52	51 51 ,481	22	21 ,940	52	51 ,858
23	22 56 13 ,920	23	22 56 ,232	53	52 51 ,317	23	22 ,937	53	52 ,855
24	23 56 4 ,091	24	23 56 ,068	54	53 51 ,153	24	23 ,935	54	53 ,853
		25	24 55 ,904	55	54 50 ,990	25	24 ,932	55	54 ,850
		26	25 55 ,741	56	55 50 ,826	26	25 ,929	56	55 ,847
		27	26 55 ,577	57	56 50 ,662	27	26 ,926	57	56 ,844
		28	27 55 ,413	58	57 50 ,498	28	27 ,924	58	57 ,842
		29	28 55 ,249	59	58 50 ,334	29	28 ,921	59	58 ,839
		30	29 55 ,085	60	59 50 ,170	30	29 ,918	60	59 ,836

Tafel I (B).

Verwandlung eines mittleren Sonnenzeit-Intervalls in ein Sternzeit-Intervall (nach Gl. 31; S. 99).

Stunden.		Minuten.				Secunden.			
Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.	Mittlere Zeit.	Sternzeit.
1	$1^h\ 0^m\ 9^s$,857	1	$1^m\ 0^s$,164	31	$31^m\ 5^s$,093	1	1^s,003	31	31^s,085
2	2 0 19 ,713	2	2 0 ,329	32	32 5 ,257	2	2 ,006	32	32 ,088
3	3 0 29 ,569	3	3 0 ,493	33	33 5 ,421	3	3 ,008	33	33 ,090
4	4 0 39 ,426	4	4 0 ,657	34	34 5 ,585	4	4 ,011	34	34 ,093
5	5 0 49 ,282	5	5 0 ,821	35	35 5 ,750	5	5 ,014	35	35 ,096
6	6 0 59 ,139	6	6 0 ,986	36	36 5 ,914	6	6 ,016	36	36 ,099
7	7 1 8 ,995	7	7 1 ,150	37	37 6 ,078	7	7 ,019	37	37 ,101
8	8 1 18 ,852	8	8 1 ,314	38	38 6 ,242	8	8 ,022	38	38 ,104
9	9 1 28 ,708	9	9 1 ,479	39	39 6 ,407	9	9 ,025	39	39 ,107
10	10 1 38 ,565	10	10 1 ,643	40	40 6 ,571	10	10 ,027	40	40 ,110
11	11 1 48 ,421	11	11 1 ,807	41	41 6 ,735	11	11 ,030	41	41 ,112
12	12 1 58 ,278	12	12 1 ,971	42	42 6 ,900	12	12 ,033	42	42 ,115
13	13 2 8 ,134	13	13 2 ,136	43	43 7 ,064	13	13 ,036	43	43 ,118
14	14 2 17 ,991	14	14 2 ,300	44	44 7 ,228	14	14 ,038	44	44 ,121
15	15 2 27 ,847	15	15 2 ,464	45	45 7 ,392	15	15 ,041	45	45 ,123
16	16 2 37 ,704	16	16 2 ,628	46	46 7 ,557	16	16 ,044	46	46 ,126
17	17 2 47 ,560	17	17 2 ,793	47	47 7 ,721	17	17 ,047	47	47 ,129
18	18 2 57 ,417	18	18 2 ,957	48	48 7 ,885	18	18 ,049	48	48 ,131
19	19 3 7 ,273	19	19 3 ,121	49	49 8 ,050	19	19 ,052	49	49 ,134
20	20 3 17 ,130	20	20 3 ,286	50	50 8 ,214	20	20 ,055	50	50 ,137
21	21 3 26 ,986	21	21 3 ,450	51	51 8 ,378	21	21 ,058	51	51 ,140
22	22 3 36 ,842	22	22 3 ,614	52	52 8 ,542	22	22 ,060	52	52 ,142
23	23 3 46 ,699	23	23 3 ,778	53	53 8 ,707	23	23 ,063	53	53 ,145
24	24 3 56 ,555	24	24 3 ,943	54	54 8 ,871	24	24 ,066	54	54 ,148
		25	25 4 ,107	55	55 9 ,035	25	25 ,069	55	55 ,151
		26	26 4 ,271	56	56 9 ,199	26	26 ,071	56	56 ,153
		27	27 4 ,435	57	57 9 ,364	27	27 ,074	57	57 ,156
		28	28 4 ,600	58	58 9 ,528	28	28 ,077	58	58 ,159
		29	29 4 ,764	59	59 9 ,692	29	29 ,079	59	59 ,162
		30	30 4 ,928	60	60 9 ,857	30	30 ,082	60	60 ,164

Tafel II (A).

Correctionen für die Umwandlung eines Sternzeit-Intervalls in ein mittleres Sonnenzeit-Intervall (n. Gl. 32; S. 100).

Stunden.		Minuten.				Secunden.			
Sternzeit.	Correction —	Sternzeit.	Corr. —	Sternzeit.	Corr. —	Sternzeit.	Corr. —	Sternzeit.	Corr. —
1	0ᵐ 9ˢ,829	1	0ˢ,164	31	5ˢ,079	1	0ˢ,003	31	0ˢ,085
2	0 19 ,659	2	0 ,328	32	5 ,242	2	0 ,005	32	0 ,087
3	0 29 ,488	3	0 ,491	33	5 ,406	3	0 ,008	33	0 ,090
4	0 39 ,318	4	0 ,655	34	5 ,570	4	0 ,011	34	0 ,093
5	0 49 ,147	5	0 ,819	35	5 ,734	5	0 ,014	35	0 ,096
6	0 58 ,977	6	0 ,983	36	5 ,898	6	0 ,016	36	0 ,098
7	1 8 ,806	7	1 ,147	37	6 ,062	7	0 ,019	37	0 ,101
8	1 18 ,636	8	1 ,311	38	6 ,225	8	0 ,022	38	0 ,104
9	1 28 ,465	9	1 ,474	39	6 ,389	9	0 ,025	39	0 ,106
10	1 38 ,295	10	1 ,638	40	6 ,553	10	0 ,027	40	0 ,109
11	1 48 ,124	11	1 ,802	41	6 ,717	11	0 ,030	41	0 ,112
12	1 57 ,954	12	1 ,966	42	6 ,881	12	0 ,033	42	0 ,115
13	2 7 ,783	13	2 ,130	43	7 ,044	13	0 ,036	43	0 ,117
14	2 17 ,613	14	2 ,294	44	7 ,208	14	0 ,038	44	0 ,120
15	2 27 ,442	15	2 ,457	45	7 ,372	15	0 ,041	45	0 ,123
16	2 37 ,272	16	2 ,621	46	7 ,536	16	0 ,044	46	0 ,126
17	2 47 ,101	17	2 ,785	47	7 ,694	17	0 ,046	47	0 ,128
18	2 56 ,931	18	2 ,949	48	7 ,864	18	0 ,049	48	0 ,131
19	3 6 ,760	19	3 ,113	49	8 ,027	19	0 ,052	49	0 ,134
20	3 16 ,590	20	3 ,277	50	8 ,191	20	0 ,055	50	0 ,137
21	3 26 ,419	21	3 ,440	51	8 ,355	21	0 ,057	51	0 ,139
22	3 36 ,249	22	3 ,604	52	8 ,519	22	0 ,060	52	0 ,142
23	3 46 ,078	23	3 ,768	53	8 ,683	23	0 ,063	53	0 ,145
24	3 55 ,909	24	3 ,932	54	8 ,846	24	0 ,066	54	0 ,147
		25	4 ,096	55	9 ,010	25	0 ,068	55	0 ,150
		26	4 ,259	56	9 ,174	26	0 ,071	56	0 ,153
		27	4 ,423	57	9 ,332	27	0 ,074	57	0 ,156
		28	4 ,587	58	9 ,502	28	0 ,070	58	0 ,158
		29	4 ,751	59	9 ,666	29	0 ,079	59	0 ,161
		30	4 ,915	60	9 ,829	30	0 ,082	60	0 ,164

Tafel II (B).

Correctionen für die Umwandlung eines mittleren Sonnenzeit-Intervalls in ein Sternzeit-Intervall (n. Gl. 32; S. 100).

Stunden.		Minuten.				Secunden.			
Mittlere Zeit.	Correction +	Mittlere Zeit.	Corr. +	Mittlere Zeit.	Corr. +	Mittlere Zeit.	Corr. +	Mittlere Zeit.	Corr. +
1	0m 9s,856	1	0s,164	31	5s,093	1	0s,003	31	0s,085
2	0 19 ,713	2	0 ,329	32	5 ,257	2	0 ,005	32	0 ,088
3	0 29 ,569	3	0 ,493	33	5 ,421	3	0 ,008	33	0 ,090
4	0 39 ,426	4	0 ,657	34	5 ,585	4	0 ,011	34	0 ,093
5	0 49 ,282	5	0 ,821	35	5 ,750	5	0 ,014	35	0 ,096
6	0 59 ,139	6	0 ,986	36	5 ,914	6	0 ,016	36	0 ,099
7	1 8 ,995	7	1 ,150	37	6 ,078	7	0 ,019	37	0 ,101
8	1 18 ,852	8	1 ,314	38	6 ,242	8	0 ,022	38	0 ,104
9	1 28 ,708	9	1 ,478	39	6 ,407	9	0 ,025	39	0 ,107
10	1 38 ,565	10	1 ,643	40	6 ,576	10	0 ,027	40	0 ,110
11	1 48 ,421	11	1 ,807	41	6 ,735	11	0 ,030	41	0 ,112
12	1 58 ,278	12	1 ,971	42	6 ,900	12	0 ,033	42	0 ,115
13	2 8 ,134	13	2 ,136	43	7 ,064	13	0 ,036	43	0 ,118
14	2 17 ,991	14	2 ,300	44	7 ,228	14	0 ,038	44	0 ,120
15	2 27 ,847	15	2 ,464	45	7 ,392	15	0 ,041	45	0 ,123
16	2 37 ,704	16	2 ,628	46	7 ,557	16	0 ,044	46	0 ,126
17	2 47 ,560	17	2 ,793	47	7 ,721	17	0 ,047	47	0 ,129
18	2 57 ,417	18	2 ,957	48	7 ,885	18	0 ,049	48	0 ,132
19	3 7 ,273	19	3 ,121	49	8 ,049	19	0 ,052	49	0 ,134
20	3 17 ,129	20	3 ,285	50	8 ,214	20	0 ,055	50	0 ,137
21	3 26 ,986	21	3 ,450	51	8 ,378	21	0 ,057	51	0 ,140
22	3 36 ,842	22	3 ,614	52	8 ,542	22	0 ,060	52	0 ,142
23	3 46 ,699	23	3 ,778	53	8 ,707	23	0 ,063	53	0 ,145
24	3 56 ,555	24	3 ,943	54	8 ,871	24	0 ,066	54	0 ,148
		25	4 ,107	55	9 ,035	25	0 ,068	55	0 ,151
		26	4 ,271	56	9 ,199	26	0 ,071	56	0 ,153
		27	4 ,435	57	9 ,364	27	0 ,074	57	0 ,156
		28	4 ,600	58	9 ,528	28	0 ,077	58	0 ,159
		29	4 ,764	59	9 ,692	29	0 ,079	59	0 ,162
		30	4 ,928	60	9 ,856	30	0 ,082	60	0 ,164

Tafel III.

Verwandlung der Stunden, Minuten und Secunden in Bruchtheile eines Tages.

Stunden.	Tage.	Minuten.	Tage.	Minuten.	Tage.	Secunden.	Tage.	Secunden.	Tage.
	0,		0,0		0,0		0,000		0,000
1	0416	1	00694	31	21527	1	0115740	31	3587962
2	0833	2	01388	32	22222	2	0231481	32	3703703
3	1250	3	02083	33	22916	3	0347222	33	3819444
4	1666	4	02777	34	23611	4	0462962	34	3935185
5	2083	5	03472	35	24305	5	0578703	35	4050925
6	2500	6	04166	36	24999	6	0694444	36	4166666
7	2916	7	04861	37	25694	7	0810185	37	4282407
8	3333	8	05555	38	26388	8	0925925	38	4396148
9	3750	9	06249	39	27083	9	1041666	39	4513888
10	4166	10	06944	40	27777	10	1157407	40	4629629
11	4583	11	07638	41	28472	11	1273148	41	4745370
12	5000	12	08333	42	29166	12	1388888	42	4861111
13	5416	13	09027	43	29861	13	1504629	43	4976851
14	5833	14	09722	44	30555	14	1620370	44	5092592
15	6250	15	10416	45	31249	15	1736111	45	5208333
16	6666	16	11111	46	31944	16	1851851	46	5324074
17	7083	17	11805	47	32638	17	1967592	47	5439814
18	7500	18	12499	48	33333	18	2083333	48	5555555
19	7916	19	13194	49	34027	19	2198074	49	5671296
20	8333	20	13888	50	34722	20	2314814	50	5787037
21	8750	21	14583	51	35416	21	2430555	51	5902782
22	9166	22	15277	52	36111	22	2546296	52	6018518
23	9583	23	15972	53	36805	23	2662037	53	6134259
		24	16666	54	37499	24	2777777	54	6249999
		25	17361	55	38194	25	2893518	55	6365730
		26	18055	56	38888	26	3009259	56	6481481
		27	18749	57	39583	27	3124999	57	6597222
		28	19444	58	40277	28	3240740	58	6712962
		29	20138	59	40972	29	3356481	59	6828703
		30	20833	60	41666	30	3472222	60	6944444

Für die Benutzung weiterer Decimalstellen sei bemerkt, dass für die Stunden und Minuten die letzte Ziffer, für die Secunden die je drei letzten Ziffern eine Periode bilden.

Tafel IV.

Verwandlung der Stunden (Grade) und Minuten in Secunden.

Stunden Grade.	Secunden.	Minuten.	Secunden.	Minuten.	Secunden.
1	3600	1	60	31	1860
2	7200	2	120	32	1920
3	10800	3	180	33	1980
4	14400	4	240	34	2040
5	18000	5	300	35	2100
6	21600	6	360	36	2160
7	25200	7	420	37	2220
8	28800	8	480	38	2280
9	32400	9	540	39	2340
10	36000	10	600	40	2400
11	39600	11	660	41	2460
12	43200	12	720	42	2520
13	46800	13	780	43	2580
14	50400	14	840	44	2640
15	54000	15	900	45	2700
16	57600	16	960	46	2760
17	61200	17	1020	47	2820
18	64800	18	1080	48	2880
19	68400	19	1140	49	2940
20	72000	20	1200	50	3000
21	75600	21	1260	51	3060
22	79200	22	1320	52	3120
23	82800	23	1380	53	3180
24	86400	24	1440	54	3240
25	90000	25	1500	55	3300
26	93600	26	1560	56	3360
27	97200	27	1620	57	3420
28	100800	28	1680	58	3480
29	104400	29	1740	59	3540
30	108000	30	1800	60	3600
60	216000				
90	324000				

Tafel V (A).

Mittlere Refraction.

Argument = scheinbare Zenithdistanz = z' oder
» = » Höhe = h'

z'	*h'*	*log a*	*log tang z'*	*ϱ*
0°	90°	1,76156		0'',0
5	85	6	8,94195	5 ,1
10	80	4	9,24632	10 ,2
15	75	2	9,42805	15 ,5
16	74	1	5750	16 ,6
17	73	1	9,48534	17 ,7
18	72	0	9,51178	18 ,8
19	71	1,76150	3697	19 ,9
20	70	1,76149	6107	21 ,0
21	69	8	9,58418	22 ,2
22	68	8	9,60641	23 ,3
23	67	7	2785	24 ,5
24	66	6	4858	25 ,7
25	65	5	6867	26 ,9
26	64	4	9,68818	28 ,2
27	63	3	9,70717	29 ,4
28	62	2	2567	30 ,7
29	61	1,76140	4375	32 ,0
30	60	1,76139	6144	33 ,3
31	59	8	7877	34 ,7
32	58	6	9,79579	36 ,1
33	57	4	9,81252	37 ,5
34	56	2	2899	38 ,9
35	55	1,76130	4523	40 ,4
36	54	1,76128	6126	41 ,9
37	53	6	7711	43 ,5
38	52	4	9,89281	45 ,1
39	51	1,76122	9,90837	46 ,7
40	50	1,76119	2381	48 ,4
41	49	7	3916	50 ,2
42	48	4	5444	51 ,9
43	47	1,76111	6966	53 ,8
44	46	1,76107	9,98484	55 ,7
45	45	4	0,00000	57 ,7
46	44	1,76100	0,01516	59 ,7

Der Vereinfachung wegen sind bei dieser und bei folgenden Tabellen gleichlautende Ziffern weggelassen worden.

Tafel V (A).

Mittlere Refraction.

Argument = s c h e i n b a r e Zenithdistanz = z′ oder
» = » Höhe = h′

z′	*h′*	*log a*	*log tang z′*	*ϱ*
46°	44°	1,76100	0,01516	0′ 59″,7
47	43	1,76096	3034	1 1 ,8
48	42	92	4556	4 ,0
49	41	87	6084	6 ,3
50	40	82	7619	8 ,7
51	39	77	0,09163	11 ,2
52	38	71	0,10719	13 ,8
53	37	65	2289	16 ,5
54	36	58	3874	19 ,3
55	35	50	5477	22 ,3
56	34	42	7101	25 ,4
57	33	33	0,18748	28 ,7
58	32	23	0,20421	32 ,1
59	31	12	2123	35 ,8
60	30	1,76001	3856	39 ,7
61	29	1,75988	5625	43 ,8
62	28	73	7433	48 ,2
63	27	57	0,29283	52 ,8
64	26	39	0,31182	57 ,8
65	25	1,75919	3133	2 3 ,2
66	24	1,75897	5142	8 ,9
67	23	71	7215	15 ,2
68	22	42	0,39359	21 ,9
69	21	1,75809	0,41582	29 ,3
70	20	1,75771	3893	37 ,3
71	19	726	6303	46 ,1
72	18	675	0,48822	55 ,8
73	17	615	0,51466	3 6 ,6
74	16	543	4250	18 ,6
75	15	457	0,57195	32 ,1
76	14	355	0,60323	47 ,4
77	13	229	3664	4 4 ,9
78	12	1,75072	0,67253	25 ,0

Tafel V (A).

Mittlere Refraction.

Argument = scheinbare Zenithdistanz = z' oder
» = » Höhe = h'

z'	h'	log a	log tang z'	ρ
78° 0'	12° 0'	1,75072	0,67253	4' 25",0
10	50	043	7878	28 ,7
20	40	1,75013	8511	32 ,4
30	30	1,74981	9154	36 ,3
40	20	947	0,69805	40 ,2
50	10	912	0,70465	44 ,3
79 0	11 0	876	1135	48 ,5
10	50	839	1814	52 ,8
20	40	799	2504	57 ,2
30	30	757	3203	5 1 ,7
40	20	714	3914	6 ,4
50	10	670	4635	11 ,2
80 0	10 0	623	5368	16 ,2
10	50	573	6113	21 ,3
20	40	521	6870	26 ,5
30	30	468	7639	32 ,0
40	20	412	8422	37 ,6
50	10	352	0,79218	43 ,3
81 0	9 0	288	0,80029	49 ,3
10	50	223	0854	55 ,4
20	40	155	1694	6 1 ,8
30	30	083	2550	8 ,4
40	20	1,74007	3423	15 ,2
50	10	1,73928	4312	22 ,3
82 0	8 0	845	5220	29 ,6
10	50	757	6146	37 ,2
20	40	663	7091	45 ,1
30	30	564	8057	53 ,3
40	20	459	0,89044	7 1 ,7
50	10	347	0,90053	10 ,5
83 0	7 0	229	1086	19 ,7
10	50	1,73105	2142	29 ,2
20	40	1,72974	3225	39 ,2
30	30	832	4334	49 ,5
40	20	681	5472	8 0 ,3
50	10	519	6639	11 ,6
84° 0'	6° 0'	1,72346	0,97838	8 23 ,3

Tafel V (A).

Mittlere Refraction.

Argument = scheinbare Zenithdistanz = z' oder
» = » Höhe = h'

z'	h'	log a	log tang z'	ϱ
84° 0'	6° 0'	1,72346	0,97838	8' 23",3
10	50	1,72160	0,99070	35 ,6
20	40	1,71961	1,00338	48 ,4
30	30	749	1642	9 1 ,9
40	20	522	2987	16 ,0
50	10	279	4373	30 ,9
85 0	5 0	1,71020	5805	46 ,5
10	50	1,70772	7284	10 3 ,3
20	40	505	1,08815	21 ,2
30	30	1,70188	1,10402	39 ,6
40	20	1,69816	2047	58 ,6
50	10	9384	3757	11 18 ,3
86 0	4 0	8908	5536	38 ,9
10	50	8383	7390	12 0 ,7
20	40	7813	1,19326	23 ,7
30	30	7204	1,21351	48 ,3
40	20	6560	3475	13 15 ,0
50	10	5869	5708	43 ,7
87 0	3 0	5114	1,28060	14 14 ,6
10	50	4286	1,30547	47 ,8
20	40	3353	3184	15 23 ,4
30	30	2278	5991	16 0 ,9
40	20	1,61041	1,38991	40 ,7
50	10	1,59618	1,42212	17 23 ,0
88 0	2 0	7995	5692	18 8 ,6
10	50	6142	1,49473	18 58 ,0
20	40	4010	1,53615	19 51 ,9
30	30	1,41530	1,58193	20 50 ,9
40	20	1,48602	1,63311	21 55 ,6
50	10	1,45086	1,69112	23 6 ,7
89 0	1 0	1,40764	1,75808	24 24 ,6
10	50	1,35300	1,83727	25 49 ,8
20	40	1,28137	1,93419	27 22 ,7
30	30	1,18228	2,05914	29 3 ,5
40	20	1,03248	2,23524	30 52 ,5
50	10	0,75803	2,53627	32 49 ,2
90 0	0° 0'	......		34 54, 1

Tafel V (A_*).

Mittlere Refraction.

Argument = wahre Höhe = h (Siehe S. 337).

h	ϱ_*	h	ϱ_*	h	ϱ_*
0° 0′	29′11″,9	5° 0′	9′31″,6	10° 0′	5′13″,6
10	27 44 ,7	10	9 17 ,1	10	5 8 ,7
20	26 22 ,7	20	9 3 ,2	20	5 4 ,0
30	25 5 ,4	30	8 50 ,0	30	4 59 ,5
40	23 53 ,4	40	8 37 ,2	40	4 55 ,0
50	22 46 ,3	50	8 25 ,2	50	4 50 ,7
1 0	21 43 ,8	6 0	8 13 ,7	11 0	4 46 ,5
10	20 46 ,2	10	8 2 ,5	10	4 42 ,4
20	19 52 ,6	20	7 51 ,8	20	4 38 ,4
30	19 2 ,9	30	7 41 ,6	30	4 34 ,5
40	18 16 ,9	40	7 31 ,7	40	4 30 ,7
50	17 33 ,8	50	7 22 ,2	50	4 27 ,1
2 0	16 53 ,6	7 0	7 13 ,1	12 0	4 23 ,6
10	16 15 ,6	10	7 4 ,3	13°	4 3 ,7
20	15 39 ,5	20	6 55 ,9	14	3 46 ,4
30	15 5 ,0	30	6 47 ,7	15	3 31 ,3
40	14 32 ,4	40	6 39 ,8	16	3 17 ,9
50	14 1 ,8	50	6 32 ,2	17	3 6 ,0
3 0	13 33 ,3	8 0	6 24 ,9	18	2 55 ,3
10	13 6 ,5	10	6 17 ,9	19	2 45 ,7
20	12 41 ,4	20	6 11 ,0	20	2 36 ,9
30	12 18 ,3	30	6 4 ,4		
40	11 56 ,4	40	5 58 ,0		
50	11 35 ,6	50	5 51 ,8		
4 0	11 15 ,8	9 0	5 45 ,8		
10	10 56 ,8	10	5 40 ,1		
20	10 38 ,4	20	5 34 ,5		
30	10 20 ,6	30	5 29 ,0		
40	10 3 ,2	40	5 23 ,7		
50	9 46 ,9	50	5 18 ,6		
5 0	9 31 ,6	10 0	5 13 ,6		

Tafel V (B).

Log B, abhängig vom Barometerstand.

(Siehe S. 157.)

Par. Zoll u. Lin.	log B	Engl. Zoll.	log B	Millim.	log B	Millim.	log B
	—		—		—		+
26″ 4‴	0,02307	27″,5	0,03191	720	0,01860	755	0,00201
5	170	6	0,03033	1	800	6	259
6	0,02033	7	0,02876	2	739	7	316
7	0,01897	8	720	3	679	8	374
8	761	9	564	4	619	9	431
9	625	28 ,0	409	5	560	760	488
10	490	1	254	6	500	1	545
11	356	2	0,02099	7	440	2	602
27 0	221	3	0,01946	8	380	3	659
1	0,01088	4	793	9	321	4	716
2	0,00954	5	640	730	261	5	773
3	821	6	488	1	202	6	830
4	689	7	336	2	142	7	886
5	556	8	185	3	083	8	943
6	425	9	0,01035	4	0,01024	9	0,00999
7	293	29 ,0	0,00885	5	0,00965	770	0,01056
8	162	1	735	6	906	1	112
9	0,00032	2	586	7	847	2	168
	—	3	438	8	788	3	225
	+	4	290	9	729	4	281
10	0,00099	5	0,00142	740	670	5	337
11	228		—	1	612	6	393
28 0	358		+	2	553	7	449
1	487	6	0,00005	3	494	8	505
2	616	7	151	4	436	9	0,01560
3	744	8	297	5	378	780	0,01616
4	872	9	443	6	319		+
5	0,00999	30 ,0	588	7	261		
6	0,01127	1	732	8	203		
7	253	2	0,00876	9	145		
8	380	3	0,01020	750	087		
9	506	4	163	1	0,00029		
10	632	5	306		—		
11	757	6	448		+		
29 0	0,01882	7	589	2	0,00028		
1	0,02007	8	731	3	086		
2	131	9	0,01871	4	144		
29″ 3‴	0,02225	31″,0	0,02012	755	0,00201		
	+		+		+		

Tafel V (C).

Log T, abhängig von der Temperatur *t* des Quecksilbers.

(Siehe S. 157.)

Fahrenheit.	*log T*	Cels. und Réaum.	*log T* Cels.	*log T* Réaum.
—	+	—	+	+
30°	0,00242	24°	0,00169	0,00211
25	223	22	154	194
20	203	20	140	176
15	184	18	126	158
10	164	16	112	141
5	145	14	098	123
0	0,00125	12	084	106
+		10	070	088
5°	0,00106	8	056	070
10	086	6	042	053
15	067	4	028	035
20	047	2	014	018
25	028	0	0,00000	0,00000
30	0,00008	+	±	±
	+			
35	0,00012	2	0,00014	0,00018
40	031	4	028	035
45	051	6	042	053
50	070	8	056	070
55	090	10	070	088
60	109	12	0,00084	105
65	129	14	098	122
70	148	16	112	140
75	167	18	126	157
80	186	20	140	175
85	206	22	154	192
90	0,00225	24	168	209
	—	26	182	227
		28	196	244
		30	210	262
		32	224	279
		34	0,00237	0,00296
			—	—

Tafel V (D).

Factoren A und λ von der Zenithdistanz abhängig. (Siehe S. 158.)

z'	A	λ	z'	A	λ
45°		1,0018	84° 0′	1,0096	1,0951
50		23	10	1,0100	992
55		31	20	05	036
60		46	30	10	082
61		49	40	15	130
62		54	50	21	178
63		58	85 0	27	229
64		63	10	33	1,0285
65		68	20	40	1,1344
66		75	30	47	408
67		83	40	55	475
68		1,0092	50	63	547
69		1,0101	86 0	72	624
70		11	10	82	706
71		24	20	1,0193	794
72		39	30	1,0204	888
73		56	40	16	1,1989
74		75	50	30	1,2098
75		1,0197	87 0	44	215
76		1,0220	10	60	341
77	1,0026	52	20	78	477
78	30	1,0299	30	1,0298	624
79	35	1,0357	40	1,0320	783
80	41	420	50	43	1,2955
81	49	493	88 0	68	1,3141
82° 0′	60	600	10	1,0397	341
10	62	622	20	1,0428	559
20	65	646	30	1,0465	1,3797
30	67	671	40	1,0504	1,4056
40	70	697	50	547	341
50	73	725	89 0	1,0593	653
83 0	75	754	10	1,0649	1,4996
10	78	784	20	711	1,5373
20	81	815	30	780	1,5789
30	84	846	40	857	1,6246
40	88	879	50	1,0942	1,6750
50	92	914	90 0	1,1034	1,7304
84 0	1,0096	1,0951			

Tafel V (E).

Log γ, abhängig von der äussern Lufttemperatur t_1 gemessen nach Fahrenheit (*F*), Celsius (*C*) oder Réaumur (*R*).

F	*log γ* für *R*.	*C.* u. *R.*	*log γ* für *C.*	*log γ* für *R.*	*C.* u. *R.*	*log γ* für *C.*	*log γ* für *R.*
—	+	—	+	+	+	+	+
25°	0,06773	35°	0,07373	0,08990	0°	0,01448	0,01448
20	6279	34	192	755	1	290	251
15	5790	33	0,07012	522	2	0,01133	0,01054
10	5307	32	0,06833	290	3	0,00976	0,00859
5	4829	31	654	0,08059	4	820	664
0	0,04357	30	476	0,07829	5	664	470
—		29	298	601	6	509	277
+		28	0,06122	373	7	0,09354	0,00085
5	0,03889	27	0,05946	L,07147			
10	3427	26	771	0,06922			±
15	2969	25	596	698	8	0,09200	0,00106
20	2516	24	423	476	9	0,00047	0,00297
25	2068	23	249	254		±	
30	1624	22	0,05077	0,06034			
35	1185	21	0,04905	0,05815	10	0,00106	0,00486
40	0750	20	734	596	11	259	675
45	0,00320	19	564	379	12	410	0,00863
	±	18	394	0,05163	13	562	0,01050
		17	225	0,04948	14	713	236
50	0,00106	16	0,04057	734	15	0,00863	422
55	0528	15	0,03889	522	16	0,01103	607
60	0946	14	722	310	17	162	791
65	1360	13	556	0,04099	18	311	0,01974
70	1770	12	390	0,03889	19	459	0,02156
75	2177	11	225	681	20	607	338
80	2579	10	0,03060	473	21	754	519
85	2978	9	0,02896	266	22	0,01901	699
90	3373	8	733	0,03060	23	0,02047	0,02879
95	0,03765	7	570	0,02855	24	192	0,03057
	—	6	408	652	25	338	235
		5	247	449	26	483	412
		4	0,02086	247	27	627	589
		3	0,01926	0,02046	28	771	765
		2	766	0,01846	29	0,02914	0,03940
		1	607	646	30	0,03057	0,04114
		0	0,01448	0,01448	31	200	288
			+	+	32	342	461
					33	483	633
					35	0,03624	0,04805
					35	0,03765	0,04976
						—	—

Tafel VI (A).

Aberration.

Argument = Länge der Sonne = ⊙

Grade.	0^z und VI^z		I^z und VII^z		II^z und $VIII^z$		
	log a	*A* +	*log a*	*A* +	*log a*	*A* +	
0	1,2731	0° 0′	1,2831	2° 11′	1,3018	2° 6′	30
1	1	5	37	13	23	3	29
2	2	11	43	16	29	2 0	28
3	2	16	49	18	34	1 57	27
4	3	22	55	20	39	54	26
5	4	27	62	21	43	50	25
6	6	32	68	23	48	47	24
7	7	37	74	24	53	43	23
8	1,2739	43	81	25	57	40	22
9	1,2741	48	87	26	61	36	21
10	4	53	1,2894	27	65	32	20
11	6	0 58	1,2900	28	69	28	19
12	1,2749	1 3	07	28	73	24	18
13	1,2752	8	14	28	76	20	17
14	5	12	20	28	80	16	16
15	1,2758	17	27	28	83	11	15
16	1,2762	22	33	28	86	7	14
17	66	26	40	27	88	1 3	13
18	70	30	46	27	91	0 58	12
19	74	34	52	26	93	53	11
20	79	38	59	25	95	49	10
21	83	42	65	24	97	44	9
22	88	46	71	22	1,3099	39	8
23	93	50	78	21	1,3101	34	7
24	1,2798	53	84	19	2	30	6
25	1,2803	1 57	90	17	3	25	5
26	08	2 0	1,2995	15	4	20	4
27	14	3	1,3001	13	5	15	3
28	19	6	07	11	5	10	2
29	25	9	13	8	6	5	1
30	1,2831	2° 11′	1,3018	2° 6′	1,3106	0° 0′	0
	log a	− *A*	*log a*	− *A*	*log a*	− *A*	Grade.
	V^z und XI^z		IV^z und X^z		III^z und IX^z		

Tafel VI (B).

Aberration.

Argument $= (\odot + \delta)$ und $= (\odot - \delta)$.

Grade.	0^z − VI^z +	I^z − VII^z +	II^z − $VIII^z$ +	
0	4",07	3",52	2",03	30
1	7	49	1 ,97	29
2	7	45	91	28
3	6	41	85	27
4	6	37	78	26
5	5	33	72	25
6	5	29	66	24
7	4	25	59	23
8	3	21	52	22
9	2	16	46	21
10	1	12	39	20
11	4 ,00	07	33	19
12	3 ,98	3 ,02	26	18
13	7	2 ,98	19	17
14	5	93	12	16
15	3	88	1 ,05	15
16	3 ,91	83	0 ,98	14
17	3 ,89	78	92	13
18	7	72	85	12
19	5	67	78	11
20	2	62	71	10
21	3 ,80	56	64	9
22	3 ,77	51	57	8
23	75	45	50	7
24	72	39	43	6
25	3 ,69	33	35	5
26	66	28	28	4
27	63	22	21	3
28	59	16	14	2
29	56	10	07	1
30	3",52	2",03	0",00	0
	+ V^z − XI^z	+ IV^z − X^z	+ III^z − IX^z	Grade.

Tafel VII (A).

Nutation.

Argument = Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn = ☊

Grade.	0ᶻ und VIᶻ log b	0ᶻ und VIᶻ B −	0ᶻ und VIᶻ c − +	Iᶻ und VIIᶻ log b	Iᶻ und VIIᶻ B −	Iᶻ und VIIᶻ c − +	IIᶻ und VIIIᶻ log b	IIᶻ und VIIIᶻ B −	IIᶻ und VIIIᶻ c − +	
0	0,9649	0° 0′	0″,00	0,9392	6° 44′	7″,91	0,8765	7° 48′	13″,70	30
1	9	15	28	76	6 54	8 ,15	43	40	84	29
2	8	31	55	59	7 3	39	22	32	13 ,97	28
3	6	0 46	0 ,83	41	12	62	0,8701	23	14 ,10	27
4	4	1 1	1 ,10	23	20	8 ,85	0,8680	14	22	26
5	0,9642	16	38	0,9305	28	9 ,08	59	7 4	34	25
6	0,9638	32	65	0,9286	35	30	39	6 53	46	24
7	34	1 47	1 ,93	67	42	52	19	41	57	23
8	30	2 2	2 ,20	47	49	74	0,8600	29	67	22
9	25	17	48	27	7 55	9 ,96	0,8581	17	77	21
10	20	31	2 ,75	0,9207	8 0	10 ,17	63	6 3	87	20
11	14	2 46	3 ,02	0,9186	5	38	45	5 49	14 ,96	19
12	0,9607	3 0	29	66	10	59	28	35	15 ,05	18
13	0,9599	15	56	44	14	79	0,8512	20	13	17
14	92	29	3 ,83	23	17	10 ,99	0,8496	5 4	21	16
15	83	43	4 ,10	0,9102	20	11 ,19	81	4 48	28	15
16	74	3 57	36	0,9080	22	38	67	31	35	14
17	56	4 11	63	58	24	57	54	4 14	42	13
18	55	24	4 ,89	35	25	76	42	3 56	48	12
19	44	37	5 ,15	0,9013	25	11 ,94	30	38	53	11
20	33	4 50	41	0,8990	25	12 ,12	19	19	58	10
21	21	5 3	67	68	24	30	10	3 1	63	9
22	0,9509	16	5 ,93	45	23	47	0,8401	2 41	67	8
23	0,9496	28	6 ,18	23	21	64	0,8393	22	71	7
24	83	40	44	0,8900	18	80	86	2 2	74	6
25	69	5 51	69	0,8877	15	12 ,96	81	1 42	76	5
26	55	6 3	6 ,94	55	11	13 ,12	76	22	78	4
27	40	14	7 ,18	32	6	27	72	1 2	80	3
28	24	24	43	0,8810	8 0	42	70	0 41	81	2
29	09	35	67	0,8787	7 54	56	68	21	82	1
30	0,9392	6 44	7 ,91	0,8765	7 48	13 ,70	0,8368	0 0	15 ,82	0
	log b	+ B	− + c	log b	+ B	− + c	log b	+ B	− + c	Grade.
	Vᶻ und XIᶻ			IVᶻ und Xᶻ			IIIᶻ und IXᶻ			

Bei c gilt das — für die **linken** das + für die **rechten** römischen Ziffern, welche die Zwölftel des Umkreises von 360° anzeigen.

Tafel VII (B).

Nutation.

Argument = doppelte Länge der Sonne = 2☉

Grade.	0ᶻ und VIᶻ			Iᶻ und VIIᶻ			IIᶻ und VIIIᶻ			
	log f	*F* −	*g* − +	*log f*	*F* −	*g* − +	*log f*	*F* −	*g* − +	
0	9,7410	0° 0′	0″,00	9,7322	2° 5′	0″,58	9,7135	2° 11′	1″,01	30
2	09	10	04	9,7311	10	62	24	6	3	28
4	08	20	08	9,7299	15	65	13	2 0	5	26
6	06	30	12	87	19	68	9,7102	1 53	6	24
8	9,7403	39	16	75	22	72	9,7092	46	8	22
10	9,7399	49	20	63	24	75	83	38	1 ,09	20
12	95	0 58	24	50	26	78	74	30	1 ,11	18
14	89	1 7	28	37	28	81	66	21	2	16
16	83	16	32	24	28	84	59	12	3	14
18	76	24	36	9,7211	28	87	53	1 3	4	12
20	69	32	40	9,7198	27	89	48	0 53	5	10
22	61	40	44	85	25	92	43	43	5	8
24	52	47	47	72	22	94	40	32	6	6
26	42	1 54	51	59	19	97	37	22	6	4
28	32	2 0	55	47	15	0 ,99	36	11	6	2
30	9,7322	2 5	0 ,58	9,7135	2 11	1 ,01	9,7035	0 0	1 ,16	0
	log f	+ *F*	− + *g*	*log f*	+ *F*	− + *g*	*log f*	+ *F*	− + *g*	Grade.
	Vᶻ und XIᶻ			IVᶻ und Xᶻ			IIIᶻ und IXᶻ			

Für g gilt das — für die linken das + für die rechten römischen Ziffern, welche die Zwölftel des Umkreises von 360° anzeigen.

Tafel VIII.

Culminationszeiten von α und δ Ursae minoris für Greenwich 1875.

(Siehe S. 342.)

Monat.	α Ursae minoris.		δ Ursae minoris.	
	Obere Culm.	Untere Culm.	Obere Culm.	Untere Culm.
Jan. 1.	6h 28m 44s Nm.	6h 30m 42 Vm.	11h 29m 29s Vm.	11h 27m 31s Nm.
Febr. 1.	4 26 24 „	4 28 21 „	9 26 39 „	9 24 41 „
März 1.	2 35 58 „	2 37 56 „	7 37 41 „	7 35 43 „
April 1.	0 33 54 „	0 35 52 „	5 35 58 „	5 34 0 „
Mai 1.	10 36 2 Vm.	10 34 4 Nm.	3 38 10 „	3 36 12 „
Juni 1.	8 34 29 „	8 32 31 „	1 36 22 „	1 34 24 „
Juli 1.	6 36 58 „	6 35 0 „	11 34 28 Nm.	11 36 26 Vm.
Aug. 1.	4 35 33 „	4 33 35 „	9 32 28 „	9 34 26 „
Sept. 1.	2 34 2 „	2 32 4 „	7 30 24 „	7 32 22 „
Oct. 1.	0 36 18 „	0 34 20 „	5 32 14 „	5 34 12 „
Nov. 1.	10 30 30 Nm.	10 32 28 Vm.	3 30 8 „	3 32 6 „
Dec. 1.	8 32 20 „	8 34 18 „	1 32 1 „	1 33 59 „

Die Culminationzeit gilt als **mittlere** Sonnenzeit innerhalb des 1. **Kalendertags** in jedem Monat.

Tafel IX (A).

Mittagsverbesserung und Mitternachtverbesserung.

Argument = halbe Zwischenzeit = M oder = Supplement der halben Zwischenzeit = $N_{,}$.

M $N_{,}$	log A	log B	M $N_{,}$	log A	log B	M $N_{,}$	log A	log B
1h 0m	7,7297	7,7146	1h 40m	7,7386	7,6958	2h 20m	7,7521	7,6654
1	7,7298	43	41	88	52	21	25	45
2	7,7300	39	42	91	46	22	29	35
3	02	36	43	94	40	23	33	26
4	04	32	44	7,7397	34	24	37	16
5	05	28	45	7,7400	27	25	41	7,6606
6	07	25	46	03	21	26	45	7,6597
7	09	21	47	06	14	27	49	87
8	11	17	48	09	08	28	53	77
9	13	13	49	12	7,6901	29	57	67
10	15	09	50	15	7,6894	30	62	56
11	17	05	51	18	88	31	66	46
12	19	7,7101	52	21	81	32	70	36
13	21	7,7097	53	24	74	33	75	25
14	23	92	54	28	67	34	79	14
15	25	88	55	31	59	35	83	7,6504
16	27	83	56	34	52	36	88	7,6493
17	29	79	57	37	45	37	92	82
18	31	75	58	41	38	38	7,7597	71
19	33	70	59	44	30	39	7,7601	60
20	7,7336	65	2 0	7,7447	23	40	06	48
21	38	61	1	51	15	41	10	37
22	40	56	2	54	07	42	15	25
23	42	51	3	58	7,6800	43	20	14
24	45	46	4	61	7,6792	44	24	7,6402
25	47	41	5	64	84	45	29	7,6390
26	49	36	6	68	76	46	34	78
27	52	31	7	72	68	47	38	66
28	54	26	8	75	59	48	43	54
29	57	21	9	79	51	49	48	42
30	59	15	10	82	43	50	53	29
31	62	10	11	86	34	51	58	17
32	64	7,7005	12	90	26	52	63	7,6304
33	67	7,6999	13	94	17	53	68	7,6291
34	69	93	14	7,7497	08	54	73	78
35	72	88	15	7,7501	7,6700	55	78	65
36	74	82	16	05	7,6691	56	83	52
37	77	76	17	09	82	57	88	39
38	80	70	18	13	73	58	93	25
39	83	64	19	17	63	59	7,7698	7,6212
1 40	7,7386	7,6958	2 20	7,7521	7,6654	3 0	7,7703	7,6198

Tafel IX (A).

Mittagsverbesserung und Mitternachtverbesserung.

Argument = halbe Zwischenzeit = *M* oder = Supplement der halben Zwischenzeit = *N,*.

M *N,*	*log A*	*log B*	*M* *N,*	*log A*	*log B*	*M* *N,*	*log A*	*log B*
$3^h\ 0^m$	7,7703	7,6198	$3^h\ 40^m$	7,7936	7,5522	$4^h\ 20^m$	7,8222	7,4482
1	08	84	41	42	7,5501	21	30	449
2	13	70	42	49	7,5480	22	38	415
3	19	56	43	55	59	23	46	381
4	24	42	44	62	37	24	54	347
5	29	27	45	69	7,5416	25	62	312
6	35	7,6113	46	75	7,5394	26	70	277
7	40	7,6098	47	82	72	27	78	241
8	45	83	48	89	50	28	86	205
9	51	68	49	7,7995	27	29	7,8294	168
10	56	53	50	7,8002	7,5304	30	7,8302	131
11	62	38	51	09	7,5281	31	11	093
12	67	23	52	16	58	32	19	055
13	73	7,6007	53	23	34	33	28	7,4016
14	79	7,5991	54	30	7,5211	34	36	7,3977
15	84	75	55	37	7,5186	35	44	937
16	90	59	56	44	62	36	53	876
17	7,7796	43	57	51	37	37	61	855
18	7,7801	27	58	58	7,5112	38	70	813
19	07	7,5910	59	65	7,5087	39	78	771
20	13	7,5894	4 0	72	62	40	87	728
21	19	77	1	79	36	41	7,8396	684
22	25	60	2	86	7,5010	42	7,8404	639
23	31	43	3	7,8094	7,4983	43	13	594
24	36	25	4	7,8101	947	44	22	548
25	42	7,5808	5	08	930	45	30	501
26	48	7,5790	6	16	902	46	39	454
27	54	72	7	23	874	47	48	406
28	60	54	8	30	846	48	57	357
29	67	36	9	38	818	49	66	307
30	73	7,5717	10	45	789	50	75	256
31	79	7,5699	11	53	760	51	84	205
32	85	80	12	60	731	52	7,8493	152
33	91	61	13	68	701	53	7,8502	099
34	7,7898	41	14	76	671	54	11	7,3045
35	7,7904	22	15	83	640	55	20	7,2989
36	10	7,5602	16	91	609	56	30	933
37	16	6,5582	17	7,8199	578	57	39	876
38	23	62	18	7,8206	546	58	48	817
39	29	42	19	14	514	59	58	758
3 40	7,7936	7,5522	4 20	7,8222	7,4482	5 0	7,8567	7,2697

Tafel IX (B).

Mitternachtsverbesserung

Argument = halbe Zwischenzeit = N (Siehe S. 397.)

N	*log f*	*N*	*log f*	*N*	*log f*	*N*	*log f*
$6^h\ 1^m$	0,0024	$6^h\ 39^m$	0,0945	$7^h\ 17^m$	0,1887	$7^h\ 55^m$	0,2875
2	048	40	969	18	913	56	902
3	072	41	0,0994	19	938	57	929
4	097	42	0,1018	20	963	58	956
5	121	43	043	21	0,1988	59	0,2983
6	145	44	067	22	0,2014	8 0	0,3010
7	169	45	092	23	039	1	038
8	193	46	116	24	065	2	065
9	217	47	141	25	090	3	092
10	241	48	165	26	116	4	119
11	265	49	190	27	142	5	147
12	290	50	214	28	167	6	174
13	314	51	239	29	193	7	202
14	338	52	264	30	219	8	230
15	362	53	288	31	245	9	257
16	386	54	313	32	271	10	285
17	410	55	338	33	296	11	313
18	435	56	363	34	322	12	341
19	459	57	388	35	348	13	368
20	0,0483	58	0,1412	36	0,2374	14	0,3396
21	507	59	436	37	400	15	424
22	531	7 0	461	38	426	16	453
23	556	1	486	39	452	17	481
24	580	2	511	40	478	18	509
25	604	3	536	41	504	19	537
26	628	4	561	42	530	20	566
27	653	5	586	43	557	21	594
28	677	6	611	44	583	22	623
29	702	7	636	45	609	23	651
30	726	8	661	46	636	24	680
31	750	9	686	47	662	25	709
32	775	10	711	48	689	26	738
33	799	11	736	49	715	27	767
34	823	12	761	50	742	28	796
35	847	13	787	51	769	29	825
36	872	14	812	52	795	30	854
37	896	15	837	53	822	31	883
38	920	16	862	54	848	32	912
6 39	0,0945	7 17	0,1887	7 55	0,2875	8 33	0,3942

Tafel IX (B).

Mitternachtsverbesserung

Argument = halbe Zwischenzeit = N (Siehe S. 397.)

N	*log f*	*N*	*log f*	*N*	*log f*	*N*	*log f*
8h 33m	0,3942	9h 11m	0,5133	9h 49m	0,6529	10h 27m	0,8288
33	0,3971	12	167	50	569	28	342
35	0,4001	13	200	51	610	29	396
36	030	14	234	52	652	30	451
37	060	15	268	53	693	31	506
38	090	16	303	54	735	32	562
39	120	17	337	55	776	33	619
40	150	18	372	56	818	34	676
41	180	19	406	57	861	35	734
42	210	20	441	58	903	36	792
43	241	21	476	59	946	37	851
44	271	22	511	10 0	0,6990	38	910
45	301	23	547	1	0,7033	39	0,8970
46	332	24	582	2	077	40	0,9031
47	363	25	617	3	121	41	092
48	394	26	653	4	166	42	155
49	425	27	689	5	211	43	217
50	0,4455	28	0,5726	6	256	44	281
51	487	29	762	7	301	45	345
52	518	30	798	8	347	46	410
53	549	31	835	9	393	47	476
54	581	32	872	10	439	48	543
55	612	33	909	11	486	49	610
56	644	34	946	12	533	50	678
57	676	35	0,5983	13	581	51	747
58	707	36	0,6021	14	629	52	817
59	739	37	059	15	677	53	888
9 0	771	38	097	16	726	54	0,9960
1	804	39	135	17	775	55	1,0033
2	836	40	173	18	824	56	107
3	869	41	212	19	874	57	182
4	901	42	251	20	924	58	258
5	934	43	290	21	0,7975	59	336
6	0,4967	44	329	22	0,8026	11 0	1,0414
7	0,5000	45	368	23	077		
8	033	46	408	24	129		
9	066	47	448	25	182		
10	099	48	489	26	234		
11	0,5133	49	0,6529	27	0,8288		

Tafel X (A).

Verwandlung einer Winkelgrösse in eine Zeitgrösse.

Winkel-Grade in Zeit.				Winkel-Minuten in Zeit.				Winkel-Secunden in Zeit.			
1°	0h 4m	110°	7h 20m	1′	0m 4s	31′	2m 4s	1′	0s,07	31′	2s,07
2	8	120	8 0	2	8	32	8	2	0 ,13	32	2 ,13
3	12	130	8 40	3	12	33	12	3	0 ,20	33	2 ,20
4	16	140	9 20	4	16	34	16	4	0 ,27	34	2 ,27
5	20	150	10 0	5	20	35	20	5	0 ,33	35	2 ,33
6	24	160	10 40	6	24	36	24	6	0 ,40	36	2 ,40
7	28	170	11 20	7	28	37	28	7	0 ,47	37	2 ,47
8	32	180	12 0	8	32	38	32	8	0 ,53	38	2 ,53
9	36	190	12 40	9	36	39	36	9	0 ,60	39	2 ,60
10	40	200	13 20	10	40	40	40	10	0 ,67	40	2 ,67
11	44	210	14 0	11	44	41	44	11	0 ,73	41	2 ,73
12	48	220	14 40	12	48	42	48	12	0 ,80	42	2 ,80
13	0 52	230	15 20	13	52	43	52	13	0 ,87	43	2 ,87
14	1 56	240	16 0	14	0 56	44	2 56	14	0 ,93	44	2 ,93
15	1 0	250	16 40	15	1 0	45	3 0	15	1 ,00	45	3 ,00
16	4	260	17 20	16	4	46	4	16	1 ,07	46	3 ,07
17	8	270	18 0	17	8	47	8	17	1 ,13	47	3 ,13
18	12	280	18 40	18	12	48	12	18	1 ,20	48	3 ,20
19	16	290	19 20	19	16	49	16	19	1 ,27	49	3 ,27
20	1 20	300	20 0	20	20	50	20	20	1 ,33	50	3 ,33
30	2 0	310	20 40	21	24	51	24	21	1 ,40	51	3 ,40
40	2 40	320	21 20	22	28	52	28	22	1 ,47	52	3 ,47
50	3 20	330	22 0	23	32	53	32	23	1 ,53	53	3 ,53
60	4 0	340	22 40	24	36	54	36	24	1 ,60	54	3 ,60
70	4 40	350	23 20	25	40	55	40	25	1 ,67	55	3 ,67
80	5 20	360	24 0	26	44	56	44	26	1 ,73	56	3 ,73
90	6 0			27	48	57	48	27	1 ,80	57	3 ,80
100	6 40			28	52	58	52	28	1 ,87	58	3 ,87
				29	1 56	59	3 56	29	1 ,93	59	3 ,93
				30	2 0	60	4 0	30	2 ,00	60	4 ,00

Tafel X (B).

Verwandlung einer Zeitgrösse in eine Winkelgrösse.

Zeit-Stunden in Grade.		Zeit-Minuten in Winkel.				Zeit-Secunden in Winkel.					
1ʰ	15°	1ᵐ	0° 15′	31ᵐ	7° 45′	1ˢ	0′ 15″	31ˢ	7′ 45″	0ˢ,1	1″,5
2	30	2	30	32	8 0	2	30	32	8 0	0,2	3,0
3	45	3	45	33	15	3	45	33	15	0,3	4,5
4	60	4	1 0	34	30	4	1 0	34	30	0,4	6,0
5	75	5	15	35	45	5	15	35	45	0,5	7,5
6	90	6	30	36	9 0	6	30	36	9 0	0,6	9,0
7	105	7	45	37	15	7	45	37	15	0,7	10,5
8	120	8	2 0	38	30	8	2 0	38	30	0,8	12,0
9	135	9	15	39	45	9	15	39	45	0,9	13,5
10	150	10	30	40	10 0	10	30	40	10 0	1,0	15,0
11	165	11	45	41	15	11	45	41	15		
12	180	12	3 0	42	30	12	3 0	42	30		
13	195	13	15	43	45	13	15	43	45		
14	210	14	30	44	11 0	14	30	44	11 0		
15	225	15	45	45	15	15	45	45	15		
16	240	16	4 0	46	30	16	4 0	46	30		
17	255	17	15	47	45	17	15	47	45		
18	270	18	30	48	12 0	18	30	48	12 0		
19	285	19	45	49	15	19	45	49	15		
20	300	20	5 0	50	30	20	5 0	50	30		
21	315	21	15	51	45	21	15	51	45		
22	330	22	30	52	13 0	22	30	52	13 0		
23	345	23	45	53	15	23	45	53	15		
24	360	24	6 0	54	30	24	6 0	54	30		
		25	15	55	45	25	15	55	45		
		26	30	56	14 0	26	30	56	14 0		
		27	45	57	15	27	45	57	15		
		28	7 0	58	30	28	7 0	58	30		
		29	15	59	45	29	15	59	45		
		30	7 30	60	15 0	30	30	60	15 0		

Weitere Zusätze und Verbesserungen.

(Die Seiten- und Zeilenbezeichnung geschieht gemäss der Bemerkung auf S. XV.)

8 [11] wäre statt „gleichen“ besser „gleichartigen“ zu setzen.

16. müsste in Fig. 3 die Linie AC,s deutlicher als eine Gerade gezeichnet sein und nicht wie jetzt in $C,$ einen Knick zeigen.

51 (17 u. 18) müssen anstatt der Worte „und hiermit ..... herabsinkt“ die Worte „während die Zeit τ dieselbe bleibt“ gesetzt werden.

66 (12) setze man hinter das Wort „Rectascension“ noch das Wort „Sonne“ hinzu.

66 [10] würde das Wort „zugleich“ besser gesperrt gedruckt worden sein.

74 (6 u. 7) soll der Ausdruck die Erde „I“ am weitesten von „III“ entfernt soviel heissen als dass die Erde „I“ der Erde „III“ gegenüber die meiste Verschiedenheit in der Erscheinung bietet.

77. Bei den vier Sätzen wird man daran festhalten müssen, dass wenn von einem Ersetzen eines Punktes durch einen andern die Rede ist, dies nur mit Rücksicht auf das zeitliche Erscheinen im Meridian des Beobachters gelten kann.

87 (19). Die Zahl 206264,8 oder abgekürzt 206265, welche hier zum erstenmale vorkommt, wird häufig noch angetroffen werden und ist es gut, ihre Bedeutung genau sich klar zu machen. In späteren Entwickelungen wird sie wie üblich öfter mit ϱ bezeichnet und ist namentlich darauf zu achten, dass auch der Werth $\sin 1'' = \frac{1}{206265} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden darf. Insbesondere wird also ein ϱ, welches z. B. für den Radius des Erdsphäroids oder den Radiusvector der Erde gesetzt wird, mit dem eben bezeichneten ϱ nicht zu verwechseln sein.

98. In den Gleichungen (27) bis (30) und auch auf der Seite 100 wäre das t als Indexbuchstaben zur Bezeichnung der Anzahl Tage durch ein d zu ersetzen.

99 u. 100. Auf diesen Seiten müssen die Coefficienten in den Gl. (31) und (32) etwas genauer werden. Die Zeitgrösse $\frac{59' 8'',3304}{15}$ in 99 (12) giebt nämlich nach Ausführung der Division mit 15 nicht $3^m\, 56^s,556$, sondern $a = 3^m\, 56^s,5554$ und liefert dieses in einen Tagebruch verwandelt anstatt 0,0027379119 ein 0,002737909**7**. Hiernach wird der Werth in Zeile 18 v. u. $\frac{1}{0,0027379097} = 0,99726956\mathbf{70}$ und liefert dies von 1 abgezogen die Zahl 0,00273043**30**, welches als ein Tagebruch angesehen und dann in Minuten und Secunden verwandelt $b = 3^m\, 55^s,90948$ liefert. Das 8 nach dem Komma in Zeile 14 v. u. anstatt eines 9 ist nur Druckfehler. Will man demnach die Zahlen a und b auf drei Stellen abrunden, so würden sie $3^m\, 56^s,555$ und $3^m\, 55^s,909$ heissen müssen; will man aber, wie das sehr häufig namentlich bei der erstern später vorkommt, nur zwei Stellen nach dem Komma berücksichtigen, so würde $3^m\, 56^s$, und $3^m\, 55^s,91$ zu setzen sein. Abwei-

chungen hiervon, die aber kaum irgend einen Einfluss haben, wären demnach in späteren Rechnungen zu verbessern.

116. Beim Aufzählen der sechs Aufgaben wäre mit Rücksicht auf die spätere Reihenfolge der Lösungen No. 4 mit No. 3 zu vertauschen.

145 [8] setze hinter Gl. (32) noch „Kapitel II" hinzu.

156 [10] muss in Gl. (a_*) die erste runde Klammer durch eine eckige ersetzt werden.

168. In Fig. 40 muss an α unten noch ein kleines Sternchen gesetzt werden.

211 (14) würden hinter dem Worte „gleicher" noch die Worte „und gleichgerichteter" einzuschalten sein.

222 [5] wäre anstatt „Perihel der Erdbahn" wohl besser „Perihel der Sonne" zu setzen, damit dieser Ausdruck zu den Auseinandersetzungen auf S. 92 passt, wo die Erdlänge im Perihel gleich 100° 21′ 47″ angegeben wurde, demgemäss das Perihel der Sonne gleich 180+100° 21′ 47″ gleich 280° 21′ 47″ fürs Jahr 1850 zu setzen wäre.

226 (1 u. 3) wäre mit Rücksicht auf die Gl. (38) u. (39) anstatt $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ ein $\Delta'\lambda$ und $\Delta'\varepsilon$ zu setzen.

227 (15). Die Definition des „Colurs der Nachtgleichen" liegt in den unmittelbar vorausgehenden Worten.

242 [4 u. 3] ist statt „der Quere" und „der Länge" bzw. zu setzen „beiderseits der Querebene" und „beiderseits der Längsebene."

283 müsste die Fig. 61 so stehen, dass die Gerade $H_w H_o$ als Linie, die den Horizont andeuten soll, auch genau parallel den Zeilen verliefe.

325 Zeile 19 u. f. von unten verdient bemerkt zu werden, dass eigentlich nur für die obere Culmination die Uhranzeige der Sternuhr gleich der Rectascension des Sterns ist, während in der untern dies nicht zutrifft. Während also für erstere die Gleichung der richtigen Uhr $O = Æ$ heisst, muss sie bei der untern Culmination $O - 12^h = Æ$ oder $O = Æ + 12^h$ heissen. Im Falle der unteren Culmination setzt man demnach zu Æ, wie es das Jahrbuch für die obere Culmination liefert, einfach ein 12^h hinzu und sieht den Fall dann identisch mit dem bei der oberen Culmination an.

341 [7] setze hinter 1870 noch die Worte „am 1. Jan."

359 [13] lies hinter „Zeit" noch das Wort „täglich."

371 u. 372 Gl. (8) können in einigen Gleichungen die Zeichen + und — correcter beobachtet werden.

383. In Fig. 81 ist oben um T der Buchstabenindex u vergessen; die Gerade von P nach T_1 darf bei s_1 keine Lücke zeigen.

390 (17) wäre anstatt „Sonnenuhr" wohl besser „Aequatorial-Sonnenuhr" zu setzen.

423. Bei der Fig. 86 verdient darauf aufmerksam zu machen, dass die Bögen G_1G und $b'p'G$ für sich bestehende und nicht etwa Theile eines und desselben Bogens der von G_1 nach b' verlauft sind; es müsste also in G besser ein Knick hervorgehoben sein.

430 kann in Fig. 87 an die horizontale Ebene noch der Buchstabe E gesetzt werden.

453 (7). Da die Zeitgleichung ebenfalls veränderlich ist, so wird auch hierbei ein genauerer Werth berechnet werden können und empfehlen wir diesen Einfluss zu bestimmen.

Sachregister.

Aberration, 146, 164; Einfl. auf Länge und Breite 170; auf Rectasc. u. Decl. 172; jährliche, tägliche 177; Einfl. d. jährl. auf die Länge und $\mathcal{AR}$ der ⊙ 179. 180; der täglichen auf Rectasc. u. Decl. der Sonne 181; Aberrationswinkel 168.

Aenderung, tägliche, der Zeitgleichung 95; tägliche, der Rectasc. der Sonne 103. 109. 127; stündliche, der Rectasc. 113; der Declination, ihr Einfl. auf die Zeitbestimmung 390.

Aequinoctium, Frühlings-, Herbst- 66; mittleres Aeq. 110. 220.

Anker, bei Uhren 31.

Anomalie, wahre, mittlere 84. 87.

Apogäum, der Mondbahn 224.

Apsidenlinie, der Mondbahn 224.

Aufgang, der Sonne 56. 163.

Azimuth, 186; versch. beim Erdsphäroid 188.

Azimuthalfehler, 314. 326.

Azimuthalmarke, 277.

Axe, der Erde 17. 18. 61. 73: optische 299; eines Fernrohrs horizontal zu stellen 257. 274; Fehler ders. 281.

Bahn, der Erde 68. 73.

Barometerstand, 157.

Bewegung, tropische, der Erde u. Sonne 98.

Breite, der Sonne, Gestirne 64; geocentrische = verbesserte = wahre, geographische = scheinbare 183; Unterschied hiervon 189.

Chronometer, 29; Taschen-, Box- 39; seine Behandlung 53.

Coefficienten, der Fehler des Passageinstruments 331; ihre vortheilhafteste Bestimmung 361.

Coincidenzen, bei Uhrvergleichung 49.

Collimationsfehler, 298; seine Bestimmung 303. 326. 328. 359; seine Abhängigkeit von der Stellung des Prismas 309.

Collimationslinie, 298; Haupt-, Seiten- 313. 314. 324; Ebene der Collimationslinien = Collimationskreis 314. 324. 337.

Compensation, bei Uhren 34. 43.

Culmination, der Sonne 17; obere, untere 56.

Datum, 95. 123. 125.

Declination, der Sonne 64; scheinbare 103; der beiden Sonnen im Mittag 108.

Differenzen, siehe **Aenderungen,**

Diopter, 429. 431.

Dreieck, Zenith-Pol-Stern 366. 416.

Durchgangsdauer, der Sonnen- und Mondscheibe durch den Meridian 105. 205.

Durchgangszeiten, eines Sterns beim Passageinstrument 337.

Durchmesser, scheinbare 147. 202; der Planeten 201.

Eble's Zeitbestimmungsmethode 441; Theorie hiervon 446; Beispiel 451.

Echappement, bei Uhren 30. 41.

Eigenbewegung, der Gestirne 232.

Ekliptik, 17; Schiefe derselben 65. 147. 208; mittlere Schiefe ders. 221; Veränderlichkeit 148. 222; feste, wahre 219; Säcularänderung ders. 218.

Epoche, bei Uhrvergleichungen 52.

Erde, mittlere, wahre 74. 77; Form derselben 184; Dimensionen 189.

Erscheinen, eines Sterns im Gesichtsfeld des Passageinstr. 312; der Sonne bei der Beobachtung mit d. Sextanten 378.

Excentricität, der Erdbahn 69.

Fadenplatte, 272; Einstellung ders. 300; Form 312.

Fädendistanzen, 11; ihre Bestimmung 338. 340; beim Sextanten 428.

Fernrohr, gerades 298. 309; gebrochenes 428. 305. 309. 311.
Frühlingspunkt, 63. 97; mittlerer 98; übertragener 225.
Fühlhebelniveau, 292.

Gang, gleich Gangfehler der Uhren 44. 45. 352. 414. 461.
Grenzen, der Unsicherheit bei Uhrvergleichungen 50.

Halbmesser, scheinbarer, der Sonne 105.
Herbstnachtgleichenpunkt, 63.
Höhen, correspondirende 373.
Höhenänderung, 370.
Höhenmessung, genaue, mittelst des Sextanten 437.
Höhenkreis, beim Passageinstrument 272; Ablesung desselben 295. 297; Fehler desselben 295.
Horizont, künstlicher, natürlicher 374.
Horizontalkreis, 274; seine Horizontalstellung 278.

Jahr, tropisches 98.
Jahrbücher, astronomische 101.
Interpolation, einfache 103.
Intervalle, Zeit- 117.

Keplers Problem 84.
Knoten, der Mondbahn 224.

Lage, bei einer Fernrohraxe 273. 280. 312. 331. 360.
Länge, der Sonne, Erde 63; wahre L. der Sonne 73. 76. 83; mittlere L. der Sonne 73. 74. 76. 83; Länge der wahren Sonne 111; L. des Monds, wahre, mittlere 225.
Längendifferenzen, Greenwich, Berlin, Cassel, Marburg 113. 138.
Libelle, 239; Form ders. 240. 241. 261; Füllung ders. 243. 260. 265; Fassung 244; Seiten- und Höhenfehler 241. 252. 255. 259. 267; Indexfehler ders. 268; Eintheilung ders. 244; Ablesungsart 244. 247. 249. 266; Winkelwerth eines Scalentheils 247; Neigungswinkel einer Axe gegen den Horizont 257; Einflüsse auf die Länge der Blase und ihre Empfindlichkeit 265.
Libellenjustirbret, 248. 261.
Linse, ihre optische Axe 299.

Meridian, seine Bestimmung 25. 315; beim Passageinstrument 299.
Mittag, wahrer 102. 107; mittlerer 107: unverbesserter 409.
Mittagshöhe, 447. 452.
Mittagsverbesserung, 395.
Mittelpunktsgleichung, 77. 88.
Mondbahn, 223.
Mitternacht, unverbesserte 409.
Mitternachtsverbesserung, 395.
Mitternachtstiefe, 447. 452.

Neigungsfehler, der Axe 326.
Nutation, 147. 208. 218; Solar-, 218; Lunar-, 218; Lunisolar-, 219; N. der Schiefe der Ekliptik 220; Einfl. auf Rectasc. und Decl. 231.
Nutationsellipse, 228.

Ocularlinse, 298; Einstellung derselben aufs Fadenkreuz 300.
Ort, scheinbarer, der Sonne 63; scheinbarer und wahrer 146. 174. 332; mittlerer 174. 473.

Parallaxe, 146. 182; Horizontal-, Horizontaläquatorial-, Horizontalpolar-, 184; Höhen- 185; Einfluss auf Azimuth und Zenithdistanz 191. 192; auf Rectasc. u. Declin. 196; auf den Auf- u. Untergang d. Gestirne 195; was die Jahrbücher darüber von Sonne und Mond enthalten 198; Horizontal- der Sonne und der Planeten 201; tägliche 201, jährliche 202.
Passageinstrument, Beschreibung 270; Aufstellung 277. 279; Fehler 280. 281. 282. 289. 292. 294. 295. 314. 322. 326; Gebrauch bei d. Zeitbestimmung 322; Prisma desselb. 271. 305; seine Fehler 306; sein Einfluss auf d. Collimationsfehler 309.
Pendel, Rost-, 36; Quecksilber- 37.
Perigäum, der Mondbahn 224.
Perihel, der Sonne 91. 92. 222.

Pol, der Ekliptik 64.
Progressivbewegung, der Erde 57.
Präcession, Erklärung ders. 215; Planeten- 219. 220; allgemeine 219. 220; Lunisolar- 219. 220. 221; jährliche 221; Einfluss auf Rectasc. u. Decl. 231. 474.

Radius, des Erdsphäroids 189; Radiusvector der Erdbahn 84. 111.
Räder, bei Uhren 31. 34. 40.
Rectascension, der Sonne 64; wahre 74. 102; scheinbare 102. 474; der beiden Sonnen im Mittage 107; in der Mitternacht 122; Momentan- 120.
Reduction, auf die Ekliptik 77. 89; auf den Mittelfaden 346.
Refraction, 146. 148; mittlere, wahre 150. 152; Horizontal- 160; Einfluss auf den Auf- und Untergang der Gestirne 159; auf die Declination 332. 335; mittlere mit dem Argument: wahre Höhe 335.
Rotation, der Erde um ihre Axe 18. 57.
Regulator, bei Uhren 30. 40.

Schraube, Micrometer- 248. 261.
Schreibapparate, electrische 9. 15.
Spiegelsextant, 374; seine Anwendung zur Höhenmessung 376; Fehler des Spiegels 417. 418; weitere Fehler 421; ihre theoret. Bestimmung 423; ihre praktische Bestimmung 427. 432. 434.
Sector, elliptischer, seine Bestimmung 81. 84.
Solstitium, Winter-, Sommer- 66. 91.
Sonne, wahre, mittlere 56. 61.
Stand, gleich Standfehler der Uhren 44. 325. 351. 352. 384. 414. 441. 452. 466.
Stützen, eines Fernrohrs 273.
Stunden, wahre Sonnenst. 57; mittlere 75; Stern- 96.
Stundenwinkel, 78.

Tage, verschiedene 56. 57. 74. 96.
Tafeln, verschiedene finden sich am Schlusse und sind meistens auch mit einem Hinweise auf die betr. Stelle im Texte versehen.
Thermometerstand, 152.

Uhren, Wasser- 3; Sand- 8; Sonnen- 15. 22. 25. 27; Pendel- 29; Feder- 38 Stern- 97; ihre Vergleichung 47.
Umwandlung der verschiedenen Zeiten in einander 99. 116.

Zählung, bürgerliche, astronomische 96. 117. 121.
Zeit, 3. 56; Zeitarten 56; wahre, mittlere, Stern- 56. 75. 96.
Zeitbestimmungen, verschiedene Arten aus dem Inhaltsverzeichniss ersichtlich; praktische Beispiele 353. 407. 439. 464. 467; mit correspondirenden Sonnenhöhen, mit Rücksicht auf die Declinationsänderung der Sonne 390; Einfluss des Gangs einer Uhr hierauf 405; Einfl. der Strahlenbrechung 406; sechs Fälle hierbei 382; mit Hilfe von Fixsternverschwindungen 454; successives Verschwinden 459; Einfluss der Rectascensions- und Declinationsänderung hierauf 470. 475.
Zeitgleichung, 77. 80; graphische Darstellung 90. 93; in den Jahrbüchern 102. 114. 115; Aenderung ders. 129. 130. 143.
Zeitintervall, 117.
Zenith, scheinbares, geocentrisches 183.
Zenithdistanz, 149; verschiedene 188. 335.
Zwischenzeit, halbe bei correspondirender Sonnenhöhenbeobachtung 393. 398.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Melde, Franz,

Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung mit Zugrundlegung vorbereitender Lehren und unter Berücksichtigung einfacher Hilfsmittel

Tübingen 1876

Astr.p. 88 t
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11331161-0